مقاله پژوهشی

تحلیل ارتعاشات پوسته مخروطی متخلخل چرخان با بکارگیری روش مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته دوبعدی

سید امیرمسعود تکمیلی
دانشجوی کارشناسی ارشد
دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
a.takmili@email.kntu.ac.ir

علی اصغر جعفری*
استاد دانشکده مکانیک
دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
ajafari@kntu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۹/۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۲/۶

چکیده

در این پژوهش، رفتار پوسته‌ی مخروطی چرخان متشکل از ماده‌ی هدفمند متخلخل مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات حاکم بر پوسته‌ی مخروطی نسبتاً ضخیم با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول استخراج شده‌اند. در این معادلات، اثرات نیروی گریز از مرکز ناشی از دوران پوسته نیز در نظر گرفته شده که منجر به ایجاد انرژی کرنشی حاصل از کشش حلقه‌ای در معادلات حاکم می‌شود. معادلات دیفرانسیل جزئی با به‌کارگیری روش مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته‌ی دوبعدی به دستگاه معادلات جبری تبدیل شده و سپس با حل مسئله‌ی مقدار ویژه، فرکانس طبیعی سیستم به‌دست آمده است. پس از اطمینان از صحت مدل ریاضی ارائه شده، تأثیر پارامترهای مختلفی از قبیل سرعت دوران، شرایط مرزی، ماده‌ی متخلخل و زاویه‌ی نیم رأس مخروط بر فرکانس‌های طبیعی پیشرو و پسرو بررسی شده است. بر اساس نتایج به دست آمده، افزایش پارامتر متخلخل موجب کاهش فرکانس طبیعی می‌شود. همچنین، با افزایش سرعت دورانی، مقادیر فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.

واژگان کلیدی: ارتعاشات آزاد، پوسته چرخان، پوسته مخروطی، ماده متخلخل درجه‌بندی شده، مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته دوبعدی، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

۱. مقدمه

به علت کاربرد وسیع پوسته‌ها در صنایع مختلفی همچون هوافضا، عمران، پزشکی، خودروسازی و کشتی‌سازی، این سازه‌ها همواره مورد توجه ویژه پژوهشگران و مهندسان بوده‌اند. پوسته‌ها، سازه‌های سه‌بعدی نازکی هستند که ضخامت آن‌ها در مقایسه با دو بعد دیگر بسیار ناچیز است.

در فضاپیماها از پوسته‌های مخروطی برای اتصال بدنه‌هایی با شعاع متفاوت استفاده می‌شود. ویژگی تغییر سطح مقطع در راستای طولی، باعث شده تا این پوسته‌ها در طراحی مخازن تحت فشار، نازل‌های هیدرولیکی و دیفیوزرها نیز به‌کار روند. همچنین، کاربرد آن‌ها در طراحی بدنه‌ی هواپیماها و آنتن‌های فضایی بسیار رایج است [۲،۱]. اما با توجه به نیازمندی‌های صنعت و شرایط عملیاتی سازه‌ها،

استفاده از مواد معمول چندان کارآمد نیست و لازم است از مواد پیشرفته‌تری مانند کامپوزیت‌ها بهره گرفته شود [۳-۵]. یکی از پرکاربردترین این مواد، مواد مدرج تابعی FGM[1] است که در علم مواد، به عنوان موادی پیشرفته با ساختاری ناهمگن شناخته می‌شوند. این مواد برای نخستین بار در سازمان هوافضای ژاپن توسعه یافتند. خواص مکانیکی مواد مدرج تابعی به‌صورت پیوسته و تدریجی تغییر می‌کند. این مواد عموماً از ترکیب دو ماده‌ی مختلف (معمولاً یک فلز و یک سرامیک) تشکیل می‌شوند که این ویژگی، سبب افزایش مقاومت در برابر بارهای مکانیکی و همچنین تحمل گرادیان دمای بالا می‌شود [۶،۷]. از سوی دیگر، علاوه بر مقاومت بالا، کاهش وزن سازه بدون تأثیر منفی چشمگیر بر استحکام آن نیز یک نیاز اساسی است. یکی از روش‌های متداول برای کاهش وزن، ایجاد تخلخل در ماده است که به ظهور مواد متخلخل منجر شده است [۸]. این مواد در مقایسه با مواد معمول، از چگالی کمتر، انعطاف‌پذیری بالاتر، توانایی جذب انرژی بهتر و نفوذپذیری مناسب‌تری برخوردارند. به همین دلایل، مطالعه‌ی رفتار استاتیکی و دینامیکی پوسته‌های مخروطی ساخته‌شده از مواد متخلخل مدرج تابعی FGP[2]، امروزه بیش از پیش مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است.

