

برداشت انرژی ارتعاشی از ورق دایره‌ای چرخان با وصله‌ی

پیزوالکتریک

عرفان رستگار*

دانشجوی کارشناسی ارشد

دانشکده مکانیک دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

erfan.rastegar@email.kntu.ac.ir

علی اصغر جعفری

استاد

دانشکده مکانیک دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

ajafari@kntu.ac.ir

چکیده

برداشت انرژی ارتعاشی یکی از روش‌های نوین تأمین انرژی برای سامانه‌های کم‌مصرف است که در سال‌های اخیر توجه پژوهشگران را به خود جلب کرده است. در این پژوهش، برداشت انرژی ارتعاشی از یک ورق دایره‌ای چرخان مجهز به وصله پیزوالکتریک بررسی می‌شود. بدین منظور، معادلات حاکم بر ارتعاشات ورق با در نظر گرفتن اثر نیروی گریز از مرکز و کوپل الکترومکانیکی استخراج شده و فرکانس‌های طبیعی، ولتاژ و توان الکتریکی تولیدی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. حل معادلات با استفاده از روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته انجام شده و تأثیر پارامترهایی نظیر اندازه و ضخامت وصله پیزوالکتریک، موقعیت نصب آن و ابعاد دیسک بر عملکرد سامانه بررسی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد دوران ورق بر ویژگی‌های دینامیکی و میزان توان برداشت‌شده اثر قابل‌توجهی دارد، به‌طوری‌که چگالی توان تولیدی حدود ۳.۴۵ میکرووات بر میلی‌متر مکعب به دست آمده است. در نهایت، به‌منظور اعتبارسنجی، فرکانس‌های طبیعی و پاسخ سامانه با نتایج شبیه‌سازی المان محدود در نرم‌افزار COMSOL مقایسه شده و تطابق مناسبی مشاهده می‌شود.

واژگان کلیدی: برداشت انرژی ارتعاشی، ورق دایره‌ای چرخان، مواد پیزوالکتریک، کوپل الکترومکانیکی، فرکانس‌های طبیعی، مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته، گریز از مرکز

۱. مقدمه

برداشت انرژی فرآیندی است که در آن انرژی‌های موجود در محیط اطراف به شکل‌های قابل استفاده، به‌ویژه انرژی الکتریکی، تبدیل می‌شوند. در تعریف امروزی، برداشت انرژی به جمع‌آوری و تبدیل انرژی‌های پراکنده و کم‌چگالی نظیر انرژی خورشیدی،

حرارتی، ارتعاشی و الکترومغناطیسی به توان الکتریکی موردنیاز سامانه‌های الکترونیکی اطلاق می‌شود. هدف اصلی این فرآیند، تأمین انرژی پایدار برای سامانه‌هایی است که دسترسی به منابع تغذیه متداول، مانند باتری‌های قابل تعویض یا شبکه برق، در آن‌ها دشوار یا حتی غیرممکن است. در میان انواع روش‌های برداشت

انرژی، برداشت انرژی ارتعاشی محیط از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است؛ در این روش، حرکت مکانیکی ناشی از ارتعاشات محیطی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود و میزان انرژی قابل برداشت به شدت و فرکانس ارتعاشات، مشخصات دینامیکی سامانه و نوع مبدل وابسته است.

مواد و فناوری‌های متداول در سامانه‌های برداشت انرژی شامل مواد فتوولتائیک برای تبدیل انرژی خورشیدی، مواد و ژنراتورهای ترموالکتریک برای تبدیل انرژی حرارتی، و مبدل‌های الکترومکانیکی نظیر مواد پیزوالکتریک و ژنراتورهای الکترواستاتیکی برای تبدیل انرژی ارتعاشی هستند. برداشت انرژی کاربردهای گسترده‌ای در سامانه‌های سنسوری بی‌سیم، سامانه‌های میکروالکترومکانیکی خودتغذیه، تجهیزات پایش سلامت سازه‌ها و افزایش طول عمر باتری‌ها دارد. در این میان، مواد پیزوالکتریک به دلیل امکان استفاده از اثر مستقیم پیزوالکتریک برای تبدیل کرنش مکانیکی به بار الکتریکی، گزینه‌ای جذاب برای حسگری و برداشت انرژی محسوب می‌شوند. تبدیل انرژی مکانیکی ارتعاشات محیطی به انرژی الکتریکی با استفاده از این مواد، معمولاً «برداشت انرژی پیزوالکتریک» نامیده می‌شود و عموماً در سطوح توان پایین، در محدوده میکرووات تا میلی‌وات، برای تغذیه ادوات الکترونیکی کم‌مصرف به کار می‌رود.

سامانه‌های برداشت انرژی ارتعاشی را می‌توان به‌طور کلی به دو دسته ماکرو^۱ و میکرو^۲ تقسیم کرد. برداشت انرژی از منابعی مانند باد و خورشید توان‌هایی در مقیاس kW تا MW تولید می‌کند و در رده سامانه‌های ماکرو قرار می‌گیرد، در حالی که برداشت انرژی ارتعاشی عموماً توان‌هایی در محدوده μW تا

mW فراهم می‌کند و در دسته سامانه‌های میکرو طبقه‌بندی می‌شود. انتخاب مناسب مبدل و تنظیم شرایط تحریک، محدوده فرکانسی و الزامات توان خروجی، نقش مهمی در بهینه‌سازی عملکرد مبدل‌های پیزوالکتریک ایفا می‌کند.

در این پژوهش، هندسه صفحه دایره‌ای چرخان به‌عنوان ساختار اصلی برای برداشت انرژی ارتعاشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. این هندسه در بسیاری از سامانه‌های مهندسی و تجهیزات دوار مشاهده می‌شود؛ از جمله می‌توان به بخش‌هایی از بدنه توربین‌ها، یاتاقان‌ها^۳، دیسک‌های انتهایی پولی‌ها^۴، رینگ و دیسک چرخ خودروها و برخی اجزای محوری شافت^۵ اشاره کرد. این سازه‌ها در حین عملکرد معمولاً تحت اثر بارهای دینامیکی و ارتعاشی قرار دارند و بدین ترتیب، شرایط مناسبی برای استقرار وصله‌های پیزوالکتریک و برداشت انرژی ارتعاشی فراهم می‌آورند. دوران صفحه، از طریق ایجاد تنش‌های ناشی از نیروی گریز از مرکز، بر فرکانس‌های طبیعی و الگوی مودهای ارتعاشی اثر گذاشته و در نتیجه، بر میدان کرنش و میزان انرژی قابل برداشت تأثیرگذار است.

در پژوهش زو و همکارانش در سال ۲۰۱۷ [۱]، یک برداشت‌کننده انرژی ارتعاشی پیزوالکتریک با دو درجه آزادی و مبتنی بر کوپل مغناطیسی برای کاربردهای چرخشی ارائه شد. در این سامانه، دو تیر یک‌سرگردار پیزوالکتریک وارونه به‌وسیله آهنرباهای دائمی و دافعه مغناطیسی با یکدیگر کوپل شده‌اند. مدل دینامیکی الکترومکانیکی بر پایه اصل همپلتون استخراج و با نتایج تجربی اعتبارسنجی شد. نتایج نشان داد که سامانه در سرعت‌های ۴۲۰ و ۵۲۰ دور بر دقیقه به تشدید رسیده و توان متوسط خروجی به‌ترتیب ۵۶۴ و ۵۳۵.۳

میکرووات تولید می‌کند، در حالی که بیشینه توان لحظه‌ای ۱۶۰۴ میکرووات در سرعت ۴۲۰ دور بر دقیقه گزارش شده است. این نتایج بیانگر کارایی مناسب سامانه برای برداشت انرژی در سرعت‌های دورانی پایین و در چندین باند فرکانسی است.

در پژوهش انجام‌شده توسط هیلینگ فو و همکارش در سال ۲۰۱۷ [۲]، یک برداشت‌کننده انرژی ارتعاشی پیزوالکتریک برای کاربردهای چرخان در سرعت‌های دورانی پایین مورد مطالعه قرار گرفت. در این سامانه، از نیروی مغناطیسی بین آهنرباهای در حال چرخش برای تحریک ارتعاش یک تیر یک‌سرگردار ساخته‌شده از ماده پیزوالکتریک استفاده شده است. در این پیکربندی، یک آهنربا به‌صورت ساکن به تیر پیزوالکتریک متصل بوده و آهنربای دیگر بر روی یک دیسک در حال چرخش نصب شده است. سرعت دورانی سامانه تا حداکثر ۴۸۰۰ دور بر دقیقه (معادل ۸۰ هرتز) گزارش شده است. در مرحله نخست، آزمایش‌ها برای چهار حالت مختلف شامل ترکیب‌های گوناگون جهت دوران و جهت نیروی مغناطیسی انجام شد تا پیکربندی بهینه‌ای با حداقل توان ورودی و حداکثر جابه‌جایی آهنربای متصل به تیر پیزوالکتریک تعیین شود. نتایج نشان داد که در حالتی که نیروی مغناطیسی دافعه عمود بر جهت چرخش دیسک اعمال می‌شود، عملکرد سامانه بهینه است. بر اساس نتایج تجربی، در بازه سرعت دورانی ۱۵ تا ۳۵ هرتز بیشترین پاسخ الکتریکی حاصل شد، به‌طوری‌که ولتاژ خروجی بیشینه برابر با ۱.۵ ولت و توان الکتریکی خروجی حدود ۲۰ میکرووات گزارش گردید. این میزان توان امکان استفاده از سامانه پیشنهادی را برای کاربردهایی نظیر

پایش وضعیت توربین‌ها، تایرهای خودرو و سایر سامانه‌های چرخان فراهم می‌سازد.

در پژوهش نارولیا و همکارانش در سال ۲۰۲۰ [۳]، یک برداشت‌کننده انرژی پیزوالکتریک مبتنی بر مد برشی (d15) برای سامانه‌های چرخشی به‌صورت تحلیلی و عددی بررسی شد. در این سامانه، نیروی مغناطیسی دافعه بین آهنرباهای نصب‌شده بر روتور و استاتور موجب ایجاد تنش برشی متناوب در وصله‌های پیزوالکتریک شده و در نتیجه انرژی الکتریکی تولید می‌شود. نویسندگان با توسعه یک مدل الکترومکانیکی و اعتبارسنجی آن به کمک تحلیل اجزای محدود، اثر پارامترهایی مانند ابعاد پیچ پیزوالکتریک، فاصله و مشخصات آهنرباها، سرعت دورانی و مقاومت بار را بررسی کردند. نتایج نشان داد که افزایش طول و ضخامت پیچ و همچنین افزایش سرعت دورانی موجب افزایش توان خروجی می‌شود، در حالی که افزایش فاصله آهنرباها اثر کاهنده دارد. در شرایط بهینه و در سرعت ۶۰۰ دور بر دقیقه، توان الکتریکی متوسط بیشینه برابر با ۳۵۸.۶ میکرووات گزارش شد.

در پژوهش وانگ و همکارانش در سال ۲۰۲۱ [۴]، عملکرد یک برداشت‌کننده انرژی پیزوالکتریک چرخان با مقایسه تیرهای پیزوالکتریک مستطیلی و دوزنقه‌ای به‌صورت تحلیلی-تجربی بررسی شد. در این سامانه، نیروی مغناطیسی بین آهنربای نصب‌شده روی دیسک در حال چرخش و آهنربای متصل به انتهای آزاد تیر پیزوالکتریک موجب تحریک ارتعاش و تولید انرژی الکتریکی می‌شود. نتایج نشان داد که کاهش طول آزاد تیر و نزدیک‌شدن هندسه آن به شکل دوزنقه‌ای باعث افزایش کرنش در ناحیه مقید و در نتیجه افزایش ولتاژ و توان خروجی می‌شود. در بهترین حالت، تیر دوزنقه‌ای

ولتاژ خروجی ۴.۱ ولت تولید کرد که حدود ۱.۴ برابر تیر مستطیلی است. همچنین بیشینه توان خروجی برای این پیکربندی برابر ۱۵۲ میکرووات در سرعت دورانی ۱۲.۵۹ هرتز گزارش شد. این نتایج نشان می‌دهد که استفاده از تیر پیزوالکتریک دوزنقه‌ای می‌تواند کارایی برداشت انرژی برای تغذیه تجهیزات الکترونیکی کوچک را بهبود دهد.

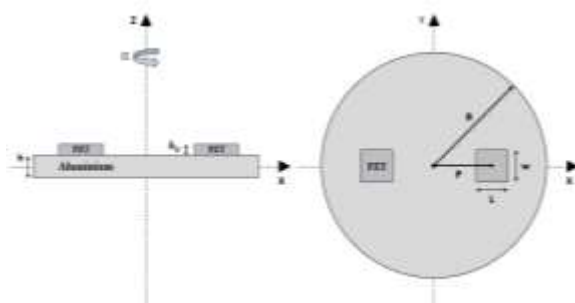
شیرازی و جعفری در سال ۲۰۲۱ [۵]، برداشت انرژی از یک دیسک صلب چرخان مجهز به دو تیر یک‌سرگیردار و لایه‌های پیزوالکتریک را بررسی کردند. در این سامانه، دو تیر دارای جرم متمرکز در انتهای آزاد بوده و به‌وسیله یک فنر به یکدیگر متصل شده‌اند و لایه‌های پیزوالکتریک نیز روی تیر بالایی قرار گرفته‌اند. معادلات کوپل‌شده مکانیکی و الکتریکی با استفاده از روابط لاگرانژ استخراج و به دو روش حل دقیق و تقریب تشدید تحلیل شد. همچنین، برای اعتبارسنجی نتایج، مدل در نرم‌افزار ANSYS شبیه‌سازی گردید. نتایج نشان داد با افزایش سرعت زاویه‌ای، فرکانس طبیعی سامانه کاهش می‌یابد، در حالی که ولتاژ و مقاومت الکتریکی بهینه ابتدا کاهش و سپس افزایش پیدا می‌کنند. همچنین توان الکتریکی بهینه ابتدا افزایش یافته و سپس کاهش می‌یابد و بیشینه آن در حدود 0.094 W و در سرعت زاویه‌ای 44 rad/s حاصل می‌شود. مقایسه نتایج تحلیلی و عددی نیز نشان داد مدل ارائه‌شده از دقت مناسبی برخوردار است.

در پژوهش چاند و تیاگی در سال ۲۰۲۳ [۶]، یک برداشت‌کننده انرژی ارتعاشی پیزوالکتریک چرخان با تیر دارای عرض نمایی متغیر به‌صورت تحلیلی، عددی و تجربی بررسی شد. معادلات حاکم با استفاده از تئوری

تیر اویلر-برنولی و اصل همیلتون استخراج و نتایج با شبیه‌سازی اجزای محدود و آزمایش‌های تجربی اعتبارسنجی گردید. نتایج نشان داد که پارامترهای هندسی مانند شیب نمایی، طول مؤثر تیر و شعاع هاب نقش مهمی در تنظیم فرکانس طبیعی و تطبیق آن با تحریک دورانی دارند. در شرایط بهینه و در فرکانس 7.97 هرتز، توان خروجی بیشینه 2.71 میلی‌وات و چگالی توان 5.27 mW/mm^3 به دست آمد که عملکرد بهتری نسبت به تیرهای مستطیلی متداول نشان می‌دهد.

در پژوهش وو و همکارانش در سال ۲۰۲۵ [۷]، یک برداشت‌کننده انرژی پیزوالکتریک چرخان مبتنی بر مکانیزم خودارتعاشی ناشی از برخورد غیرتماسی ارائه شد. در این سامانه، بدون تماس مستقیم و از طریق ایجاد اختلاف سرعت زاویه‌ای میان جزء چرخان و پین ضربه‌زن، ارتعاش تیر پیزوالکتریک تحریک شده و انرژی الکتریکی تولید می‌شود که این امر موجب کاهش سایش و تمرکز تنش می‌گردد. مدل تئوری سامانه توسعه یافته و با شبیه‌سازی در محیط Simulink و آزمایش‌های تجربی بررسی شد. نتایج نشان داد که در سرعت دورانی ۳۰۰ دور بر دقیقه، بیشینه انرژی خروجی 2.65 میلی‌ژول برای هر المان پیزوالکتریک به دست می‌آید. همچنین تحلیل وایبل نشان داد که طراحی غیرتماسی می‌تواند طول عمر سامانه را نسبت به سامانه‌های تماس محور افزایش دهد. در پژوهش شی و همکارانش در سال ۲۰۲۵ [۸]، یک برداشت‌کننده انرژی پیزوالکتریک چرخان مبتنی بر رفتار دوپایدار با چاه پتانسیل با عمق متغیر ارائه شد. در این سامانه، نیروی گریز از مرکز باعث تغییر فاصله بین آهنرباها و ایجاد چاه‌های پتانسیل قابل تنظیم

دقیق تر رفتار دینامیکی سازه در نظر گرفته شده است. این ورق حول محور z با سرعت دورانی Ω بر حسب (rad/sec) دوران می‌کند. جنس ورق آلومینیوم و جنس وصله‌های پیزوالکتریک از نوع $PZT-5H$ فرض شده است. در این مدل سازی فرض می‌شود اتصال بین ورق میزبان و وصله‌های پیزوالکتریک کاملاً صلب بوده و هیچ گونه لغزش نسبی در فصل مشترک بین آن‌ها وجود ندارد.



شکل ۱. شماتیک ورق دایره‌ای چرخان با وصله‌های پیزوالکتریک

۲-۱. فرکانس‌های طبیعی ورق دایره‌ای

در ابتدا فرکانس‌های طبیعی ورق دایره‌ای در حالت غیر چرخان بررسی می‌شود تا مبنایی برای تحلیل رفتار دینامیکی ورق در حالت چرخان فراهم گردد. رویکرد تحلیلی مورد استفاده در این بخش بر اساس چارچوب ارائه شده در کتاب «دینامیک ارتعاشات» جنتا [۹] می‌باشد. بر این اساس، فرکانس‌های طبیعی ورق دایره‌ای از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$\omega_n = \beta_f \sqrt{\frac{Eh^2}{3\rho R^4(1-\nu^2)}} \quad (1)$$

می‌شود. مدل دینامیکی با استفاده از اصل همیلتون استخراج و با نتایج تجربی اعتبارسنجی شد. نتایج نشان داد که سامانه دارای تشدید داخلی نسبت ۱:۲ در فرکانس‌های پایین و رفتار سخت‌شوندگی غیرخطی در فرکانس‌های بالاتر است. در شرایط بهینه، توان الکتریکی بیشینه ۳۳۰.۶ میکرووات و پهنای باند عملکردی در بازه ۰ تا ۱۵ هرتز به دست آمد که نسبت به برداشت‌کننده‌های دوپایدار متداول عملکرد بهتری نشان می‌دهد.

روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته یکی از روش‌های کارآمد برای حل مسائل مهندسی است که به دلیل دقت مناسب و سرعت محاسباتی بالا، در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. این روش قابلیت حل مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی را داشته و در تحلیل سازه‌های مختلف از جمله سامانه‌های دارای لایه یا وصله پیزوالکتریک به کار می‌رود. در پژوهش حاضر، ارتعاشات اجباری یک ورق دایره‌ای چرخان مجهز به وصله پیزوالکتریک با شرایط مرزی لبه آزاد بررسی می‌شود. معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده و برای حل عددی آن‌ها از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته جهت گسسته‌سازی معادلات استفاده شده است.

۲. مدل سازی ورق دایره‌ای چرخان با وصله‌های پیزوالکتریک

مطابق شکل ۱، ورق دایره‌ای به شعاع R و ضخامت h در نظر گرفته شده است که دو وصله پیزوالکتریک با طول L ، عرض w و ضخامت h_p به صورت متقارن روی آن نصب شده‌اند. استفاده از دو وصله پیزوالکتریک به دلیل بهره‌گیری از تقارن در مدل‌سازی و تحلیل

۲-۲. روابط حاکم بر ورق دایره‌ای چرخان

برای محاسبه تنش‌ها و کرنش‌های وارد بر ورق، ابتدا لازم است مؤلفه‌های جابه‌جایی در دستگاه مختصات استوانه‌ای معرفی شوند. بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول^۸، جابه‌جایی هر نقطه از ورق به صورت زیر بیان می‌شود. لازم به ذکر است که روابط ارائه‌شده دارای تقارن محوری بوده و رفتار ورق را در چارچوب یک مدل متقارن محوری توصیف می‌کنند [۱۰]:

$$u = u_r \hat{e}_r + u_z \hat{e}_z \quad (۴)$$

$$u_r(r, z, t) = u(r, t) + z \phi_r(r, t) \quad (۵)$$

$$u_z(r, z, t) = w(r, t) \quad (۶)$$

در این روابط، u ، w و ϕ_r به ترتیب بیانگر تغییر مکان سطح میانی ورق در راستای شعاعی، تغییر مکان در راستای ضخامت ورق و زاویه چرخش نرمال عرضی هستند. بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، روابط کرنش-جابجایی خطی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^{(0)} + z \varepsilon_{rr}^{(1)} = \frac{\partial u}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_r}{\partial r} \quad (۷)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} + z \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{u}{r} + z \frac{\phi_r}{r} \quad (۸)$$

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{rz}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (۹)$$

در روابط فوق، ε_{rr} ، $\varepsilon_{\theta\theta}$ و ε_{rz} به ترتیب بیانگر کرنش شعاعی، کرنش محیطی یا حلقوی و کرنش برشی می‌باشند. بر اساس قانون هوک، روابط تنش-کرنش به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{rz} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ 2\varepsilon_{rz} \end{pmatrix} \quad (۱۰)$$

در این رابطه، E مدول الاستیسیته، h ضخامت ورق، ρ چگالی ماده، R شعاع ورق دایره‌ای و ν ضریب پواسون ورق می‌باشند. ضریب β_F به شکل مود ارتعاشی وابسته است، اما به هندسه و جنس ورق وابستگی ندارد. مقادیر این ضریب برای مودهای مختلف در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱. مقدار β_F برای n تعداد گره‌های شعاعی و m تعداد گره‌های محیطی یا قطری

n	m=0	m=1	m=2	m=3
۰	۰	۱	۱.۵۳۳	۲.۰۱۲۵
۱	۱.۸۱۶۶	۲.۴۳۹۳	۲.۹۹۱۷	۳.۵۰۷۱
۲	۳.۱۴۶۴	۳.۷۶۸۳	۴.۳۴۱۷	۴.۸۸۳۶
۳	۴.۴۴۹۷	۵.۰۷۴۴	۵.۶۶۱۳	۶.۲۲۰۹

در حالتی که ورق دایره‌ای حول محور خود در حال چرخش باشد، فرکانس‌های طبیعی آن از حالت بدون چرخش انحراف پیدا کرده و دو نوع فرکانس پیشرو^۶ و پسرو^۷ ظاهر می‌شود. روابط این فرکانس‌ها به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\omega_F = m\Omega + \omega_n \quad (۲)$$

$$\omega_B = |m\Omega - \omega_n| \quad (۳)$$

در این روابط، ω_F فرکانس طبیعی پیشرو و ω_B فرکانس طبیعی پسرو هستند. همچنین Ω سرعت دورانی ورق بوده و m تعداد گره‌های محیطی مربوط به شکل مود مورد نظر را نشان می‌دهد.

در این روابط، E مدول الاستیسیته و ν ضریب پواسون مربوط به ورق همسانگرد هستند.

معادلات حاکم بر دینامیک ارتعاشات ورق دایره‌ای چرخان، با بهره‌گیری از اصل همیلتون استخراج می‌گردند. این اصل بیان می‌کند که مسیر واقعی حرکت یک سامانه دینامیکی در بازه زمانی معین، مسیری است که انتگرال زمانی اختلاف انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل کل سامانه (با در نظر گرفتن کار انجام شده توسط نیروهای خارجی) مقدار اکسترمم (حداقل یا حداکثر) را خواهد داشت. با اعمال این اصل به سامانه ورق دایره‌ای در حال دوران، و با در نظر گرفتن انرژی‌های جنبشی، کرنشی و اثرات ناشی از دوران، معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات ورق به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\delta H = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta(U_s + U_{ct}) + \delta W_l) dt = 0 \quad (11)$$

در رابطه ۱۱، ترم‌های U_s ، T و U_{ct} به ترتیب بیانگر انرژی جنبشی، انرژی کرنشی، انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای گریز از مرکز و کار نیروی خارجی هستند. سرعت هر ذره از ورق در دستگاه مختصات استوانه‌ای از دو بخش حرکت انتقالی (v_u) و حرکت چرخشی (v_Ω) تشکیل شده است. این دو مؤلفه به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$v = v_u + v_\Omega \quad (12)$$

$$v = (\dot{u}_r + \dot{u}_z) + \Omega(r + u_r) \quad (13)$$

$$v^2 = \dot{u}_r^2 + \dot{u}_z^2 + \Omega^2(r + u_r)^2 + 2\dot{u}_r\dot{u}_z + 2\Omega(r + u_r)\dot{u}_r + 2\Omega(r + u_r)\dot{u}_z \quad (14)$$

انرژی جنبشی سامانه با در نظر گرفتن مؤلفه‌های جابجایی ورق به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^R \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho v^2 r dr dz \quad (15)$$

با جایگذاری رابطه سرعت (رابطه ۱۴) در رابطه انرژی جنبشی (رابطه ۱۵)، عبارت انرژی جنبشی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^R \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho [\dot{u}_r^2 + \dot{u}_z^2 + \Omega^2(r + u_r)^2 + 2\dot{u}_r\dot{u}_z + 2\Omega(r + u_r)\dot{u}_r + 2\Omega(r + u_r)\dot{u}_z] r dr dz \quad (16)$$

چنانچه ماده ورق همگن فرض شود و خواص فیزیکی و مکانیکی آن در تمام نقاط یکنواخت باشد، با ثابت در نظر گرفتن پارامترهای مادی، عبارات زیر برای آن به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} m_0 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho dz = \rho h \\ m_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \rho dz = 0 \\ m_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho z^2 dz = \frac{\rho h^3}{12} \end{aligned} \quad (17)$$

با استفاده از روابط ۱۷ و بازنویسی رابطه ۱۶، می‌توان انرژی جنبشی را به صورت زیر بازنویسی کرد، لازم به ذکر است که در این مرحله از روابط ۵ و ۶ نیز بهره گرفته شده است:

و در آن K_s ضریب تصحیح برشی است که برابر ۰.۸۳ در نظر گرفته شده است. حال با جایگذاری روابط ۴ الی ۶ و رابطه ۲۲ در رابطه ۲۱ می‌توان رابطه مذکور را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta U_s dt = \int_0^R \int_{t_0}^{t_1} \left\{ N_{rr} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial r} \right) + N_{\theta\theta} \left(\frac{\delta u}{r} \right) + M_{rr} \frac{\partial \delta \phi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} M_{\theta\theta} \delta \phi_r + N_{rz} \left(\delta \phi_r + \frac{\partial \delta w}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} P_{r\theta} \left[\frac{\partial \delta \phi_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \delta \phi_r - \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \delta w}{\partial r} \right) \right] \right\} r dr dt \quad (23)$$

که در آن:

$$N_{rr} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{rr} dz, \quad M_{rr} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \sigma_{rr} dz, \\ N_{rz} = K_s \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{rz} dz, \quad N_{\theta\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta} dz, \quad (24) \\ M_{\theta\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \sigma_{\theta\theta} dz, \quad P_{r\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} m_{r\theta} dz$$

به‌طور مشابه، برای در نظر گرفتن اثر دوران ورق، لازم است انرژی پتانسیل ناشی از نیروی گریز از مرکز نیز در فرمول‌بندی وارد شود. در یک ورق دایره‌ای چرخان، نیروی گریز از مرکز موجب ایجاد تنش‌های اولیه درون صفحه‌ای می‌شود و این تنش‌ها به‌صورت غیرمستقیم سختی مؤثر سامانه و در نتیجه پاسخ ارتعاشی آن را تحت تأثیر قرار می‌دهند. از این‌رو، انرژی متناظر با این پدیده به‌صورت یک جمله پتانسیل هندسی در نظر گرفته شده و با انتگرال‌گیری از کار انجام‌شده توسط نیروهای گریز از مرکز در طول میدان جابه‌جایی، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^R r \{ m_0 (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + 2m_1 \dot{u} \dot{\phi}_r + m_2 \dot{\phi}_r^2 + 2m_0 \dot{u} \dot{w} + 2m_1 \dot{\phi}_r \dot{w} + \Omega^2 [m_0 (r+u)^2 + 2m_1 (r+u) \phi_r + m_2 \phi_r^2] + 2\Omega [m_0 (r+u) \dot{u} + m_1 (r+u) \dot{\phi}_r + m_1 \phi_r \dot{u} + m_2 \phi_r \dot{\phi}_r] + 2\Omega [m_0 (r+u) \dot{w} + m_1 \phi_r \dot{w}] \} dr \quad (18)$$

تغییرات انرژی جنبشی سامانه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta T = \int_0^R r \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_r} \delta \dot{\phi}_r + \frac{\partial T}{\partial \dot{w}} \delta \dot{w} + \frac{\partial T}{\partial u} \delta u + \frac{\partial T}{\partial \phi_r} \delta \phi_r \right] dr \quad (19)$$

$$\delta T = \int_0^R r \{ [m_0 \dot{u} + m_1 \dot{\phi}_r + m_0 \dot{w} + \Omega (m_0 (r+u) + m_1 \phi_r)] \delta \dot{u} + [m_1 \dot{u} + m_2 \dot{\phi}_r + m_1 \dot{w} + \Omega (m_1 (r+u) + m_2 \phi_r)] \delta \dot{\phi}_r + [m_0 \dot{w} + m_0 \dot{u} + m_1 \dot{\phi}_r + \Omega (m_0 (r+u) + m_1 \phi_r)] \delta \dot{w} + [\Omega^2 (m_0 (r+u) + m_1 \phi_r) + \Omega (m_0 \dot{u} + m_1 \dot{\phi}_r + m_0 \dot{w})] \delta u + [\Omega^2 (m_1 (r+u) + m_2 \phi_r) + \Omega (m_1 \dot{u} + m_2 \dot{\phi}_r + m_1 \dot{w})] \delta \phi_r \} dr \quad (20)$$