برای مطالعه رفتار دینامیکی پوسته‌ها، از تئوری‌های مختلفی جهت استخراج معادلات حاکم استفاده می‌شود. وانگ و دفانگ‌وو [۹] به بررسی فرکانس طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ساخته‌شده از ماده متخلخل FGM پرداخته‌اند. آن‌ها معادلات حاکم را با به‌کارگیری تئوری تغییرشکل برشی سینوسی استخراج و به کمک روش ریلی–ریتز گسسته‌سازی کرده‌اند. یکی دیگر از تئوری‌های مورد استفاده در تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌ها، تئوری کلاسیک پوسته است. ژیوآ و همکاران [۱۰] با استفاده از این تئوری و در نظر گرفتن ماده متخلخل هدفمند، فرکانس طبیعی پوسته مخروطی را بررسی کرده‌اند. با این حال، تئوری کلاسیک برای پوسته‌های نسبتاً ضخیم از دقت کافی برخوردار نیست. از این رو، لی و یان [۱۱] از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول برای مطالعه دینامیکی پوسته‌های متصل مخروطی-مخروطی-استوانه‌ای متخلخل استفاده نموده‌اند. سپس معادلات حاکم را با روش ریلی–ریتز گسسته کرده‌اند. در این تئوری، اثر تغییرشکل‌های برشی و لختی دورانی در نظر گرفته شده تا دقت لازم برای مطالعه پوسته‌های متصل نسبتاً ضخیم فراهم شود. همچنین، معتضدیان و جعفری [۱۲] با استخراج معادلات حاکم پوسته متصل مخروطی-کروی و گسسته‌سازی آن‌ها به روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته، ارتعاشات آزاد این سازه را تحلیل کرده‌اند.

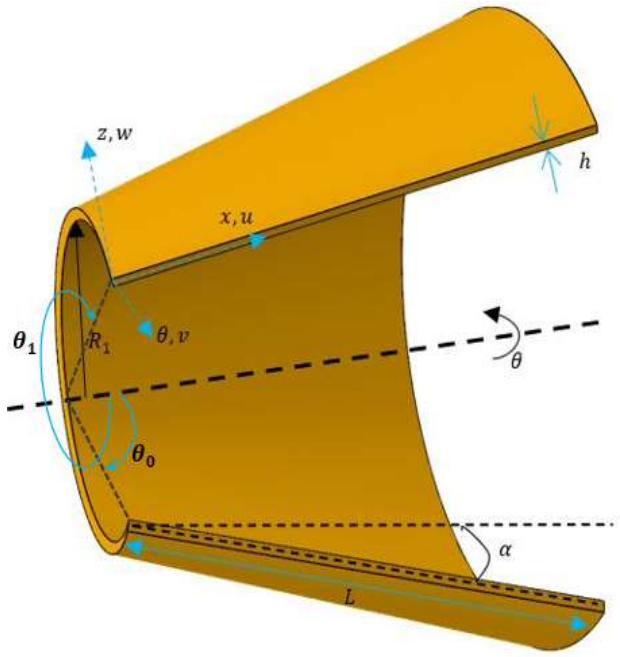
از سوی دیگر، در صنایع مختلفی همچون هوافضا، جداسازهای شیمیایی، پزشکی و توربین‌ها، از پوسته‌های مخروطی در حال دوران حول محور تقارن استفاده می‌شود. مطالعه رفتار دینامیکی سیستم‌های دوار از اهمیت بالایی برخوردار است، چرا که پدیده‌هایی مانند شکستگی، افزایش دامنه ارتعاش و افزایش سطح صوت می‌تواند در این سیستم‌ها رخ دهد. سرخیل و فومنی [۱۳] به بررسی ارتعاشات پوسته متصل استوانه‌ای-مخروطی دوار پرداخته‌اند. در این تحقیق، برای استخراج جمله‌های مربوط به سیستم دوار، از نیروی گریز از مرکز و کشش اولیه استفاده شده و تأثیر

پارامترهای هندسی تحت سرعت‌های دورانی مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. ملک‌زاده و حیدرپور [۱۴] نیز ارتعاشات پوسته مخروطی دوار ساخته‌شده از ماده هدفمند FGM را تحلیل کرده‌اند. در این مطالعه، معادلات حاکم با بهره‌گیری از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و اصل همیلتون استخراج و سپس با روش مربعات دیفرانسیلی گسسته‌سازی شده‌اند. وانگ و همکاران [۱۵] نیز با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و در نظرگیری نیروی گریز از مرکز، معادلات حاکم بر پوسته متصل کروی-استوانه‌ای-مخروطی را استخراج کرده‌اند. در این تحقیق، با درنظرگرفتن اثرات دمای محیط و ماده هدفمند FGM، تأثیر شرایط مرزی مختلف نیز بررسی شده است. بنی‌جمال و جعفری [۱۶] به مطالعه پوسته مخروطی دوار تقویت‌شده با ساختار شبکه‌ای ناهمسانگرد پرداخته‌اند. آن‌ها معادلات حاکم را برای ماده هدفمند FGM با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته‌ها استخراج و سپس به روش گلرکین گسسته‌سازی کرده‌اند. در ادامه، تأثیر تقویت‌کننده تحت سرعت‌های دورانی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، امیرآبادی و همکاران [۱۷] با به‌کارگیری تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا، معادلات حاکم بر پوسته مخروطی FGM لایه‌ای تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافنی را استخراج نموده‌اند. سپس با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته، معادلات حاکم را به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کرده و در نهایت، تأثیر ماده هدفمند تقویت شده تحت سرعت‌های دورانی مختلف را بررسی کرده‌اند. معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر پوسته مخروطی با روش‌های متعددی از قبیل ریتز [۱۸]، گلرکین [۱۹] و مربعات دیفرانسیل [۲۰] گسسته شده و به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل خواهند شد. روش مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته GDQ^3 برای اولین بار توسط شوو [۲۱] توسعه یافته است. با مطالعه‌ی صورت گرفته شده توسط تورنوبن و همکارانش [۲۲] بر روی پوسته‌های تکی، همچنین معتضدیان و همکارانش [۲۳] بر پوسته‌های متصل استوانه-کروی، نشان داده شده است که روش مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته علاوه بر دقت بالا از سرعت بالایی در همگرایی مقادیر فرکانس طبیعی نسبت به روش‌های دیگر برخوردار است. باقری و همکارانش با اعمال روش GDQ بر معادلات دیفرانسیل حاکم، به مطالعه رفتار دینامیکی پوسته‌های متصل مخروط-مخروط [۲۴]، کره-مخروط[۲۵] پرداخته‌اند. همچنین لی و همکارانش [۲۶] به مطالعه ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی کامپوزیتی دوار پرداخته‌اند. معادلات حاکم بر پوسته به کمک روش GDQ گسسته‌سازی شده و با حل مسئله مقدار ویژه فرکانس طبیعی استخراج شده است.