انرژی کرنشی ورق، که بیانگر انرژی ذخیره‌شده ناشی از تغییرشکل‌های کشسان در آن است، با در نظر گرفتن مؤلفه‌های تنش و کرنش و انجام انتگرال‌گیری بر حجم ورق، به صورت زیر قابل تعریف و محاسبه است [۱۰]:

$$U_s = \int_0^R \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\sigma_{rr} \varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + 2K_s \sigma_{rz} \varepsilon_{rz} + 2m_{r\theta} \chi_{r\theta}) r dr dz \quad (21)$$

که در آن انحنا در راستای $r\theta$ برابر است با:

$$\chi_{r\theta} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial \phi_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \phi_r - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \delta H = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^R \left\{ \left[m_0 \dot{u} + m_1 \dot{\phi}_r + m_0 \dot{w} + \right. \right. \\ \left. \Omega(m_0(r+u) + m_1 \phi_r) \right] \delta \dot{u} + \left[m_1 \dot{u} + \right. \\ \left. m_2 \dot{\phi}_r + m_1 \dot{w} + \Omega(m_1(r+u) + \right. \\ \left. m_2 \phi_r) \right] \delta \dot{\phi}_r + \left[m_0 \dot{w} + m_0 \dot{u} + m_1 \dot{\phi}_r + \right. \\ \left. \Omega(m_0(r+u) + m_1 \phi_r) \right] \delta \dot{w} + \left[\Omega^2(m_0(r+ \right. \\ \left. u) + m_1 \phi_r) + \Omega(m_0 \dot{u} + m_1 \dot{\phi}_r + m_0 \dot{w}) \right] \delta u + \\ \left[\Omega^2(m_1(r+u) + m_2 \phi_r) + \Omega(m_1 \dot{u} + \right. \\ \left. m_2 \dot{\phi}_r + m_1 \dot{w}) \right] \delta \phi_r \left. \right\} + q \delta w - N_{rr} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial r} \right) - \\ N_{\theta\theta} \left(\frac{\delta u}{r} \right) - M_{rr} \frac{\partial \delta \phi_r}{\partial r} - \frac{1}{r} M_{\theta\theta} \delta \phi_r - \\ N_{rz} \left(\delta \phi_r + \frac{\partial \delta w}{\partial r} \right) - \frac{1}{2} P_{r\theta} \left[\frac{\partial \delta \phi_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \delta \phi_r - \right. \\ \left. \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \delta w}{\partial r} \right) \right] - \frac{\rho_s \Omega^2}{3r} (R^3 - \\ r^3) \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial \delta w}{\partial r} \left. \right\} r dr dt = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

با اعمال رابطه ۲۹ مبتنی بر اصل همیلتون و در نظر گرفتن مختصات تعمیم‌یافته مربوط به مؤلفه‌های جابه‌جایی، می‌توان با استفاده از معادلات اویلر-لاگرانژ، معادلات حرکت حاکم بر ارتعاشات ورق دایره‌ای چرخان را استخراج کرد. در این چارچوب، با توجه به وجود سه میدان جابه‌جایی مستقل در تئوری مورد استفاده، سه معادله اویلر-لاگرانژ متناظر به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$m_0 \ddot{u} + \Omega(m_0 \dot{w} + m_1 \dot{\phi}_r + m_0 \dot{u}) + \Omega^2(m_0(r+u) + m_1 \phi_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial(r N_{rr})}{\partial r} + \frac{N_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (30)$$

$$m_1 \ddot{u} + m_2 \ddot{\phi}_r + m_1 \ddot{w} + \Omega(m_1 \dot{u} + m_2 \dot{\phi}_r + m_1 \dot{w}) + \Omega^2(m_1(r+u) + m_2 \phi_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial(r M_{rr})}{\partial r} + \frac{M_{\theta\theta}}{r} - N_{rz} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r P_{r\theta})}{\partial r} + \frac{P_{r\theta}}{r} = 0 \quad (31)$$

$$U_{ct} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R N'_{rr} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 r dr d\theta = \pi \int_0^R N'_{rr} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 r dr \quad (25)$$

$$\delta U_{ct} = \pi \int_0^R N'_{rr} \delta \left[\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] r dr = 2\pi \int_0^R N'_{rr} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial \delta w}{\partial r} r dr \quad (26)$$

که در آن :

$$N'_{rr} = \frac{\rho_s \Omega^2}{r} \int_r^R s^2 ds = \frac{\rho_s \Omega^2}{3r} (R^3 - r^3) \quad (27)$$

در آن ρ_s جرم واحد سطح مقطع ورق هست و Ω سرعت دورانی ورق است.

کار نیروی خارجی منتجه از بار گسترده‌ی خارجی $q(t)$ ، که در راستای ضخامت ورق اعمال می‌شود، با در نظر گرفتن جابه‌جایی عرضی ورق و انجام انتگرال‌گیری بر سطح آن، به صورت زیر قابل بیان است:

$$W_l = \int_0^R q(t) w r dr, q(t) = q_0 \sin(2\pi f t) \quad (28)$$

در رابطه فوق، q_0 دامنه نیروی خارجی اعمال شده به سامانه بوده و f فرکانس تحریک نیروی خارجی را نشان می‌دهد. قابل ذکر است که در صورتی که ورق تحت بار خارجی قرار نگیرد، یا به عبارت دیگر ارتعاشات آن از نوع اجباری نباشد، این ترم برابر با صفر خواهد بود. با جایگذاری روابط بیان شده در اصل همیلتون (رابطه ۱۱) رابطه زیر برای استخراج معادلات حاکم به دست می‌آید:

اینکه در مواد همسانگرد مقادیر B_{rr} و m_1 برابر صفر هستند و در این مسئله نیز تنش‌های کوپل شده وجود ندارند ($S_{r\theta} = 0$)، سه معادله نهایی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$m_0 \ddot{u} + \Omega(m_0 \dot{w} + m_0 \dot{u}) + \Omega^2 m_0 (r + u) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r A_{rr} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{u}{r} \right] \right\} + \left\{ \frac{A_{rr}}{r} \left[\frac{u}{r} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right] \right\} = 0 \quad (40)$$

$$m_2 \ddot{\phi}_r + \Omega m_2 \dot{\phi}_r + \Omega^2 m_2 \phi_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r D_{rr} \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{v}{r} \phi_r \right) \right] + \frac{D_{rr}}{r} \left(v \frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{\phi_r}{r} \right) - S_{rz} \left(\phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0 \quad (41)$$

$$m_0 \ddot{w} + m_0 \ddot{u} + \Omega m_0 (r + u) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r S_{rz} \left(\phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] + q - \frac{\rho_s \Omega^2}{3r} (R^3 - r^3) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0 \quad (42)$$

۲-۳. شرایط مرزی

در این مسئله، ورق دایره‌ای چرخان در شعاع $r = R$ دارای لبه آزاد است. در لبه آزاد هیچ‌گونه تکیه‌گاه یا قید مکانیکی برای انتقال لنگر خمشی و نیروی برشی وجود ندارد. بنابراین، شرط مرزی آزاد به این معناست که گشتاور خمشی در راستای شعاعی و همچنین نیروی برشی مؤثر شعاعی در لبه ورق باید صفر باشند. از این‌رو، در $r = R$ شرایط مرزی به صورت صفر بودن M_{rr} و N_{rr} اعمال می‌شود تا عدم وجود گشتاور خمشی و نیروی برشی در مرز آزاد به طور دقیق در مدل لحاظ گردد. نتایج حل عددی نشان می‌دهد که شرایط مرزی آزاد در فرآیند حل به خوبی ارضا شده‌اند. همچنین، رفتار پاسخ به دست آمده از نظر فیزیکی و ریاضی با انتظار نظری سازگار است و پیوستگی و

$$m_0 \ddot{w} + m_0 \ddot{u} + m_1 \ddot{\phi}_r + \Omega(m_0 (r + u) + m_1 \phi_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial (r N_{rz})}{\partial r} + q - \frac{\rho_s \Omega^2}{3r} (R^3 - r^3) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0 \quad (32)$$

منتجه‌های نیرو و گشتاور را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$N_{rr} = A_{rr} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{u}{r} \right] + B_{rr} \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{v}{r} \phi_r \right) \quad (33)$$

$$N_{\theta\theta} = A_{rr} \left[\frac{u}{r} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right] + B_{rr} \left(v \frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \phi_r \right) \quad (34)$$

$$M_{rr} = B_{rr} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{u}{r} \right] + D_{rr} \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{v}{r} \phi_r \right) \quad (35)$$

$$M_{\theta\theta} = B_{rr} \left[\frac{u}{r} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right] + D_{rr} \left(v \frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \phi_r \right) \quad (36)$$

$$N_{rz} = S_{rz} \left(\phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (37)$$

$$P_{r\theta} = \frac{1}{2} S_{r\theta} \left[\frac{\partial \phi_r}{\partial r} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \left(\phi_r - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \quad (38)$$

که در آن :

$$\begin{aligned} A_{rr} &= \frac{1}{(1-v^2)} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E dz = \frac{Eh}{(1-v^2)}, \\ B_{rr} &= \frac{1}{(1-v^2)} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E z dz, \\ D_{rr} &= \frac{1}{(1-v^2)} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)}, \\ S_{rz} &= \frac{1}{2(1+v)} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E dz = \frac{Eh}{2(1+v)}, \\ S_{r\theta} &= \frac{l^2}{2(1+v)} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E dz = \frac{Ehl^2}{2(1+v)} \end{aligned} \quad (39)$$

می‌توان با جایگذاری روابط ۳۳ الی ۳۹، روابط ۳۰ الی ۳۲ را به صورت زیر بازنویسی کرد. همچنین با توجه به

که در آن $[C]$ ماتریس سفتی کشسان بر حسب $\left(\frac{N}{m^2}\right)$ ، $[\epsilon]$ ماتریس ضرایب دی الکتریک بر حسب $\left(\frac{F}{m}\right)$ و $[e]$ ماتریس ثوابت پیزوالکتریک با واحد $\left(\frac{C}{m^2}\right)$ مختص مواد پیزوالکتریک می باشند. علاوه بر آن $\{\epsilon^p\}$ ، $\{E^p\}$ ، $\{\sigma^p\}$ و $\{D^p\}$ به ترتیب بردارهای کرنش، میدان الکتریکی، تنش و جابه جایی الکتریکی برای ماده پیزوالکتریک می باشند. روابط ۴۵ و ۴۶ در فضای سه بعدی در مختصات قطبی به صورت زیر می باشند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix}^p = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix}^p + \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{24} & 0 & 0 \\ 0 & e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{Bmatrix}^p \quad (47)$$

$$\begin{Bmatrix} D_r \\ D_\theta \\ D_z \end{Bmatrix}^p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix}^p + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{Bmatrix}^p \quad (48)$$

از آنجا که در نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول، تنش در راستای ضخامت ورق برابر صفر در نظر گرفته

پایداری مناسب میدان حل مشاهده می شود. این امر بیانگر دقت قابل قبول روش عددی به کاررفته در اعمال شرایط مرزی و تقریب پاسخ مسئله است. علاوه بر این، در مرکز ورق به دلیل وجود اتصال یا مهار مرکزی، ورق به صورت گیردار در نظر گرفته می شود. در نتیجه، در ناحیه مرکزی جابه جایی ها محدود بوده و مؤلفه های جابه جایی و همچنین دوران برابر صفر فرض می شوند. این قیود در مرکز ورق به عنوان شرایط مرزی هندسی اعمال می شوند تا رفتار واقعی مهار مرکزی در مدل ارتعاشی به درستی منعکس شود. بر این اساس، شرایط مرزی حاکم بر ورق دایره ای چرخان را می توان به صورت روابط ریاضی زیر بیان کرد [۱۱]:

$$@ r = R : M_{rr} = 0, N_{rr} = 0 \quad (43)$$

$$@ r = 0 : u = 0, w = 0, \phi_r = 0 \quad (44)$$

۲-۴. روابط حاکم بر وصله های پیزوالکتریک

روابط حاکم بر ورق پیزوالکتریک مشابه روابط استخراج شده در بخش قبل در نظر گرفته می شوند. با این حال، در این بخش تمرکز اصلی بر بیان روابط حاکم بر وصله پیزوالکتریک است. در ادامه، با در نظر گرفتن کوپلینگ الکترومکانیکی، معادلات حاکم بر سامانه شامل ورق و وصله پیزوالکتریک به صورت یکپارچه استخراج می شوند. در این راستا، روابط تنش و جابه جایی الکتریکی برای مواد پیزوالکتریک به صورت زیر تعریف می شوند [۱۲]:

$$\{\sigma^p\} = [C]\{\epsilon^p\} - [e]\{E^p\} \quad (45)$$

$$\{D^p\} = [e]^T\{\epsilon^p\} + [\epsilon]\{E^p\} \quad (46)$$

می‌شود، با قرار دادن $\sigma_z^p = 0$ روابط ۴۷ و ۴۸ به صورت زیر ساده‌سازی می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix}^p = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{C}_{12} & \overline{C}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{C}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{C}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix}^p - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \overline{e}_{31} \\ 0 & 0 & \overline{e}_{32} \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{24} & 0 & 0 \\ 0 & e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{Bmatrix}^p \quad (49)$$

$$\begin{Bmatrix} D_r \\ D_\theta \\ D_z \end{Bmatrix}^p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ \overline{e}_{31} & \overline{e}_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix}^p + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{Bmatrix}^p \quad (50)$$

که در روابط ۴۹ و ۵۰ ثابت کاهیده به صورت زیر قابل تعریف می‌باشد:

$$\begin{aligned} \overline{C}_{11} &= C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, \quad \overline{C}_{22} = C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}, \\ \overline{C}_{12} &= C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}, \quad \overline{C}_{33} = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{33}}, \\ \overline{e}_{31} &= e_{31} - \frac{e_{33}C_{13}}{C_{33}}; \quad \overline{e}_{32} = e_{32} - \frac{e_{33}C_{23}}{C_{33}}, \\ \overline{\varepsilon}_{33} &= \varepsilon_{33} + \frac{e_{33}^2}{C_{33}} \end{aligned} \quad (51)$$

اگر تابع توزیع پتانسیل الکتریکی در ماده پیزوالکتریک به صورت $\phi(r, z, t)$ در نظر گرفته شود، میدان الکتریکی ایجادشده در ماده پیزوالکتریک از گرادینان

منفی پتانسیل الکتریکی به دست می‌آید. بر این اساس، مؤلفه‌های میدان الکتریکی در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0, E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (52)$$

مواد پیزوالکتریک می‌توانند در نقش حسگر یا عملگر مورد استفاده قرار گیرند. در حالت عملگری، پتانسیل الکتریکی در سطح پایینی وصله پیزوالکتریک که به ورق متصل است صفر در نظر گرفته شده و در سطح بالایی اختلاف پتانسیل مشخصی اعمال می‌شود که به آن حالت مدار بسته یا اتصال کوتاه گفته می‌شود. در حالت حسگری، سطح پایینی فاقد پتانسیل الکتریکی بوده و در سطح بالایی مؤلفه جابه‌جایی الکتریکی در راستای ضخامت برابر صفر فرض می‌شود که این وضعیت به عنوان حالت مدار باز شناخته می‌شود. برای تعیین ناحیه قرارگیری وصله پیزوالکتریک نیز از تابع هوپساید استفاده می‌شود، به گونه‌ای که مقدار آن در ناحیه پیزوالکتریک برابر یک و در سایر نواحی برابر صفر در نظر گرفته می‌شود [۱۳]:

$$\begin{aligned} \Gamma(r) &= H(r - r_1) - H(r - r_2) \\ H(x) &= \begin{cases} 0; & x < 0 \\ 1; & x \geq 0 \end{cases} \quad (53) \\ r_1 &= p - \frac{l}{2}, r_2 = p + \frac{l}{2} \end{aligned}$$