با بررسی پیشینه پژوهش‌ها، مشاهده می‌شود که مطالعه‌ای بر روی ارتعاشات پوسته‌های مخروطی متخلخلFGP انجام نشده است. با توجه به مزیت‌های روش عددی GDQ از جمله سرعت و دقت بالا، می‌توان شرایط مرزی مختلفی را نیز به‌طور کارآمد بر سیستم اعمال نمود. از این رو، در این پژوهش به مطالعه ارتعاشات آزاد یک پوسته و یا پنل مخروطی متشکل از ماده مدرج تابعی متخلخل پرداخته می‌شود. معادلات حاکم بر پوسته که حول محور تقارن خود در حال دوران است، با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی

مرتبه اول و اصل همیلتون استخراج شده‌اند. سپس با به‌کارگیری روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته دوبعدی، معادلات دیفرانسیل جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند. پس از اعتبارسنجی روش عددی و معادلات حاکم ارائه‌شده، تأثیر پارامترهای مختلف هندسی از قبیل نسبت طول به ضخامت، ضریب تخلخل ماده، و نیز اثر سرعت دورانی و شرایط مرزی گوناگون مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

نوآوری اصلی این تحقیق در استفاده از حل دوبعدی به جای فرض متداول تقارن محوری است که امکان مدل‌سازی پنل‌هایی با زاویه محیطی دلخواه (مانند ۶۰، ۹۰ و ۱۲۰ درجه) را فراهم می‌آورد. این در حالی است که در تحلیل‌های مبتنی بر تقارن محوری، صرفاً پوسته‌های کامل (۳۶۰ درجه) قابل بررسی هستند. علاوه بر این، رویکرد دوبعدی ارائه‌شده قابلیت اعمال مستقل شرایط مرزی در لبه‌های طولی (در راستای θ) و لبه‌های عرضی (در راستای x) را دارا بوده و از این رو تطابق بیشتری با شرایط واقعی مسئله دارد. همچنین، در پوسته‌های متخلخل چرخان، ناهمگنی مواد و اثرات ناشی از چرخش می‌تواند منجر به رفتارهای نامتقارن شود که شناسایی و تحلیل این پدیده‌ها تنها با بکارگیری حل دوبعدی میسر خواهد بود. مدل ارائه‌شده در این پژوهش کاربردهای صنعتی گسترده‌ای دارد؛ از جمله در صنعت هوافضا برای تحلیل پنل‌های بدنه فضاپیماها که تحت تأثیر تخلخل ناشی از آسیب‌دیدگی و هم‌زمان تحت سرعت چرخش قرار دارند، در صنعت نفت و پتروشیمی برای بررسی پنل‌های فرسایش‌یافته سیکلون‌های دوار به منظور تخمین عمر مفید و زمان تعمیر قطعات، و در صنعت دریایی برای تحلیل پنل‌های بدنه زیردریایی‌ها و شناورها که در معرض خوردگی و تنش‌های ناشی از چرخش پروانه هستند. این کاربردها اهمیت تحلیل دقیق ارتعاشات پنل‌های مخروطی متخلخل چرخان را در طراحی ایمن و بهینه سازه‌های مهندسی نشان می‌دهد.



شکل ۱. شماتیک پوسته مخروطی

۲. استخراج معادلات حاکم

با توجه به آنکه ماده هدفمند متخلخل در نظر گرفته شده است، مقادیر چگالی و مدول یانگ برای انواع مختلف توزیع تخلخل به صورت زیر خواهد بود [۲۷].

حالت اول؛ توزیع تخلخل متقارن[۴]:

$$E(z) = E_{\max}\left[1 - N_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right]$$
$$G(z) = G_{\max}\left[1 - N_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right] \qquad (۱)$$
$$\rho(z) = \rho_{\max}\left[1 - N_m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right]$$

حالت دوم؛ توزیع تخلخل نامتقارن سخت[۵]:

$$Ez=E\max 1-N0\cos\pi z2h+\pi 4$$
$$Gz=G\max 1-N0\cos\pi z2h+\pi 4 \quad (۲)$$
$$\rho z=\rho\max 1-Nm\cos\pi z2h+\pi 4$$

حالت سوم؛ توزیع تخلخل نامتقارن نرم[۶]:

$$E(z) = E_{\max}\left[1 - N_0 \sin\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$G(z) = G_{\max}\left[1 - N_0 \sin\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (۳)$$
$$\rho(z) = \rho_{\max}\left[1 - N_m \sin\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

حالت چهارم؛ توزیع تخلخل یکنواخت:

$$E(z) = E_{\max}(1 - N_0\lambda)$$
$$G(z) = G_{\max}(1 - N_0\lambda) \quad (۴)$$
$$\rho(z) = \rho_{\max}(1 - N_m^*\lambda)$$

در روابط فوق ضرایب N_m، N_m^* و λ به صورت زیر محاسبه خواهد شد.

$$N_m = 1 - \sqrt{1 - N_0} \quad (۵)$$

$$N_m^* = \frac{1 - \sqrt{1 - N_0\lambda}}{\lambda}\ ;\ \lambda = \frac{2N_m}{\pi N_m^*} \quad (۶)$$

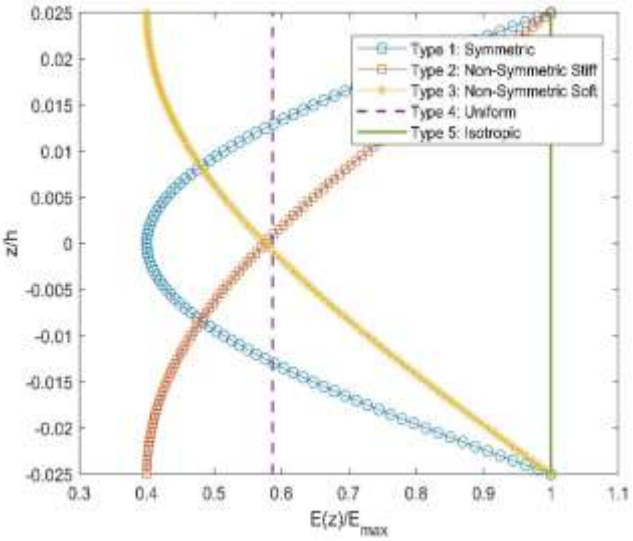
$$\lambda = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{N_0}\left(1 - \frac{2N_m}{\pi}\right)^2 \quad (۷)$$

در روابط بیان شده، پارامتر N_0 ضریب تخلخل است که مقدار آن در بازه $0 < N_0 < 1$ قابل تغییر است.

تغییرات نسبت مدول یانگ در راستای ضخامت برای هر یک از نوع تخلخل به صورت شکل ۲ خواهد شد.

با توجه به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابه‌جایی برای یک پوسته مخروطی نسبتاً ضخیم به صورت رابطه ۸ تعریف خواهد شد [۲۸]. همچنین در شکل ۱ شماتیک پوسته مخروطی قابل مشاهده است.

$$u(x,\theta,z,t) = u_0(x,\theta,t) + z\beta_x(x,\theta,t)$$
$$v(x,\theta,z,t) = v_0(x,\theta,t) + z\beta_\theta(x,\theta,t) \quad (۸)$$
$$w(x,\theta,z,t) = w_0(x,\theta,t)$$



شکل ۲. نمودار تغییرات نسبت مدول یانگ برای انواع مختلف تخلخل

در رابطه ۸، مولفه‌های u، v و w به ترتیب نشان‌دهنده‌ی جابه‌جایی‌های یک نقطه‌ی دلخواه درون پوسته در راستای x, θ و z هستند. در این رابطه، u_0، v_0 و w_0 جابه‌جایی‌های متناظر در صفحه میانی پوسته $(z = 0)$ را بیان می‌کنند. همچنین β_x و β_θ به ترتیب نمایانگر چرخش‌های ناشی از خمش حول محورهای x و θ می‌باشند. این روابط بر اساس فرضیات نظریه‌ی مرتبه اول برشی تدوین شده‌اند که توزیع خطی جابه‌جایی در ضخامت پوسته را مجاز می‌دارند.

روابط کرنش-جابه‌جایی به صورت زیر متشکل از تغییرات انحنا و کرنش سطح میانی پوسته مخروطی خواهد بود.

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{23}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\varepsilon^0_{xx}\\ \varepsilon^0_{\theta\theta}\\ \gamma^0_{x\theta}\\ \gamma^0_{xz}\\ \gamma^0_{\theta z}\end{Bmatrix} + z\begin{Bmatrix}X_{xx}\\ X_{\theta\theta}\\ X_{x\theta}\\ X_{xz}\\ X_{\theta z}\end{Bmatrix} \quad (۹)$$

کرنش سطح میانی از رابطه زیر بدست خواهد آمد.