در رابطه ۵۳، مقادیر r_1 و r_2 به ترتیب بیانگر موقعیت‌های شعاعی وصله پیزوالکتریک بر روی ورق هستند. شرایط مربوط به هر دو حالت مدار باز و مدار

$$M_{\theta\theta} = B_{rr} \left[\frac{u}{r} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right] + D_{rr} \left(v \frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \phi_r \right) + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \overline{e_{32}} \frac{\partial \phi}{\partial z} z dz \quad (57)$$

$$N_{rr} = A_{rr} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{u}{r} \right] + B_{rr} \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{v}{r} \phi_r \right) + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \overline{e_{31}} \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \quad (58)$$

$$N_{\theta\theta} = A_{rr} \left[\frac{u}{r} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right] + B_{rr} \left(v \frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \phi_r \right) + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \overline{e_{32}} \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \quad (59)$$

علاوه بر موارد فوق، وجود وصله پیزوالکتریک بر ترم‌های لختی جرمی و همچنین نیروهای گریز از مرکز سامانه تأثیرگذار است. با در نظر گرفتن سهم جرمی وصله پیزوالکتریک، ترم‌های لختی جرمی سامانه اصلاح شده و روابط متناظر برای این ترم‌ها به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \bar{I}_0 &= \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \rho_{Piezo} dz, \quad \bar{I}_1 = 0, \\ \bar{I}_2 &= \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \rho_{Piezo} z^2 dz, \quad (60) \\ I_i^{System} &= I_i^{Plate} + I_i^{Piezo} \Gamma(r); \quad i = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

در این سامانه، ماده پیزوالکتریک تنها در راستای ضخامت قطبیده شده و بنابراین، توزیع پتانسیل الکتریکی فقط تابع مختصه ضخامت z در نظر گرفته می‌شود. در حالت مدار بسته، پتانسیل الکتریکی در سطح تماس ورق و زیرلایه پیزوالکتریک صفر است. ولتاژ اعمال‌شده یا اندازه‌گیری‌شده بر روی سطح خارجی وصله نیز به‌عنوان سیگنال خروجی حسگر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

بسته، همچنین توزیع پتانسیل الکتریکی در وصله پیزوالکتریک، به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۴]:

مدار بسته :

$$\begin{aligned} \phi(r, z, t) &= \left[1 - \left(\frac{z - \frac{h}{2} - \frac{h_p}{2}}{\frac{h_p}{2}} \right)^2 \right] \phi(r, t) \Gamma(r) \\ @ z = \frac{h}{2}, \frac{h}{2} + h_p; \quad \phi &= 0 \quad (54) \end{aligned}$$

مدار باز :

$$\begin{aligned} \phi(r, z, t) &= \left\{ \left[1 - \left(\frac{z - \frac{h}{2} - \frac{h_p}{2}}{\frac{h_p}{2}} \right)^2 + \frac{2}{h_p} (2z - h) \right] \phi(r, t) + \frac{z - \frac{h}{2}}{\epsilon_{33}} \left[e_{31} \frac{\partial u}{\partial r} + e_{32} \frac{u}{r} + \left(\frac{h}{2} + h_p \right) \left(e_{31} \frac{\partial \phi_r}{\partial r} + e_{32} \frac{\phi_r}{r} \right) \right] \right\} \Gamma(r) \\ @ z = \frac{h}{2}: \phi &= 0, @ z = \frac{h}{2} + h_p: D_z = 0 \quad (55) \end{aligned}$$

روابط مربوط به نیروها و گشتاورهای منتجه وارد بر ورق در روابط ۳۳ الی ۳۶ ارائه شده‌اند. برای در نظر گرفتن اثر وصله پیزوالکتریک، لازم است ترم‌های متناظر با پیزوالکتریک نیز به این معادلات افزوده شوند. این ترم‌ها از طریق انتگرال‌گیری روی ضخامت وصله پیزوالکتریک، یعنی در بازه $(h/2, h/2 + h_p)$ ، به دست می‌آیند. بر این اساس، منتجه‌های نیرو و گشتاور ناشی از پیزوالکتریک در حالت کلی به صورت زیر قابل محاسبه هستند:

$$\begin{aligned} M_{rr} &= B_{rr} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{u}{r} \right] + D_{rr} \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{v}{r} \phi_r \right) + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \overline{e_{31}} \frac{\partial \phi}{\partial z} z dz \quad (56) \end{aligned}$$

برداشت انرژی نقش اساسی دارد. فرم نهایی این معادله به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\left\{ -\frac{d}{dt} \left(\iint \left[\overline{e_{31}} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_r}{\partial r} \right) + \overline{e_{32}} \left(\frac{u}{r} + z \frac{\phi_r}{r} \right) \right] dA \right) + C_p \dot{V}(t) + \frac{\bar{V}(t)}{R} \right\} \Gamma(r) = 0 \quad (63)$$

اگر مساحت ورق پیزوالکتریک به صورت مناسبی تقریب زده شود و حدود انتگرال گیری نیز مطابق ناحیه تحت پوشش وصله پیزوالکتریک انتخاب گردد، با اعمال این فرضیات می‌توان رابطه موردنظر را همراه با حدود انتگرالی متناظر به شکل زیر بیان کرد:

$$\left\{ -\frac{d}{dt} \left(2\theta_p \int_{p-\frac{l}{2}}^{p+\frac{l}{2}} \left[\overline{e_{31}} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_r}{\partial r} \right) + \overline{e_{32}} \left(\frac{u}{r} + z \frac{\phi_r}{r} \right) \right] r dr \right) + C_p \dot{V}(t) + \frac{\bar{V}(t)}{R} \right\} \Gamma(r) = 0 \quad (64)$$

که در آن:

$$\theta_p = \tan^{-1} \left(\frac{w}{2p-l} \right) \quad (65)$$

در این رابطه، R بیانگر مقاومت بار و C_p نشان‌دهنده ظرفیت الکتریکی معادل پیزوالکتریک است. این ظرفیت با توجه به مشخصات هندسی و خواص دی‌الکتریک ماده، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_p = \frac{\overline{\epsilon_{33}} A_p}{h_p} = \frac{\overline{\epsilon_{33}}(wl)}{h_p} \quad (66)$$

$$\begin{cases} @ z = \frac{h}{2} ; \phi = 0 \\ @ z = \frac{h}{2} + h_p ; \phi = \bar{V}(t) \end{cases} \quad \phi(r, z, t) = \left[\frac{\bar{V}(t)}{h_p} \left(z - \frac{h}{2} \right) \right] \Gamma(r) \quad (61)$$

در این معادلات، $\bar{V}(t)$ نشان‌دهنده ولتاژ خروجی سامانه است. با جایگذاری رابطه ولتاژ در معادلات نیرو و گشتاور، نتیجه‌های نیروی خالص و گشتاور مؤثر استخراج شده و سپس با وارد کردن این نتیجه‌ها به سه معادله حرکت، رفتار دینامیکی کامل سامانه قابل استخراج و بررسی خواهد بود.

برای استخراج معادله برداشت انرژی، از قوانین بنیادی الکتریسیته شامل قانون اهم و قانون شار گوس استفاده می‌شود. طبق این قوانین، بین مؤلفه جابه‌جایی الکتریکی در راستای ضخامت ورق و کمیت‌هایی مانند جریان و ولتاژ خروجی رابطه‌ای فیزیکی برقرار است. این رابطه بیانگر اندرکنش میان میدان الکتریکی و پاسخ الکتریکی سامانه بوده و مبنای تحلیل عملکرد برداشت انرژی در وصله پیزوالکتریک محسوب می‌شود. این ارتباط به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$I(t) = \frac{\bar{V}(t)}{R} = \frac{d}{dt} (\iint D_z dA) \quad (62)$$

با جایگذاری مؤلفه جابه‌جایی الکتریکی D_z از رابطه ۵۰ در رابطه ۶۲، و با در نظر گرفتن روابط حاکم بر مدار الکتریکی، معادله دیفرانسیل-انتگرالی حاکم بر مدار برداشت انرژی استخراج می‌شود. این معادله نشان‌دهنده‌ی کوپلینگ میان پاسخ مکانیکی ورق و رفتار الکتریکی مدار بوده و در تحلیل عملکرد سامانه

۳. روش حل عددی

روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته^۹ یکی از روش های عددی کارآمد و دقیق برای حل مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی در مهندسی است. این روش به دلیل دقت مناسب، همگرایی سریع و کاهش حجم محاسبات، به عنوان جایگزینی مناسب برای برخی روش های عددی کلاسیک مانند المان محدود و تفاضل محدود، به ویژه در مسائلی با دامنه محاسباتی محدود و معادلات دیفرانسیل با مراتب بالا، مورد استفاده قرار می گیرد.

در این روش، دامنه مسئله به مجموعه ای از گره های گسسته تقسیم می شود و مشتق تابع در هر گره نسبت به یک راستای مشخص، به صورت ترکیبی خطی از مقادیر تابع در تمامی گره ها تقریب زده می شود. ضرایب این ترکیب تنها به موقعیت گره ها وابسته بوده و به عنوان ضرایب وزن در فرآیند مشتق گیری عمل می کنند.

برای تشریح این روش، تابع $W = W(r)$ در یک ناحیه خطی تعریف می شود. اگر تعداد گره ها در راستای r برابر n باشد، مشتق مرتبه m این تابع نسبت به r در نقطه r_i به صورت ترکیب خطی وزن دار از مقادیر تابع در گره های شبکه بیان می شود که به صورت زیر قابل نوشتن است [۱۵]:

$$\frac{\partial^m W}{\partial x^m}(r_i) = \sum_{j=1}^m E_{ij}^{(m)} W_j ; i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (67)$$

در روش مربعات تفاضلی، ضرایب های وزنی E_{ij} و نحوه ی توزیع نقاط شبکه نقش مهمی در دقت و پایداری محاسبات دارند. ضرایب های مرتبه ی اول در هر

راستا با استفاده از توابع لاگرانژ تعیین می شوند و ضرایب مربوط به مشتقات مرتبه های بالاتر از روابط بازگشتی استخراج می گردند. برای افزایش دقت و تمرکز نقاط در نواحی مرزی دامنه، از توزیع چبیشف-گوس-لوباتو (رابطه ۷۰) بهره گرفته می شود که موجب بهبود پاسخ عددی و دقت کلی روش می شود. بر این پایه، روابط محاسبه ی ضرایب وزنی E_{ij} مطابق رابطه ی زیر ارائه می گردد.

$$E_{ij}^1 = \begin{cases} \frac{M^1(r_i)}{(r_i - r_j)M^1(r_j)} ; i \neq j \\ -\sum_{j=1}^m E_{ij}^1 ; i = j \end{cases}, i, j = 1, 2, \dots, n \quad (68)$$

$$E_{ij}^m = \begin{cases} m \left[E_{ij}^1 E_{ij}^{m-1} - \frac{E_{ij}^{m-1}}{r_i - r_j} \right] ; i \neq j \\ -\sum_{j=1}^m E_{ij}^m ; i = j \end{cases} ;$$

$$m \geq 2, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (69)$$

$$r_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{n-1} \pi \right) \right] ; i = 1, 2, \dots, n \quad (70)$$

در روش مربعات انتگرالی تعمیم یافته^{۱۰}، همانند مشتق گیری، انتگرال گیری نیز به صورت یک تقریب عددی مبتنی بر جمع وزن دار انجام می شود. در این روش، مقدار انتگرال تابع در یک بازه با استفاده از مقادیر تابع در نقاط شبکه و ضرایب وزنی انتگرال تقریب زده می شود. اگر $\psi = \psi(x, y)$ یک تابع دوبعدی باشد؛ در این صورت، انتگرال گیری در راستای x به صورت زیر بیان می شود [۱۶]:

$$\int_{x_p}^{x_q} \psi(x, y_j) dx = \sum_{k=1}^{N_x} a_{xk}^{pq} \psi(x_k, y_j), a_{xk}^{pq} = W_{qk}^I - W_{pk}^I \quad (71)$$

که در آن W^I از رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} u_0(r, t) &= U(r)e^{i\omega t}, q(r, t) = Q(r)e^{i\omega t} \\ w_0(r, t) &= W(r)e^{i\omega t}, \phi_r(r, t) = \Phi_r(r)e^{i\omega t}, \\ \bar{\phi}(r, t) &= \bar{\Phi}(r)e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (74)$$

در این روابط، ω فرکانس زاویه‌ای ارتعاش سامانه بوده و توابع مکانی بیانگر شکل مودهای ارتعاشی هستند. به منظور تشکیل ماتریس‌های جرم و سختی و در نهایت محاسبه مقادیر ویژه متناظر با فرکانس‌های طبیعی سامانه، دامنه محاسباتی به دو بخش تقسیم می‌شود. بخش نخست شامل درجات آزادی گره‌های مرزی است که با اندیس b مشخص شده و مقادیر آن‌ها بر اساس شرایط مرزی تعیین یا حذف می‌شوند. بخش دوم مربوط به درجات آزادی گره‌های داخلی دامنه بوده که با اندیس d نمایش داده شده و به عنوان مجهولات اصلی مسئله در نظر گرفته می‌شوند.

لازم به ذکر است که در معادلات برداشت انرژی، ولتاژ تابعی از مختصه r نبوده و بنابراین روش مربعات دیفرانسیلی برای آن اعمال نمی‌شود. بر این اساس، بردار درجات آزادی مرزی و داخلی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \{b\} &= \{U_b \ W_b \ \phi_{rb}\}^T, \\ \{d\} &= \{U_d \ W_d \ \phi_{rd} \ \bar{\Phi}\}^T \end{aligned} \quad (75)$$

این تفکیک امکان اعمال صحیح شرایط مرزی و کاهش ابعاد سامانه معادلات را فراهم کرده و زمینه استخراج معادله مقدار ویژه سامانه کوپل شده را مهیا می‌سازد. پس از گسسته‌سازی معادلات حاکم و تفکیک درجات آزادی مرزی و داخلی، معادلات حرکت در قالب یک

$$W^I = (AX)^{-1}, \begin{cases} AX_{ij} = \frac{x_i - c}{x_j - c} H_{xij}^{(1)}; & i \neq j \\ AX_{ii} = H_{xii}^{(1)} + \frac{1}{x_i - c}; & i = j \end{cases} \quad (72)$$

در روابط فوق، ضرایب وزنی انتگرال بر اساس وزنی مشتق مرتبه اول در روش مربعات دیفرانسیلی محاسبه می‌شوند. به همین صورت، ضرایب انتگرال‌گیری نسبت به y نیز قابل استخراج است. در نهایت، انتگرال‌گیری دوبعدی روی دامنه $[x_{p1}, x_{q1}] \times [y_{p2}, y_{q2}]$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{x_{p1}}^{x_{q1}} \int_{y_{p2}}^{y_{q2}} \psi(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^{N_x} a_{xk}^{p1q1} \sum_{l=1}^{N_y} a_{yl}^{p2q2} \psi(x_k, y_l) \quad (73)$$

به منظور گسسته‌سازی معادلات حاکم و به‌کارگیری روش‌های عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته و مربعات انتگرالی تعمیم‌یافته، ابتدا ترم‌های وابسته به زمان از معادلات حذف می‌شوند. برای این منظور، پاسخ سامانه با استفاده از روش جدایی متغیرها به صورت حاصل ضرب توابع مکانی r و یک تابع هارمونیک زمانی در نظر گرفته می‌شود. با جایگذاری این روابط در معادلات حاکم، مشتقات زمانی حذف شده و معادلات تنها بر حسب مختصات مکانی بازنویسی می‌شوند. این فرآیند امکان استخراج روابط لازم برای تحلیل برداشت انرژی را فراهم می‌کند. بر این اساس، توابع جابه‌جایی، نیرو و کمیت‌های الکتریکی به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۷]:

$$(K_{dd} - K_{db}K_{bb}^{-1}K_{bd} + M_{centrifugal\ dd} + i\omega C_{coriolis\ dd} - \omega^2 M_{inertia\ dd})\{d\} = \{Q_d\} - K_{db}K_{bb}^{-1}\{Q_b\} \quad (79)$$

این معادله مبنای اصلی تحلیل ارتعاشی و استخراج فرکانس‌های طبیعی سامانه بوده و در بررسی رفتار دینامیکی ورق چرخان و سامانه برداشت انرژی نقش اساسی دارد [۱۸].

به دلیل استفاده از توزیع نقاط چبیشف-گوس-لوباتو و غیر یکنواخت بودن فاصله گره‌ها، به کارگیری تابع دلتا برای تعیین دقیق محل وصله در دامنه محاسباتی با محدودیت مواجه می‌شود. در چنین شرایطی، تقریب مستقیم تابع دلتا در چارچوب روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته دقت کافی نداشته و پیاده‌سازی آن نیز دشوار است. از این رو، به جای تابع دلتا از یک تقریب هموار استفاده می‌شود تا ضمن حفظ خاصیت موضعی بودن، امکان اعمال آن در شبکه‌های غیر یکنواخت نیز فراهم گردد [۱۹].

با توجه به اینکه هندسه مسئله یک ورق دایره‌ای بوده و روابط در دستگاه مختصات قطبی (r, θ) بیان می‌شوند، تابع دلتا در راستای شعاعی را می‌توان با استفاده از یک تابع گاوسی هموار شده تقریب زد:

$$\delta(r - r_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} \exp\left(-\frac{(r-r_1)^2}{4n}\right), n > 0 \quad (80)$$

در این رابطه، r_1 مکان شعاعی مورد نظر (برای مثال مرز یا مرکز وصله پیزوالکتریک) و n پارامتر هموارسازی است. با کاهش n ، تابع به دلتا ایده‌آل نزدیک‌تر می‌شود.

فرم ماتریسی بیان می‌شوند. این فرم ماتریسی شامل اثرات سختی، لختی، نیروهای گریز از مرکز و ترم‌های کوریولیس بوده و کوپلینگ میان درجات آزادی مرزی و داخلی را در بر می‌گیرد. در نتیجه، معادله ماتریسی اصلی سامانه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[K_{db} \quad K_{dd} + M_{centrifugal\ dd}] \begin{Bmatrix} b \\ d \end{Bmatrix} + i\omega [0_{db} \quad C_{coriolis\ dd}] \begin{Bmatrix} b \\ d \end{Bmatrix} - \omega^2 [0_{db} \quad M_{inertia\ dd}] \begin{Bmatrix} b \\ d \end{Bmatrix} = \{Q_d\} \quad (76)$$

همچنین رابطه مربوط به نیروی گسترده خارجی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_{bb}\{b\} + K_{bd}\{d\} = \{Q_b\} \quad (77)$$

در روابط فوق، Q بیانگر نیروی گسترده خارجی اعمال‌شده به سامانه است. با استفاده از رابطه ۷۷، می‌توان رابطه‌ای میان درجات آزادی مرزی و داخلی استخراج کرده و بردار درجات آزادی مرزی را بر حسب درجات آزادی داخلی بیان کرد. این رابطه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\{b\} = K_{bb}^{-1}(\{Q_b\} - K_{bd}\{d\}) \quad (78)$$

با جایگذاری رابطه ۷۸ در معادله ۷۶، اثر درجات آزادی مرزی حذف شده و معادله فرکانسی نهایی تنها بر حسب درجات آزادی داخلی به دست می‌آید. در نتیجه، معادله مقدار ویژه سامانه کوپل‌شده به صورت زیر بیان می‌شود:

جدول ۲. مشخصات مکانیکی ورق دایره‌ای

ماده	چگالی ρ	مدول یانگ E	ضریب پواسون ν
	kg/m^3	GPa	-
آلومینیوم	۲۷۰۰	۶۹	۰.۳۳

مشخصات هندسی ورق دایره‌ای و وصله‌های پیزوالکتریک برای مواردی که در متن به‌طور مستقیم به آن‌ها اشاره نشده است، مطابق با مقادیر ارائه شده در جدول ۳ در نظر گرفته شده‌اند. این پارامترها مبنای اصلی مدل‌سازی در تحلیل‌های عددی حاضر هستند.

جدول ۳. مشخصات هندسی سامانه

نام کمیت	نماد	واحد	مقدار
شعاع ورق	R	mm	۱۰۰
ضخامت ورق	h	mm	۵
طول پیزوالکتریک	L	mm	۲۰
عرض پیزوالکتریک	w	mm	۲۰
ضخامت پیزوالکتریک	h_p	mm	۲
موقعیت شعاعی مرکز پیزوالکتریک	P	mm	۶۰

خواص مکانیکی - الکتریکی وصله پیزوالکتریک از نوع PZT-5H بر اساس مقادیر مرجع استاندارد در نظر گرفته شده‌اند. ماتریس سختی کشسان این ماده در حالت کرنش ثابت به صورت زیر تعریف می‌شود:

در حالی که با افزایش n ، پهنای تابع بیشتر شده و توزیع آن هموارتر خواهد شد. برای گسسته‌سازی زمانی و حل پاسخ گذرای سامانه، از روش نیومارک استفاده شده است. این روش یکی از شناخته‌شده‌ترین و پایدارترین روش‌ها در تحلیل مسائل دینامیکی به شمار می‌رود و با استفاده از ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی، امکان محاسبه‌ی پاسخ زمان‌مند سازه را با دقت مناسب فراهم می‌سازد. از مزیت‌های مهم روش نیومارک، قابلیت اجرای ساده‌ی گام‌های زمانی، پایداری مناسب در تحلیل گذرا و توانایی آن در محاسبه هم‌زمان جابه‌جایی، سرعت و شتاب در هر گام زمانی است. این ویژگی‌ها سبب می‌شود که این روش برای تحلیل دینامیکی ورق چرخان و بررسی رفتار زمانی سامانه‌ی برداشت انرژی انتخابی مناسب و قابل اعتماد باشد [۲۰].

۴. نتایج عددی

۴-۱. مشخصات ورق و وصله

جنس ورق اصلی از آلومینیوم و وصله پیزوالکتریک از نوع PZT-5H در نظر گرفته شده است. خواص مکانیکی ورق آلومینیومی شامل چگالی، مدول الاستیسیته و ضریب پواسون است که مقادیر آن‌ها در جدول ۲ ارائه شده است. این پارامترها به عنوان ورودی‌های اصلی مدل عددی در نظر گرفته شده و نقش تعیین‌کننده‌ای در رفتار ارتعاشی و پاسخ دینامیکی سامانه ایفا می‌کنند.

۴-۲. فرکانس‌های طبیعی ورق

در این بخش، به منظور ارزیابی دقت روش عددی ارائه‌شده در بخش ۱-۲، فرکانس‌های طبیعی یک ورق دایره‌ای با شعاع ۱۰ سانتی‌متر و ضخامت ۵ میلی‌متر محاسبه و با نتایج به‌دست‌آمده از نرم‌افزار کامسول مقایسه شده‌اند. برای این منظور، پنج مود اول ارتعاشی ورق استخراج و مقادیر آن‌ها در دو روش مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج مربوط به حالت غیرچرخان در جدول ۵ ارائه شده و اختلاف نسبی بین نتایج به عنوان معیاری برای سنجش دقت مدل عددی در نظر گرفته شده است. مقایسه انجام‌شده نشان‌دهنده تطابق مناسب میان روش عددی پیشنهادی و شبیه‌سازی اجزای محدود است.

جدول ۴. فرکانس طبیعی ۵ مود اول ورق دایره‌ای بدون چرخش بر حسب هرتز (Hz)

R=10 cm , h=5 mm , $\Omega=0$					
مود (m,n)	۱ (۱,۰)	۲ (۲,۰)	۳ (۰,۱)	۴ (۳,۰)	۵ (۱,۱)
عددی	۲۴۶.۰	۳۷۷.۲	۴۴۷.۰	۴۹۵.۲	۶۰۰.۲
کامسول	۲۷۲.۳	۳۵۲.۴	۴۶۲.۳	۴۷۲.۸	۶۲۵.۵

همان‌طور که در بخش ۱-۲ بیان شد، در حالت چرخش ورق دایره‌ای، مدهای ارتعاشی دارای گره شعاعی به دو مؤلفه پیشرو و پسرو تفکیک می‌شوند. این پدیده ناشی از اثرات دینامیکی دوران، به‌ویژه حضور نیروی کوریولیس و شکست تقارن فرکانسی در سامانه چرخان است. در نتیجه، برای هر مود شعاعی

$$C = \begin{bmatrix} 126 & 79.5 & 84 & 0 & 0 & 0 \\ 79.5 & 126 & 84 & 0 & 0 & 0 \\ 84 & 84 & 117 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 23.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23 \end{bmatrix} \quad (۸۱)$$

همچنین چگالی ماده پیزوالکتریک برابر با مقدار زیر در نظر گرفته شده است:

$$\rho_p = 7500 \text{ kg/m}^3 \quad (۸۲)$$

ماتریس ضرایب پیزوالکتریک که بیانگر کوپلینگ بین میدان‌های مکانیکی و الکتریکی است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ -6.5 & -6.5 & 23.3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۸۳)$$

همچنین ماتریس ضرایب دی‌الکتریک ماده پیزوالکتریک در راستای‌های مختلف به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 15.03 & 0 & 0 \\ 0 & 15.03 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \quad (۸۴)$$

این پارامترها به منظور مدل‌سازی دقیق رفتار کوپل‌شده مکانیکی-الکتریکی وصله پیزوالکتریک در تحلیل‌های عددی مورد استفاده قرار گرفته‌اند و تأثیر آن‌ها بر پاسخ ارتعاشی و ولتاژ خروجی سامانه در ادامه مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

دو فرکانس طبیعی مجزا ایجاد می‌شود که به ترتیب به عنوان مودهای پیشرو و پسرو شناخته می‌شوند.

جدول ۵. فرکانس طبیعی ۵ مود اول ورق دایره‌ای چرخان بر حسب هرتز (Hz)

R=10 cm , h=5 mm , Ω=1500 rpm					
مود (m,n)	۱ (۱,۰)	۲ (۲,۰)	۳ (۰,۱)	۴ (۳,۰)	۵ (۱,۱)
پیشرو	۲۷۱.۰	۴۲۷.۲	۴۴۷.۰	۵۷۰.۰	۶۲۵.۲
پسرو	۲۲۱.۰	۳۲۷.۲	-	۴۲۰.۰	۵۷۵.۲

نتایج ارائه‌شده در جدول ۵ این رفتار را نشان داده و بیانگر افزایش فرکانس مود پیشرو و کاهش فرکانس مود پسرو نسبت به حالت بدون دوران است.

به منظور بررسی تأثیر پارامترهای هندسی ورق بر فرکانس طبیعی مود اول، اثر شعاع و ضخامت ورق دایره‌ای مورد مطالعه قرار گرفته است. مطابق رابطه ۱، فرکانس طبیعی با توان دوم شعاع ورق رابطه معکوس دارد؛ بنابراین با افزایش شعاع، سختی خمشی مؤثر کاهش یافته و فرکانس طبیعی سامانه کاهش می‌یابد.

در مقابل، فرکانس طبیعی با ضخامت ورق رابطه مستقیم دارد، به‌طوری‌که افزایش ضخامت موجب افزایش سختی خمشی و در نتیجه افزایش فرکانس طبیعی می‌شود. نتایج عددی ارائه‌شده در شکل‌های ۲ و ۳ این رفتار را تأیید کرده و نشان می‌دهند که افزایش شعاع باعث کاهش و افزایش ضخامت موجب افزایش فرکانس طبیعی مود اول می‌شود.

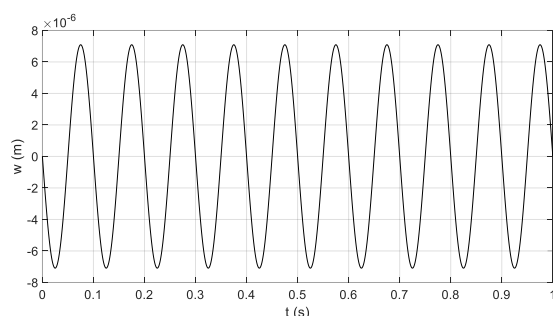
۴-۳. ارتعاش اجباری ورق با وصله

به‌منظور بررسی پاسخ ارتعاشی ورق در شرایط ارتعاش اجباری، یک نیروی خارجی به‌صورت بار گسترده‌ی سینوسی و مطابق رابطه ۸۵ به سامانه اعمال شده است.

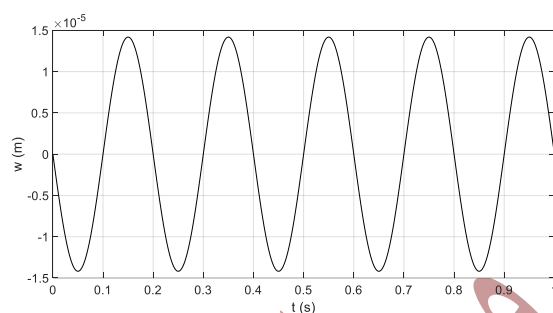
$$q(t) = q_0 \sin(2\pi f t); q_0 = 10 \frac{N}{m^2}, f = 5 \text{ Hz} \quad (۸۵)$$

در این مطالعه، یک ورق دایره‌ای با شعاع ۱۰۰ میلی‌متر و ضخامت ۵ میلی‌متر که با سرعت ۱۰۰۰ دور بر دقیقه دوران می‌کند، به‌همراه دو وصله پیزوالکتریک مربعی به ابعاد ۲۰×۲۰ میلی‌متر و ضخامت ۲ میلی‌متر (به‌منظور حفظ تقارن محوری) مورد بررسی قرار گرفته است. موقعیت مرکز وصله پیزوالکتریک در فاصله ۶۰ میلی‌متر از مرکز دیسک انتخاب شده است. این سامانه تحت تأثیر نیروی خارجی مطابق رابطه ۸۵ قرار دارد. به‌منظور ارزیابی دقت روش عددی، تحلیل همگرایی جابه‌جایی مرکز یکی از وصله‌های پیزوالکتریک انجام شده است. نتایج این بررسی در شکل ۲ ارائه شده و نشان می‌دهد که با افزایش تعداد نقاط گسسته‌سازی، پاسخ به مقدار همگرا نزدیک می‌شود. بر اساس این بررسی و با توجه به تطابق مناسب نتایج با شبیه‌سازی‌های انجام‌شده در نرم‌افزار کامسول، تعداد ۲۷ نقطه گسسته‌سازی به‌عنوان مقدار بهینه انتخاب شده و تمامی تحلیل‌های بعدی با این تعداد نقطه انجام گرفته است.