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon^0_{xx}\\ \varepsilon^0_{\theta\theta}\\ \gamma^0_{x\theta}\\ \gamma^0_{xz}\\ \gamma^0_{\theta z}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} u_{0,x}\\ \frac{v_{0,\theta}}{r(x)}+\frac{\cos(\alpha)\,w_0}{r(x)}+\frac{\sin(\alpha)\,u_0}{r(x)}\\ \frac{u_{0,\theta}}{r(x)}+v_{0,x}-\frac{\sin(\alpha)\,v_0}{r(x)}\\ w_{0,x}+\beta_x\\ \frac{w_{0,\theta}}{r(x)}-\frac{\cos(\alpha)\,v_0}{r(x)}+\beta_\theta\end{Bmatrix} \quad (۱۰)$$

همچنین تغییرات انحنا نیز به کمک رابطه زیر تعریف خواهد شد.

$$\begin{Bmatrix}X_{xx}\\ X_{\theta\theta}\\ X_{x\theta}\\ X_{xz}\\ X_{\theta z}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \beta_{x,x}\\ \frac{\beta_{\theta,\theta}}{r(x)}+\frac{\sin(\alpha)\,\beta_x}{r(x)}\\ \frac{\beta_{x,\theta}}{r(x)}+\beta_{\theta,x}-\frac{\sin(\alpha)\,\beta_\theta}{r(x)}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \quad (۱۱)$$

با توجه به فرض روابط خطی الاستیک، رابطه‌ی تنش-کرنش مربوط به پوسته‌ی مخروطی به صورت زیر خواهد شد که در آن مدول یانگ E و نسبت پواسون v نسبت به ضخامت تغییر خواهند کرد.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \tau_{12}\\ \tau_{13}\\ \tau_{23}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&0&0&0\\ C_{12}&C_{22}&0&0&0\\ 0&0&C_{44}&0&0\\ 0&0&0&C_{55}&0\\ 0&0&0&0&C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{23}\end{Bmatrix} \quad (۱۲)$$

ضرایب ماتریس سفتی ارائه شده در رابطه ۱۲ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} C_{11}&=C_{22}=\frac{E(z)}{1-v^2(z)}\\ C_{12}&=\frac{E(z)v}{1-v^2(z)}\\ C_{44}&=C_{55}=C_{66}=\frac{E(z)}{2\big(1+v(z)\big)}\end{aligned} \quad (۱۳)$$

برای استخراج معادلات حاکم مطابق رابطه ۱۴ از اصل همیلتون استفاده خواهد شد که در آن K و U به ترتیب بیانگر انرژی جنبشی و پتانسیل خواهند بود.

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(K-U)\,dt=0 \quad (۱۴)$$

انرژی جنبشی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$K=\frac{1}{2}\iiint_V \rho\vec{v}.\vec{v}dV \quad (۱۵)$$

که بردار سرعت $\vec{v}$ به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\vec{v}=\frac{\partial u}{\partial t}\vec{\imath}+\frac{\partial v}{\partial t}\vec{\jmath}+\frac{\partial w}{\partial t}\vec{k}+\vec{\Omega}\times\vec{r} \quad (۱۶)$$

بردار $\vec{r}$ و $\vec{\Omega}$ برای پوسته‌ی مخروطی به صورت زیر خواهند بود.

$$\begin{aligned}\vec{r}&=u\vec{\imath}+v\vec{\jmath}+w\vec{k}\\ \vec{\Omega}&=\Omega\big(-\cos\alpha\vec{\imath}+\sin\alpha\vec{k}\big)\end{aligned} \quad (۱۷)$$

با جایگذاری رابطه ۱۷ در رابطه ۱۶، آنگاه بردار سرعت به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{aligned}\vec{v}&=\Big(\frac{\partial u}{\partial t}-\Omega v\sin\alpha\Big)\vec{\imath}\\ &+\Big[\frac{\partial v}{\partial t}+\Omega(u\sin\alpha+w\cos\alpha)\Big]\vec{\jmath}\\ &+\Big(\frac{\partial w}{\partial t}-\Omega v\cos\alpha\Big)\vec{k}\end{aligned} \quad (۱۸)$$

در نتیجه انرژی جنبشی پوسته‌ی مخروطی به صورت زیر تعریف خواهد شد.

$$\begin{aligned}K&=\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\rho(z)\{(\dot{u}-v\Omega\sin(\alpha))^2\\ &+(\dot{w}-v\Omega\cos(\alpha))^2\\ &+(\dot{v}+u\Omega\sin(\alpha)\\ &+w\Omega\cos(\alpha))^2\}r(x)dzd\theta dx\end{aligned} \quad (۱۹)$$

همچنین انرژی پتانسیل به صورت زیر تعریف خواهد شد.

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}U\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\int_V(&\sigma_{11}\varepsilon_{11}+\sigma_{22}\varepsilon_{22}\\ &+\tau_{12}\gamma_{12}+\tau_{13}\gamma_{13}\\ &+\tau_{23}\gamma_{23})dVdt\end{aligned} \quad (۲۰)$$

علاوه بر آن، نیرو گریز از مرکز ناشی از دوران پوسته نیز منجر به انرژی کرنشی ناشی از کشش حلقه‌ای می‌شود که در نتیجه یک انرژی پتانسیل ناشی از آن به صورت زیر تعریف خواهد شد که در آن مقدار $N^0_\theta=\Omega^2\rho r^2(x)$ خواهد بود.

$$U_h = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} N_\theta^0 \varepsilon_{\theta\theta 0} r(x)\, dz d\theta dx \quad (۲۱)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} U_h &= \frac{\Omega^2}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho(z) \Big\{ \big(u_{,\theta} - v\sin(\alpha)\big)^2 \\ &+ \big(w_{,\theta} - v\cos(\alpha)\big)^2 \\ &+ \big(v_{,\theta} + u\sin(\alpha) \\ &+ w\cos(\alpha)\big)^2 \Big\} r(x) dz d\theta dx \end{aligned} \quad (۲۲)$$