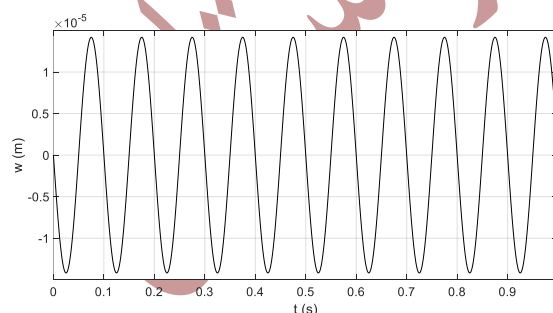
تحریک و دامنه نیروی گسترده خارجی بر پاسخ زمانی سامانه مورد بررسی قرار گرفته است.



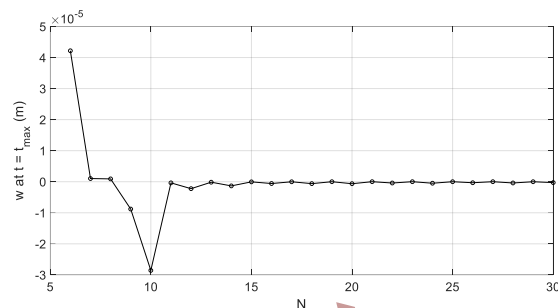
شکل ۴. جابه‌جایی نقطه مرکز وصله پیزوالکتریک در شرایط $q_0 = 10, f = 10$



شکل ۵. جابه‌جایی نقطه مرکز وصله پیزوالکتریک در شرایط $q_0 = 20, f = 5$

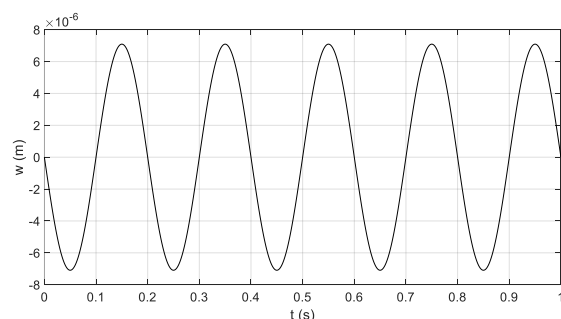


شکل ۶. جابه‌جایی نقطه مرکز وصله پیزوالکتریک در شرایط $q_0 = 20, f = 10$



شکل ۲. بررسی همگرایی جابه‌جایی مرکز وصله پیزوالکتریک با افزایش تعداد نقاط گسسته‌سازی

با اعمال بار گسترده سینوسی، پاسخ زمانی سامانه محاسبه شده و جابه‌جایی مرکز وصله پیزوالکتریک به‌عنوان شاخصی برای ارزیابی رفتار ارتعاشی ورق استخراج شده است. نتایج نشان می‌دهد که جابه‌جایی مرکز وصله نسبت به زمان دارای یک روند نوسانی مشخص است. شکل ۳ تغییرات جابه‌جایی مرکز وصله را در بازه زمانی مورد نظر نمایش می‌دهد.



شکل ۳. جابه‌جایی نقطه مرکز وصله پیزوالکتریک در شرایط $q_0 = 10, f = 5$

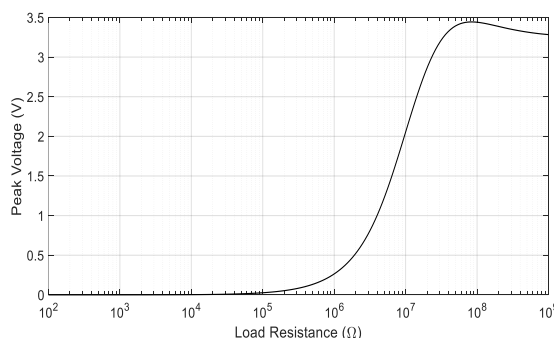
شکل ۴ تا شکل ۶ تغییرات جابه‌جایی مرکز وصله پیزوالکتریک را در شرایط مختلف تحریک نشان می‌دهند. در این نمودارها، تأثیر تغییر فرکانس

۴-۴. برداشت انرژی از وصله‌های پیزوالکتریک

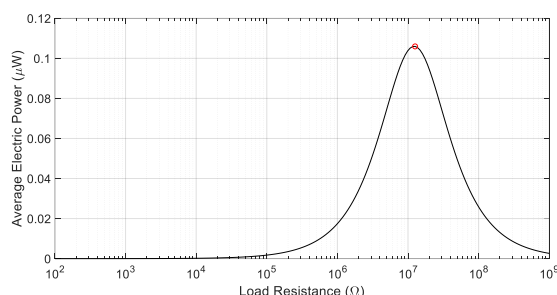
ابتدا مقاومت الکتریکی بهینه در مدار استخراج می‌شود تا بتوان توان الکتریکی خروجی را در بهترین حالت محاسبه کرد. در این مرحله، مقادیر بیشینه ولتاژ خروجی برای مقادیر مختلف مقاومت بار مورد بررسی قرار می‌گیرد. ولتاژ خروجی ناشی از پاسخ سامانه تحت تحریک هارمونیک با فرکانس ۵ هرتز مطابق رابطه ۸۵ محاسبه شده و برای هر مقدار مقاومت، مقدار بیشینه ولتاژ تعیین می‌شود. با استفاده از این مقادیر، توان الکتریکی متناظر با هر مقاومت محاسبه شده و به این ترتیب امکان شناسایی مقاومت بهینه و تحلیل عملکرد مدار برداشت انرژی فراهم می‌شود.

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad (86)$$

نمودارهای ولتاژ-مقاومت و توان الکتریکی-مقاومت در شکل‌های ۷ و ۸ ارائه شده‌اند. برای نمایش مناسب‌تر رفتار سامانه و مشاهده دقیق‌تر تغییرات، محور افقی این نمودارها که بیانگر مقدار مقاومت است، به صورت لگاریتمی رسم شده است.



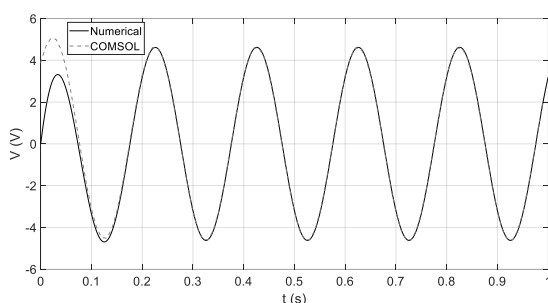
شکل ۷. نمودار ولتاژ-مقاومت در فرکانس تحریک ۵ هرتز



شکل ۸. نمودار توان الکتریکی-مقاومت در فرکانس تحریک ۵ هرتز

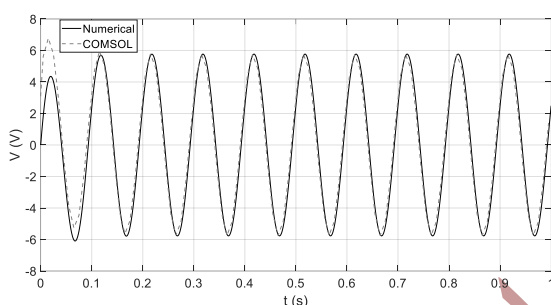
با افزایش مقاومت بار، دامنه ولتاژ خروجی ابتدا افزایش یافته و سپس در یک بازه مشخص به مقدار تقریباً ثابتی می‌رسد، به گونه‌ای که افزایش بیشتر مقاومت تأثیر محسوسی بر مقدار ولتاژ ندارد. در مقاومت‌های بسیار پایین، به دلیل غالب بودن شرایط اتصال کوتاه، ولتاژ خروجی ناچیز است؛ در حالی که در مقاومت‌های بالا سامانه به شرایط مدار باز نزدیک شده و ولتاژ در سطح بالاتری قرار می‌گیرد، هرچند توان قابل برداشت کاهش می‌یابد. بررسی نمودار توان الکتریکی-مقاومت نیز نشان می‌دهد که توان الکتریکی با افزایش مقاومت ابتدا افزایش یافته، پس از رسیدن به مقدار بیشینه کاهش پیدا کرده و در نهایت به مقادیر نزدیک به صفر میل می‌کند.

بر اساس نتایج عددی و با توجه به نقطه بیشینه توان، مقدار مقاومت بهینه برابر با $12.6 \text{ M}\Omega$ به دست آمده است که در این حالت، توان الکتریکی و ولتاژ خروجی به ترتیب برابر با $1.06 \text{ }\mu\text{W}$ و 2.3 V هستند. همچنین نتایج نشان می‌دهد که بیشترین مقدار ولتاژ خروجی، معادل 3.44 V ، در مقاومت $70 \text{ M}\Omega$ حاصل می‌شود.



شکل ۱۱. نمودار ولتاژ بر حسب زمان در شرایط

$$q_0 = 20, f = 5$$



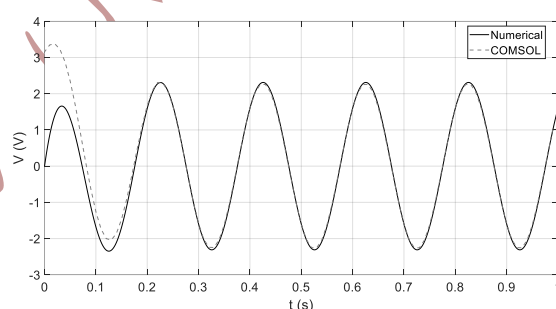
شکل ۱۲. نمودار ولتاژ بر حسب زمان در شرایط

$$q_0 = 20, f = 10$$

در ادامه، با استفاده از مقادیر ولتاژ خروجی و بر اساس رابطه ۸۶، نمودار توان الکتریکی بر حسب زمان استخراج شده است. تمامی این محاسبات برای حالتی انجام شده‌اند که مقدار مقاومت الکتریکی بار برابر با مقدار بهینه $12.6 \text{ M}\Omega$ در نظر گرفته شده است. نمودارهای توان متناظر در شکل‌های ۱۳ تا ۱۶ ارائه شده‌اند و امکان بررسی رفتار زمانی توان برداشت‌شده و ارزیابی عملکرد سامانه در شرایط مختلف تحریک را فراهم می‌کنند.

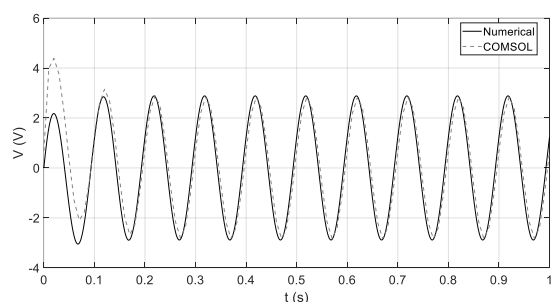
که متناظر با شرایط نزدیک به مدار باز است. لازم به ذکر است که در تحلیل‌های بعدی، تمامی محاسبات و نتایج عددی با استفاده از مقاومت بهینه $12.6 \text{ M}\Omega$ انجام شده‌اند.

برای تحلیل عملکرد سامانه برداشت انرژی، نمودارهای ولتاژ خروجی بر حسب زمان ارائه شده‌اند. در این بخش، فرکانس و دامنه تحریک خارجی تغییر داده شده تا تأثیر هر یک بر ولتاژ خروجی سامانه مورد ارزیابی قرار گیرد. به منظور صحت‌سنجی نتایج عددی، پاسخ‌های به‌دست‌آمده با نتایج شبیه‌سازی نرم‌افزار کامسول تحت شرایط یکسان مقایسه شده‌اند. شکل‌های ۹ تا ۱۲ تغییرات ولتاژ خروجی در بازه زمانی را برای حالات مختلف تحریک نشان می‌دهند.



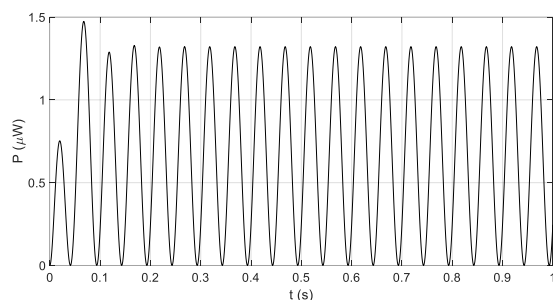
شکل ۹. نمودار ولتاژ بر حسب زمان در شرایط

$$q_0 = 10, f = 5$$



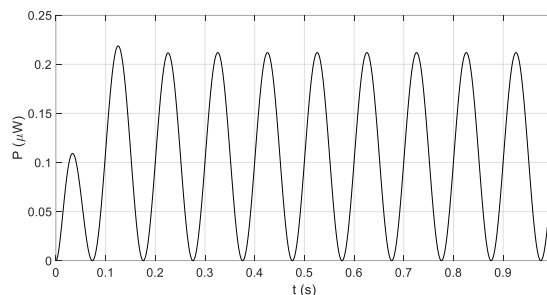
شکل ۱۰. نمودار ولتاژ بر حسب زمان در شرایط

$$q_0 = 10, f = 10$$



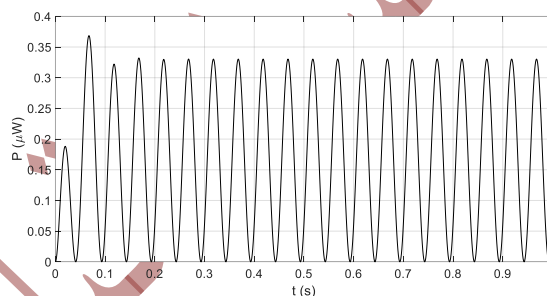
شکل ۱۶. نمودار توان خروجی بر حسب زمان در شرایط

$$q_0 = 20, f = 10$$



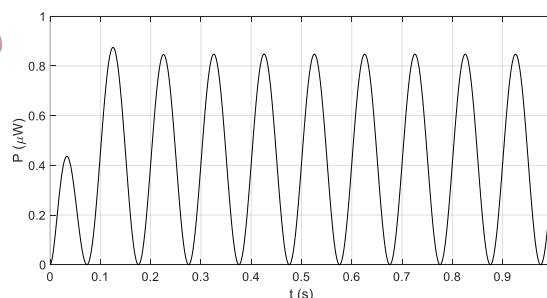
شکل ۱۳. نمودار توان خروجی بر حسب زمان در شرایط

$$q_0 = 10, f = 5$$



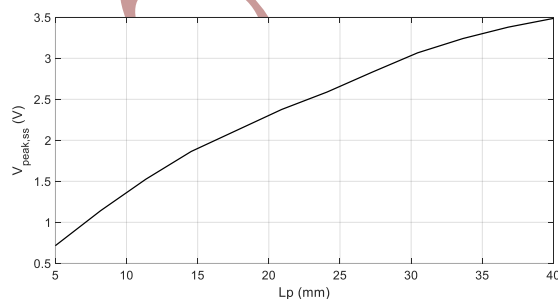
شکل ۱۴. نمودار توان خروجی بر حسب زمان در شرایط

$$q_0 = 10, f = 10$$



شکل ۱۵. نمودار توان خروجی بر حسب زمان در شرایط

$$q_0 = 20, f = 5$$



شکل ۱۷. تاثیر طول وصله‌های پیزوالکتریک بر ولتاژ سامانه

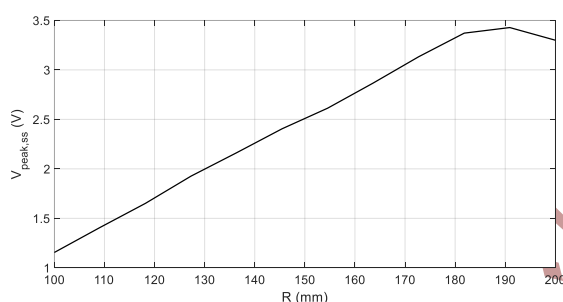
برداشت انرژی

۴-۵. تاثیر ابعاد وصله پیزوالکتریک

به منظور بررسی تأثیر ابعاد وصله‌های پیزوالکتریک بر ولتاژ خروجی سامانه، پاسخ الکتریکی ورق دایره‌ای برای مقادیر مختلف طول، عرض و ضخامت وصله پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار گرفته است. تغییر این پارامترهای هندسی می‌تواند با تغییر میزان کوپلینگ مکانیکی-الکتریکی و کرنش مؤثر، بر دامنه ولتاژ تولیدی تأثیرگذار باشد. در این تحلیل، سایر پارامترهای سامانه ثابت در نظر گرفته شده‌اند تا اثر خالص ابعاد وصله بر ولتاژ خروجی ارزیابی گردد. نتایج مربوط به تأثیر طول، عرض و ضخامت وصله‌های پیزوالکتریک به ترتیب در شکل‌های ۱۷ تا ۱۹ ارائه شده است.

۴-۶. مکان بهینه وصله‌های پیزوالکتریک

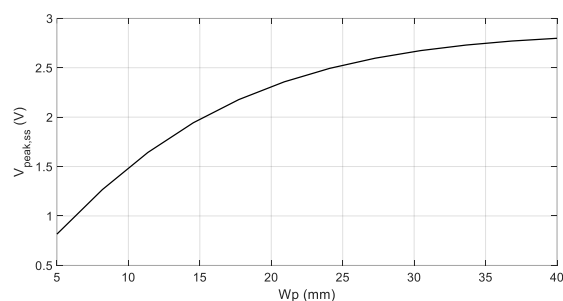
در این بخش، اثر موقعیت شعاعی وصله پیزوالکتریک بر ولتاژ خروجی بررسی شده است. با توجه به توزیع غیریکنواخت کرنش در ورق دایره‌ای، محل نصب وصله تأثیر مستقیمی بر میزان انرژی برداشت شده دارد. با تغییر موقعیت وصله و ثابت ماندن سایر پارامترها، ناحیه بهینه برای نصب وصله پیزوالکتریک شناسایی شده که نتایج آن در شکل ۲۰ آمده است.



شکل ۲۰. تأثیر مکان وصله پیزوالکتریک بر ولتاژ سامانه

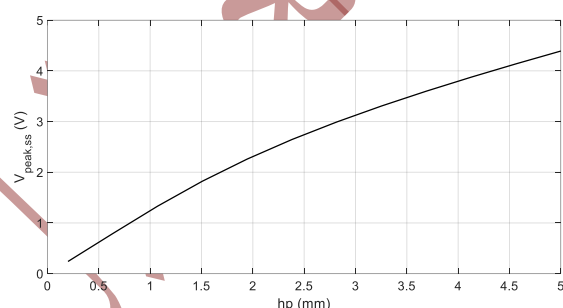
برداشت انرژی

مطابق نمودار ارائه شده در شکل ۲۰، ولتاژ خروجی وصله پیزوالکتریک به موقعیت قرارگیری آن بر روی ورق دایره‌ای وابسته است. با تغییر محل نصب در راستای شعاعی، ولتاژ خروجی ابتدا افزایش یافته و پس از رسیدن به مقدار بیشینه کاهش می‌یابد که بیانگر وجود یک موقعیت بهینه برای نصب وصله است. بر اساس نتایج عددی، این موقعیت بهینه در فاصله حدود ۲۸ میلی‌متر از مرکز دیسک به دست آمده است و با فاصله گرفتن از این نقطه، به دلیل کاهش کرنش خمشی مؤثر، ولتاژ خروجی کاهش می‌یابد.



شکل ۱۸. تأثیر عرض وصله‌های پیزوالکتریک بر ولتاژ سامانه

برداشت انرژی



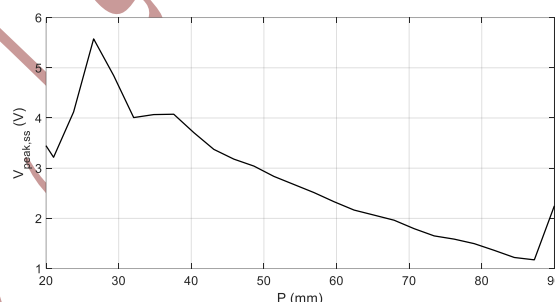
شکل ۱۹. تأثیر ضخامت وصله‌های پیزوالکتریک بر ولتاژ سامانه

برداشت انرژی

نتایج ارائه شده در شکل‌های ۱۷ تا ۱۹ نشان می‌دهند که با افزایش طول، عرض و ضخامت وصله‌های پیزوالکتریک، ولتاژ خروجی سامانه افزایش می‌یابد. این رفتار ناشی از افزایش سطح مؤثر کوپلینگ مکانیکی-الکتریکی و تقویت میدان الکتریکی تولیدی است. با این حال، در مقادیر بزرگ‌تر این پارامترها، نرخ افزایش ولتاژ کاهش یافته و پاسخ سامانه به سمت اشباع نسبی میل می‌کند که نشان‌دهنده وجود محدوده‌ای بهینه برای ابعاد وصله‌های پیزوالکتریک در بهبود عملکرد برداشت انرژی است.

۴-۷. تاثیر شعاع ورق دایره‌ای

در این بخش، اثر تغییر شعاع ورق دایره‌ای بر ولتاژ خروجی پیزوالکتریک بررسی می‌شود. با توجه به تأثیر مستقیم شعاع بر توزیع کرنش خمشی و دامنه ارتعاشات، انتظار می‌رود این تغییر پارامتر هندسی منجر به تغییر پاسخ الکتریکی سامانه گردد. در این تحلیل، سایر پارامترهای هندسی و دینامیکی ثابت نگه داشته شده و شعاع ورق به عنوان متغیر اصلی در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از این بررسی در شکل ۲۱ ارائه شده‌اند.



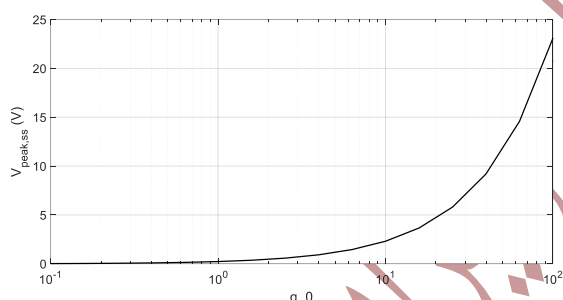
شکل ۲۱. تاثیر شعاع ورق دایره‌ای بر ولتاژ سامانه برداشت انرژی

مطابق نتایج شکل ۲۱، با افزایش شعاع ورق دایره‌ای، ولتاژ خروجی و صله پیزوالکتریک ابتدا افزایش می‌یابد. این روند ناشی از بزرگ‌تر شدن دامنه ارتعاشات و تغییر توزیع کرنش خمشی است که موجب انتقال کرنش مؤثرتر به صله پیزوالکتریک می‌شود. با این حال، پس از یک مقدار مشخص شعاع، نرخ افزایش ولتاژ کاهش یافته و در مقادیر بزرگ‌تر شعاع، پاسخ الکتریکی به حالت تقریباً اشباع رسیده یا حتی اندکی کاهش نشان می‌دهد. این رفتار نشان‌دهنده وجود یک بازه بهینه برای شعاع ورق در جهت بیشینه‌سازی ولتاژ خروجی

است؛ به‌ویژه با توجه به اینکه در این تحلیل، ضخامت ورق و ابعاد صله پیزوالکتریک ثابت فرض شده‌اند.

۴-۸. تاثیر دامنه‌ی نیروی خارجی

در این بخش، اثر دامنه نیروی خارجی بر ولتاژ خروجی سامانه بررسی می‌شود. از آنجا که دامنه نیروی تحریک مستقیماً بر دامنه ارتعاشات ورق و میزان کرنش ایجادشده در صله پیزوالکتریک تأثیر می‌گذارد، تغییر این پارامتر می‌تواند موجب تغییر ولتاژ تولیدی شود. در این تحلیل، با تغییر دامنه نیروی خارجی و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها، رفتار ولتاژ خروجی سامانه مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نتایج حاصل از این بررسی در شکل ۲۲ ارائه شده‌اند.



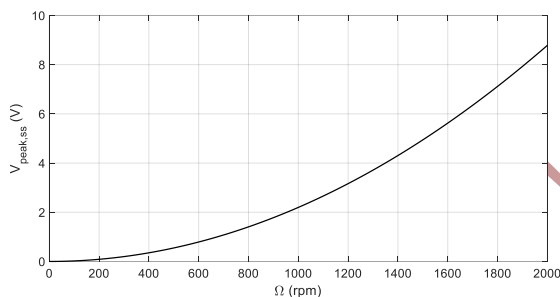
شکل ۲۲. تاثیر دامنه‌ی تحریک نیروی خارجی بر ولتاژ سامانه برداشت انرژی

۴-۹. تاثیر فرکانس تحریک نیروی خارجی

در این بخش، تأثیر فرکانس تحریک نیروی خارجی بر ولتاژ خروجی سامانه بررسی می‌شود. از آنجا که پاسخ دینامیکی ورق و کرنش ایجادشده در صله پیزوالکتریک به فرکانس تحریک وابسته است، تغییر آن می‌تواند تغییرات قابل توجهی در ولتاژ خروجی ایجاد کند. با تغییر فرکانس و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها،

۹-۴. تاثیر سرعت دورانی ورق

در شکل ۲۴ تاثیر سرعت دورانی ورق بر ولتاژ خروجی سامانه برداشت انرژی مورد بررسی قرار گرفته است. در این تحلیل، تغییرات ولتاژ تولیدی با افزایش سرعت چرخش دیسک ارزیابی شده تا نحوه اثرگذاری این پارامتر دینامیکی بر پاسخ الکتریکی وصله‌های پیزوالکتریک مشخص شود. این بررسی امکان درک بهتر نقش سرعت دورانی در عملکرد کلی سامانه را فراهم می‌کند.



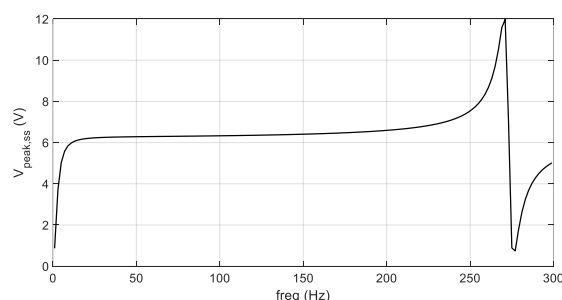
شکل ۲۴. تاثیر سرعت دورانی ورق بر ولتاژ سامانه برداشت انرژی

۱۰-۴. بهینه‌سازی نتایج

در راستای بررسی تاثیر پارامترهای هندسی و موقعیتی بر عملکرد برداشت انرژی، کدی در محیط متلب توسعه داده شد تا با استفاده از الگوریتم برای انجام فرآیند بهینه‌سازی، شعاع ورق دایره‌ای ۱۰۰ میلی‌متر که با سرعت ۱۰۰۰ دور بر دقیقه دوران می‌کند و تحت فرکانس تحریک ۵ هرتز و دامنه نیروی خارجی ۲۰ نیوتون بر میلی‌متر مربع در نظر گرفته شده است. همچنین بر اساس بررسی‌های عددی پیشین، مقاومت

رفتار ولتاژ خروجی ارزیابی شده و امکان بررسی شرایط نزدیک به تشدید و تاثیر آن بر عملکرد برداشت انرژی فراهم می‌شود.

مطابق شکل ۲۳، ولتاژ خروجی سامانه به‌طور قابل توجهی تحت تاثیر فرکانس تحریک نیروی خارجی قرار دارد. با افزایش فرکانس تحریک، ولتاژ خروجی در ابتدا تغییرات ملایمی داشته، اما در نزدیکی یک فرکانس مشخص افزایش شدیدی را تجربه می‌کند که نشان‌دهنده وقوع پدیده تشدید است. همان‌طور که در جدول ۵ و ۴ فرکانس‌های طبیعی سامانه محاسبه و ارائه شده‌اند، این افزایش ناگهانی ولتاژ متناظر با فرکانس طبیعی اول سامانه بوده و بیانگر تشدید ورق دایره‌ای در این فرکانس است. در این ناحیه، دامنه ارتعاشات و کرنش ایجادشده در وصله پیزوالکتریک به بیشینه مقدار خود رسیده و در نتیجه ولتاژ خروجی به‌طور محسوسی افزایش می‌یابد. پس از عبور از فرکانس تشدید، ولتاژ خروجی کاهش یافته و رفتار سامانه از ناحیه تشدید فاصله می‌گیرد.



شکل ۲۳. تاثیر فرکانس تحریک نیروی خارجی بر ولتاژ سامانه

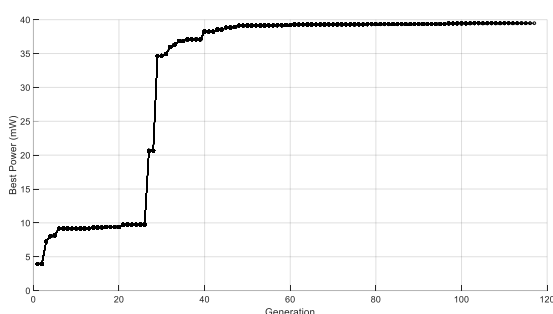
برداشت انرژی

الکتریکی مدار برای حالت بهینه برابر با $12.6 \text{ M}\Omega$ در نظر گرفته شد.