برای ساده‌سازی رابطه ۲۰، می‌توان از روابط منتجه‌های تنش مطابق رابطه ۲۳، استفاده کرد.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} dz \\ \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{+h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} dz \\ \begin{Bmatrix} Q_{13} \\ Q_{23} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \kappa \begin{Bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} dz \end{aligned} \quad (۲۳)$$

با جایگذاری رابطه ۱۲ در رابطه ۲۰، آنگاه رابطه بین منتجه‌های تنش و کرنش به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ X_{11} \\ X_{22} \\ X_{12} \end{Bmatrix} \quad (۲۴)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{13} \\ Q_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa A_{44} & 0 \\ 0 & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{13}^0 \\ \gamma_{23}^0 \end{Bmatrix} \quad (۲۵)$$

که ضرایب A، B و D به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \\ D_{ij} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} C_{ij} \\ zC_{ij} \\ z^2 C_{ij} \end{Bmatrix} dz; \quad (۲۶)$$

حال با اعمال اصل همیلتون، معادلات حاکم بر پوسته‌ی مخروطی دوار به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{aligned} &N_{xx,x} + \frac{N_{x\theta,\theta}}{r(x)} + \frac{\sin(\alpha)(N_{xx} - N_{\theta\theta})}{r(x)} + \Omega^2 F_1 \\ &= I_0 \ddot{u} + I_1 \ddot{\beta}_x - 2\Omega\big(I_0 \sin(\alpha)\, \dot{v} \\ &\qquad + I_1 \sin(\alpha) \dot{\beta}_\theta\big) \end{aligned} \quad (۲۷)$$

$$\begin{aligned} &\frac{N_{\theta\theta,\theta}}{r(x)} + N_{x\theta,x} + \frac{\cos(\alpha) Q_{\theta z}}{r(x)} + \frac{2\sin(\alpha)\, N_{x\theta}}{r(x)} \\ &\qquad + \Omega^2 F_2 \\ &= I_0 \ddot{v} + I_1 \ddot{\beta}_\theta + 2\Omega\big(I_0 \sin(\alpha)\, \dot{u} + I_1 \sin(\alpha)\, \dot{\beta}_x \\ &\qquad + I_0 \cos(\alpha)\, \dot{w}\big) \end{aligned} \quad (۲۸)$$

$$\begin{aligned} &Q_{xz,x} + \frac{Q_{\theta z,\theta}}{r(x)} - \frac{\cos(\alpha)\, N_{\theta\theta}}{r(x)} + \frac{\sin(\alpha)\, Q_{xz}}{r(x)} \\ &\qquad + \Omega^2 F_3 \\ &= I_0 \ddot{w} - 2\Omega I_0 \cos(\alpha)\, \dot{v} + I_1 \cos(\alpha)\, \dot{\beta}_\theta \end{aligned} \quad (۲۹)$$

$$\begin{aligned} &M_{xx,x} + \frac{Q_{x\theta,\theta}}{r(x)} + \frac{\sin(\alpha)\,(M_{xx} - M_{\theta\theta})}{r(x)} - Q_{xz} \\ &\qquad + \Omega^2 F_4 \\ &= I_1 \ddot{u} + I_2 \ddot{\beta}_x - 2\Omega\big(I_1 \sin(\alpha)\, \dot{v} \\ &\qquad + I_2 \sin(\alpha)\, \dot{\beta}_\theta\big) \end{aligned} \quad (۳۰)$$

$$\begin{aligned} &\frac{M_{\theta\theta,\theta}}{r(x)} + M_{x\theta,x} - Q_{\theta z} + 2\frac{\sin(\alpha)\, M_{x\theta}}{r(x)} + \Omega^2 F_5 \\ &= I_1 \ddot{v} + I_2 \ddot{\beta}_\theta + 2\Omega\big(I_1 \sin(\alpha)\, \dot{u} + I_2 \sin(\alpha)\, \dot{\beta}_x \\ &\qquad + I_1 \cos(\alpha)\, \dot{w}\big) \end{aligned} \quad (۳۱)$$

که F_1 تا F_5 و همچنین مقادیر اینرسی I_1 تا I_3 به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} F_1 &= I_0 u_{,\theta\theta} - 2I_0 \sin(\alpha)\, v_{,\theta} + I_1 \beta_{x,\theta\theta} \\ &\quad - 2I_1 \sin(\alpha)\, \beta_{\theta,\theta} \end{aligned} \quad (۳۲)$$

$$\begin{aligned} F_2 &= 2I_0 \sin(\alpha)\, u_{,\theta} + 2I_1 \sin(\alpha) \beta_{x,\theta} \\ &+ I_0 v_{,\theta\theta} + I_1 \beta_{\theta,\theta\theta} + 2I_0 \cos(\alpha)\, w_{,\theta} \\ &+ I_0 \cos(\alpha)\, u_{,\theta} + I_1 \cos(\alpha)\, \beta_{x,\theta} \end{aligned} \quad (۳۳)$$

$$\begin{aligned} F_3 &= I_0 w_{,\theta\theta} - 2I_0 \cos(\alpha)\, v_{,\theta} \\ &\quad - 2I_1 \cos(\alpha)\, \beta_{\theta,\theta} \end{aligned} \quad (۳۴)$$

$$\begin{aligned} F_4 &= I_1 u_{,\theta\theta} + I_2 \beta_{x,\theta\theta} - 2I_1 \sin(\alpha)\, v_{,\theta} \\ &\quad - 2I_2 \sin(\alpha)\, \beta_{\theta,\theta} \end{aligned} \quad (۳۵)$$

$$\begin{aligned} F_5 &= I_1 v_{\theta\theta} + I_2 \beta_{\theta,\theta\theta} + 2I_1 \sin(\alpha)\, u_{,\theta} \\ &+ 2I_2 \sin(\alpha)\, \beta_{x,\theta} + 2I_1 \cos(\alpha)\, w_{,\theta} \end{aligned} \quad (۳۶)$$

$$+I_1\cos(\alpha)\,u_{,\theta}+I_2\cos(\alpha)\,\beta_{x,\theta}$$

$$\begin{Bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{+h/2}\rho(z)\begin{Bmatrix}1\\z\\z^2\end{Bmatrix}dz \qquad (۳۷)$$

۳. شرایط مرزی و سازگاری

از آنجا که معادلات حاکم برای یک پنل مخروطی استخراج شده است، برای تبدیل آن به یک پوسته‌ی مخروطی، لبه‌های پوسته در $\theta=2\pi,\theta=0$ منطبق خواهند بود. درنتیجه باید شروط سازگاری برای آن از $0\le x\le L$ مطابق زیر اعمال شود.

$$\begin{aligned}&u_0(x,0,t)=u_0(x,2\pi,t)\\&v_0(x,0,t)=v_0(x,2\pi,t)\\&w_0(x,0,t)=w_0(x,2\pi,t)\\&\beta_x(x,0,t)=\beta_x(x,2\pi,t)\\&\beta_\theta(x,0,t)=\beta_\theta(x,2\pi,t)\\&N_{\theta\theta}(x,0,t)=N_{\theta\theta}(x,2\pi,t)\\&N_{x\theta}(x,0,t)=N_{x\theta}(x,2\pi,t)\\&M_{\theta\theta}(x,0,t)=M_{\theta\theta}(x,2\pi,t)\\&M_{x\theta}(x,0,t)=M_{x\theta}(x,2\pi,t)\\&Q_{\theta z}(x,0,t)=Q_{\theta z}(x,2\pi,t)\end{aligned} \qquad (۳۸)$$

در هر لبه‌ی پوسته‌ی مخروطی می‌توان هر یک از شرط مرزی زیر را بر آن اعمال نمود.

شرط مرزی گیردار:

$$\begin{aligned}&u_0=v_0=w_0=\beta_x=\beta_\theta=0\\&at\quad \theta=\theta_0,\theta_1\ \text{ and }\ x=0,L\end{aligned} \qquad (۳۹)$$

شرط مرزی تکیه‌گاه ساده:

$$\begin{aligned}&u_0=v_0=w_0=\beta_x=M_{xx}=0\\&\qquad\text{at}\quad x=0,L\\&u_0=v_0=w_0=\beta_x=M_{\theta\theta}=0\\&\qquad\text{at}\quad \theta=\theta_0,\theta_1\end{aligned} \qquad (۴۰)$$

شرط مرزی آزاد:

$$\begin{aligned}&N_{xx}=N_{x\theta}=M_{xx}=M_{x\theta}=Q_{xz}=0\\&\qquad\text{at}\quad x=0,L\\&N_{\theta\theta}=N_{x\theta}=M_{\theta\theta}=M_{x\theta}=Q_{\theta z}=0\\&\qquad\text{at}\quad \theta=\theta_0,\theta_1\end{aligned} \qquad (۴۱)$$

۴. گسسته‌سازی و حل معادلات

برای گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر پوسته از روش مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته دوبعدی استفاده خواهد شد. از این رو، یک تابع $\Phi(x_i,\theta_i)$ با متغیرهای مستقل x و θ در نظر گرفته می‌شود. مشتق مرتبه n-ام و یا m-ام آن به صورت زیر تعریف خواهد شد.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^n}{\partial x^n}\Phi(x_i,\theta_i)\\&=\sum_{k=1}^{N_x}A_{ik}^{(n)}\Phi_{kj}\,;\quad\begin{matrix}i=1,2,3,\dots,N_x\\j=1,2,3,\dots,N_\theta\end{matrix}\end{aligned} \qquad (۴۲)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^m}{\partial \theta^m}\Phi(x_i,\theta_i)\\&=\sum_{l=1}^{N_y}B_{jl}^{(m)}\Phi_{il}\,;\quad\begin{matrix}i=1,2,3,\dots,N_x\\j=1,2,3,\dots,N_\theta\end{matrix}\end{aligned} \qquad (۴۳)$$

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial \theta^m\partial x^n}\Phi(x_i,\theta_i)=\sum_{k=1}^{N_x}A_{ik}^{(n)}\sum_{l=1}^{N_y}B_{jl}^{(m)}\Phi_{kl} \qquad (۴۴)$$

موقعیت گره‌های x_i و θ_i به کمک چبیشف-گوس-لوباتو[۷] مطابق روابط زیر تعریف خواهند شد.

$$\begin{aligned}&x_i=\frac{1-\cos\left(\frac{i-1}{N_x-1}\right)\pi}{2};\\&i=1,2,\dots,N_x\end{aligned} \qquad (۴۵)$$

$$\begin{aligned}&\theta_i=\frac{1-\cos\left(\frac{j-1}{N_y-1}\right)\pi}{2};\\&j=1,2,\dots,N_\theta\end{aligned} \qquad (۴۶)$$

همچنین ضرایب عددی $A_{ik}^{(n)}$ و $B_{jl}^{(m)}$ برای مشتق اول به صورت زیر تعریف خواهند شد.