در فرآیند بهینه‌سازی پنج پارامتر اصلی شامل طول وصله پیزوالکتریک، عرض وصله پیزوالکتریک، ضخامت وصله پیزوالکتریک، ضخامت ورق پایه و موقعیت وصله پیزوالکتریک بر روی ورق مورد بررسی قرار گرفتند. بازه‌های قابل قبول برای این متغیرها تعریف شدند تا از نظر فیزیکی و ساخت عملی، منطقی و قابل تحقق باشند. طول و عرض وصله پیزوالکتریک هر یک در بازه ۱۰ تا ۴۰ میلی‌متر در نظر گرفته شدند تا تناسب هندسی با ابعاد ورق حفظ گردد. ضخامت وصله پیزوالکتریک در محدوده ۰.۵ تا ۵ میلی‌متر و ضخامت ورق پایه در بازه ۲ تا ۱۰ میلی‌متر متغیر لحاظ شدند. همچنین، برای تعیین بهترین محل نصب، موقعیت قرارگیری وصله پیزوالکتریک در فاصله ۳۰ تا ۷۰ میلی‌متری از مرکز ورق تعریف گردید. این بازه‌ها به عنوان قیود ورودی در الگوریتم ژنتیک جهت استخراج پاسخ‌های بهینه مورد استفاده قرار گرفتند.

به منظور تعیین پارامترهای طراحی بهینه و بیشینه‌سازی توان الکتریکی خروجی، فرآیند بهینه‌سازی با استفاده از الگوریتم ژنتیک در محیط متلب انجام شد. در این فرآیند، الگوریتم با جمعیتی در حدود ۲۲۰۰۰ حالت و طی نزدیک به ۱۲۰ نسل^{۱۳} اجرا گردید و در نهایت به همگرایی مناسبی دست یافت که روند آن در شکل ۲۵ نشان داده شده است. پس از رسیدن به همگرایی، مقادیر بهینه پارامترهای طراحی استخراج شد. بر اساس نتایج حاصل از بهینه‌سازی، طول وصله پیزوالکتریک برابر با ۳۸.۵ میلی‌متر، عرض وصله پیزوالکتریک برابر با ۲۹.۷ میلی‌متر و ضخامت

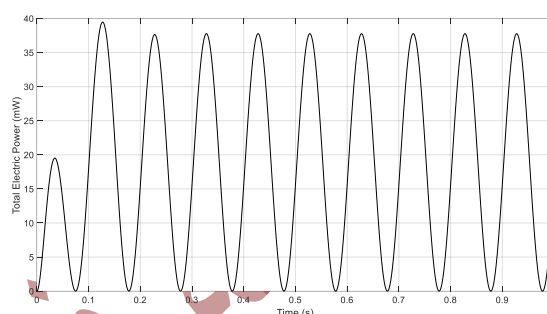
وصله پیزوالکتریک برابر با ۵ میلی‌متر به دست آمد. همچنین ضخامت ورق پایه مقدار بهینه ۲ میلی‌متر را نشان داد و موقعیت بهینه قرارگیری وصله پیزوالکتریک در فاصله ۳۱ میلی‌متری از مرکز ورق تعیین گردید. این مقادیر به عنوان شرایط بهینه طراحی در ادامه تحلیل‌های عددی مورد استفاده قرار گرفته‌اند.



شکل ۲۵. همگرایی الگوریتم ژنتیک در طی حدود ۱۲۰ نسل و رسیدن توان خروجی پیزوالکتریک به مقدار پایدار

بر اساس این پارامترهای بهینه، توان الکتریکی خروجی بر حسب زمان محاسبه شده و نتایج آن در شکل ۲۶ ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که در شرایط بهینه، توان تولیدی سامانه به مقدار ۳۹.۴ میلی‌وات می‌رسد. این مقدار در مقایسه با نتایج حالت اولیه و شرایط غیربهینه که در شکل ۱۵ ارائه شده است، افزایش بسیار قابل توجهی را نشان می‌دهد؛ به‌طوری‌که در آن حالت توان تولیدی تنها حدود ۰.۸۵ میکرووات گزارش شده بود. بنابراین می‌توان مشاهده کرد که اعمال فرآیند بهینه‌سازی و انتخاب مناسب پارامترهای هندسی و موقعیت وصله پیزوالکتریک، تأثیر بسیار چشمگیری بر عملکرد سامانه برداشت انرژی دارد و موجب افزایش چندین برابری توان خروجی می‌شود. این نتایج نشان‌دهنده اهمیت تعیین پارامترهای بهینه

در طراحی سامانه‌های برداشت انرژی پیزوالکتریک و نقش مؤثر روش‌های بهینه‌سازی هوشمند، به‌ویژه الگوریتم ژنتیک، در دستیابی به بیشینه بازده عملکرد سامانه است.



شکل ۲۶. نمودار توان خروجی بر حسب زمان در شرایط بهینه

۶. نتیجه گیری

نتایج این پژوهش نشان داد که ورق دایره‌ای چرخان مجهز به وصله‌های پیزوالکتریک می‌تواند به‌عنوان یک سامانه مؤثر برای برداشت انرژی ارتعاشی مورد استفاده قرار گیرد. تحلیل‌های انجام‌شده روی پاسخ زمانی ولتاژ و توان الکتریکی تحت شرایط مختلف تحریک نشان داد که عملکرد سامانه به‌طور مستقیم به پارامترهای دینامیکی نظیر دامنه تحریک، فرکانس تحریک و سرعت دورانی ورق وابسته است. به‌ویژه، مشاهده پیک‌های ولتاژ و توان در نزدیکی فرکانس طبیعی مود اول، نقش کلیدی پدیده تشدید را در افزایش بازده برداشت انرژی تأیید می‌کند. مقایسه نتایج به‌دست‌آمده با شبیه‌سازی المان محدود در محیط کامسول نیز تطابق مناسبی را نشان داد و دقت مدل تحلیلی ارائه‌شده را مورد تأیید قرار داد. علاوه‌براین، ارزیابی اثر

پارامترهای هندسی شامل ابعاد ورق، موقعیت و اندازه وصله‌های پیزوالکتریک نشان داد که بهینه‌سازی این پارامترها تأثیر قابل‌توجهی بر افزایش توان الکتریکی خروجی دارد.

در شرایط بهینه‌شده این پژوهش، توان الکتریکی تولیدی سامانه حدود ۳۹.۴ میلی‌وات به دست آمد؛ مقداری که در مقایسه با حالت غیربهینه (با توان حدود ۰.۸۵ میکرووات) نشان‌دهنده بهبود چشمگیر عملکرد است. با توجه به سطح توان تولیدی سامانه، می‌توان نتیجه گرفت که سامانه برداشت انرژی پیشنهادی قادر به تأمین انرژی موردنیاز تجهیزات الکترونیکی کم‌مصرف است. به‌طور ویژه، LED های کوچک و حسگرهای کم‌مصرف که معمولاً در بازه ۱ تا ۱۰۰ میکرووات توان عملیاتی دارند، با توان خروجی این سامانه به‌صورت مؤثر قابل راه‌اندازی هستند. همچنین با در نظر گرفتن ابعاد دو وصله پیزوالکتریک مورد استفاده در این سامانه، چگالی توان تولیدی حدود ۳.۴۵ میکرووات بر میلی‌متر مکعب به دست می‌آید که نشان‌دهنده عملکرد مناسب سامانه برداشت انرژی طراحی‌شده است. در نتیجه، سامانه برداشت انرژی مورد مطالعه می‌تواند در پایش سلامت سازه‌ها، سامانه‌های بی‌سیم کم‌مصرف و تجهیزات الکترونیکی کوچک به‌کار گرفته شود.

به‌طور کلی، نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که طراحی مناسب اجزای سامانه، انتخاب بهینه پارامترهای هندسی و استفاده از شرایط دینامیکی مطلوب، امکان توسعه سامانه‌های پربازده برداشت انرژی پیزوالکتریک را برای کاربردهای صنعتی و سامانه‌های دارای اجزای چرخان فراهم می‌سازد.

۷. پیشنهادات

با توجه به فرضیات در نظر گرفته شده در پژوهش حاضر و به منظور ارتقای سطح تحلیل‌ها در مطالعات آینده، مسیرهای پژوهشی زیر پیشنهاد می‌گردد. با توجه به اینکه در پژوهش حاضر روابط کرنش-جابه‌جایی به صورت خطی در نظر گرفته شده‌اند، پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آتی با استفاده از روابط کرنش-جابه‌جایی غیرخطی، رفتار دینامیکی سامانه در دامنه‌های ارتعاشی بزرگ با دقت بیشتری بررسی شود. در این راستا، نمودار پاسخ فرکانسی غیرخطی، یعنی دامنه حرکت بر حسب فرکانس تحریک، با استفاده از روش‌های مختلف تئوری اختلالات، از جمله روش چندمقیاسی، محاسبه و ترسیم گردد تا ویژگی‌های رفتاری سامانه نظیر رفتار سفت‌شوندگی یا نرم‌شوندگی، پدیده جهش و تشدیدهای اولیه و ثانویه به دقت مورد مطالعه قرار گیرند. همچنین، ترسیم نمودار انشقاق سامانه و بررسی انشقاق‌های محتمل در ساختار می‌تواند به شناسایی تغییرات کیفی پاسخ و تعیین محدوده‌های پایداری و ناپایداری سامانه کمک کند. افزون بر این، پیشنهاد می‌شود نماهای لیاپانوف محاسبه و ترسیم شوند تا ماهیت رفتار دینامیکی سامانه و امکان وقوع پاسخ‌های تناوبی، شبه‌تناوبی یا آشوبناک مشخص گردد.

علاوه بر تحلیل رفتار غیرخطی، بررسی تأثیر هندسه‌های مختلف ورق و وصله‌های پیزوالکتریک، از جمله تغییر ضخامت ورق، استفاده از وصله‌هایی با شکل‌ها و ابعاد متفاوت و مطالعه چیدمان‌های گوناگون وصله‌ها، می‌تواند به شناسایی طرح‌های کارآمدتر و

افزایش توان الکتریکی خروجی منجر شود. همچنین، استفاده از مواد مدرج تابعی در ساختار ورق و بررسی اثر تغییرات پیوسته خواص مکانیکی و حرارتی آن‌ها بر پاسخ ارتعاشی و عملکرد برداشت انرژی، به عنوان یکی دیگر از مسیرهای توسعه این پژوهش پیشنهاد می‌شود.

از سوی دیگر، با توجه به دوران ورق در محیط سیال، در نظر گرفتن اثرات آیرودینامیکی و اندرکنش سیال-سازه، به ویژه میرایی آیرودینامیکی و نیروهای ناشی از جریان هوا، می‌تواند مدل ارائه شده را به شرایط واقعی عملکرد نزدیک‌تر کند. بررسی اثر این عوامل بر فرکانس‌های طبیعی، دامنه ارتعاشات، پایداری دینامیکی، ولتاژ تولیدی و بازده برداشت انرژی، به خصوص در سرعت‌های دورانی بالا، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در نهایت، مطالعه تأثیر شرایط محیطی، از جمله تغییرات دما، بر خواص مکانیکی ورق، ویژگی‌های الکترومکانیکی وصله پیزوالکتریک و توان الکتریکی خروجی پیشنهاد می‌شود تا عملکرد و قابلیت اطمینان سامانه در شرایط کاری مختلف و کاربردهای بلندمدت به صورت جامع ارزیابی گردد.

- [1] Zou, H.-X., W.-M. Zhang, W.-B. Li, K.-X. Wei, Q.-H. Gao, Z.-K. Peng, and G. Meng. "Design and experimental investigation of a magnetically coupled vibration energy harvester using two inverted piezoelectric cantilever beams for rotational motion." *Energy Conversion and Management* 148 (2017): 1391–1398.
- [2] Fu, H., and E. M. Yeatman. "A methodology for low-speed broadband rotational energy harvesting using piezoelectric transduction and frequency up-conversion." *Energy* 125 (2017): 152–161.
- [3] Narolia, T., V. K. Gupta, and I. A. Parinov. "Design and analysis of a shear mode piezoelectric energy harvester for rotational motion system." *Journal of Advanced Dielectrics* 10, no. 3 (2020).
- [4] Wang, J.-X., W.-B. Su, J.-C. Li, and C.-M. Wang. "A rotational piezoelectric energy harvester based on trapezoid beam: Simulation and experiment." *Renewable Energy* 184 (2022): 619–626.
- [۵] شیرازی، اسماعیل، و علی اصغر جعفری. «برداشت انرژی از سیستم دیسک صلب چرخان با دو تیر طره و پیزوالکتریک». نشریه علمی صوت و ارتعاش ۱۴۰۰، شماره ۱۹، دوره ۱۰، صفحه ۱۳۳–۱۴۹
- [6] Chand, R. R., and A. Tyagi. "Design and experimental validation of an exponentially tapering width rotational piezoelectric vibration energy harvester." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 34, no. 1 (2023): 15–28.
- [7] Wu, Z., Y. Wang, Q. Hong, H. Sun, and S. Lin. "High output and durable piezoelectric energy harvesting system utilizing non-contact collision-induced self-vibration mechanism." *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 47 (2025): 261.
- [8] Xie, Z., Y. Ran, G. Fang, Y. Zhu, W. Huang, B. Fu, S. Ge, Z. Zhang, and Z. Wang. "A novel variable potential energy well bistable piezoelectric rotational energy harvester." *Mechanical Systems and Signal Processing* 239 (2025): 113312.
- [9] Genta, G. *Dynamics of Rotating Systems*. New York, NY: Springer, 2005.
- [10] Reddy, J. N. *Theories and Analyses of Beams and Axisymmetric Circular Plates*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2022.
- [11] Rao, S. S. *Vibration of Continuous Systems*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [12] Jafari, M. *Free and Forced Vibration of Rotating FGM Beam with Piezoelectric Layer*. M.Sc. thesis, K. N. Toosi University of Technology, 2018.
- [13] Yoon, H., B. D. Youn, and H. S. Kim. "Analysis of Electromechanical Performance of Energy Harvesting Skin Based on the Kirchhoff Plate Theory." In Volume 8: 26th Conference on Mechanical Vibration and Noise, 2014.
- [14] Askari Farsangi, M. A., and A. R. Saidi. "Levy type solution for free vibration analysis of functionally graded rectangular plates with piezoelectric layers." *Smart Materials and Structures* 21, no. 9 (2012): 094017.
- [15] Lal, R., and R. Saini. "Vibration analysis of functionally graded circular plates of variable thickness under thermal environment by generalized differential quadrature method." *Journal of Vibration and Control* 26, no. 1–2 (2019): 1–15.
- [16] Tornabene, F., and R. Dimitri. "Generalized Differential and Integral Quadrature." In *Mathematical Methods in Interdisciplinary Sciences*. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2020.
- [17] Shu, C. *Differential Quadrature and Its Applications in Engineering*. London, UK: Springer, 2000.
- [18] Rahmanfar, E. *Vibration Energy Harvesting from Rotational Rectangular Plate with Piezoelectric Patch*. M.Sc. thesis, Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, 2024.

[19] Eftekhari, S. A. "A differential quadrature procedure with direct projection of the admissible function for numerical solution of moving load problem." Latin American Journal of Solids and Structures 13, no. 9 (2016): 1763–1781.

[20] Akbaş, Ş. D. "Forced vibration responses of axially functionally graded beams using Ritz method." Journal of Applied and Computational Mechanics 7, no. 1 (2021): 109–115.

پی‌نوشت

1. Macro Energy Harvester
2. Micro Energy Harvester
3. Bearings
4. End Disk in Pulleys
5. Shaft
6. Forward
7. Backward
8. First-Order Shear Deformation Theory (FSDT)
9. Generalized Differential Quadrature (GDQ)
10. Chebyshev–Gauss–Lobatto polynomials
11. Generalized Integral Quadrature (GIQ)
12. Genetic Algorithm
13. Generation