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{L^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)L^{(1)}(x_j)}; \quad i,j = 1,2,\dots,N_x \text{ and } i \neq j \tag{۴۷}$$

$$B_{ij}^{(1)} = \frac{G^{(1)}(y_i)}{(\theta_i - \theta_j)G^{(1)}(\theta_j)}; \quad i,j = 1,2,\dots,N_\theta \text{ and } i \neq j \tag{۴۸}$$

$$G^{(1)}(\theta_i) = \prod_{i=1, i\neq j}^{N_y} (\theta_j - \theta_i) \tag{۴۹}$$

در نتیجه،

$$\sum_{j=1}^{N_x} A_{ij}^{(1)} = 0 \implies A_{ii}^{(1)} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N_x} A_{ij}^{(1)} \quad i,j = 1,2,\dots,N_x \tag{۵۰}$$

$$\sum_{j=1}^{N_y} B_{ij}^{(1)} = 0 \implies B_{ii}^{(1)} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N_y} B_{ij}^{(1)}; \quad i,j = 1,2,\dots,N_\theta \tag{۵۱}$$

همچنین برای مشتق مراتب بالاتر می‌توان از روابط زیر استفاده نمود.

$$\left[A^{(n)}\right] = \left[A^{(1)}\right]\left[A^{(n-1)}\right] \tag{۵۲}$$

$$\left[B^{(m)}\right] = \left[B^{(1)}\right]\left[B^{(m-1)}\right] \tag{۵۳}$$

با اعمال روش 2D-GDQ بر معادلات دیفرانسیل جزئی، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مطابق رابطه زیر خواهد شد که در آن M، K و G به ترتیب بیانگر ماتریس جرم، سفتی و ژیروسکوپ خواهند بود. همچنین Δ بردار جابه‌جایی مربوط به $\Delta = \{u, v, w, \beta_x, \beta_\theta\}^{\mathrm{T}}$ خواهد بود.

$$[M]\ddot{\Delta} + [G]\dot{\Delta} + [K]\Delta = \{0\} \tag{۵۴}$$

برای استخراج مقادیر ویژه رابطه ۵۴، معادلات به صورت رابطه ۵۵ باز نویسی خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} G & K \\ -K & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\Delta} \\ \Delta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\Delta} \\ \dot{\Delta} \end{Bmatrix} = 0 \tag{۵۵}$$

که می‌توان به صورت رابطه زیر بازنویسی کرد.

$$[A]X + [B]\dot{X} = 0 \tag{۵۶}$$

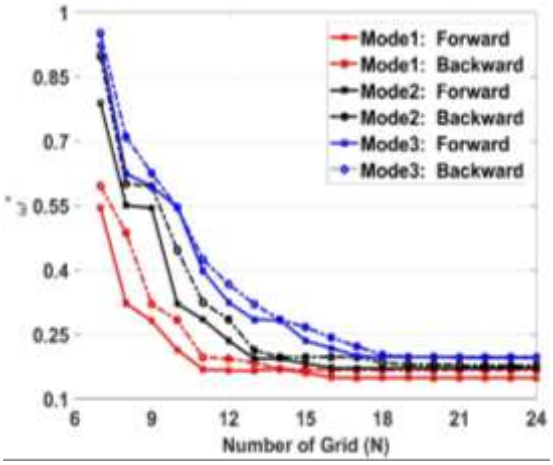
در رابطه ۵۶، بردار X به صورت $X = [\dot{\Delta} \quad \Delta]^T$ است. برای حل این معادله دیفرانسیل پاسخ سیستم به صورت یک تابع هارمونیک $X = x^{\lambda t}$ در نظر گرفته می‌شود. با حل مسئله مقادیر ویژه آنگاه پاسخ به صورت مقدار موهومی $\lambda = \sigma \pm i\omega$ بدست خواهد آمد که در آن ω مقادیر فرکانس طبیعی سیستم تحت دوران Ω خواهد بود.

۵. بحث و نتایج

۵-۱. صحت سنجی

در پژوهش حاضر، ارتعاشات آزاد پوسته‌ی مخروطی متخلخل چرخان مورد بررسی قرار گرفته است. در روش عددیGDQ، بررسی همگرایی نتایج از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است تا اطمینان حاصل شود که پاسخ‌ها مستقل از تعداد گره‌های چبیشف-لوباتو هستند. نمودار ارائه‌شده در شکل ۳، روند همگرایی فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ی مخروطی متخلخل چرخان را نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار، می‌توان دریافت که انتخاب ۲۰ گره در هر دو راستای طولی و محیطی، از دقت کافی برخوردار است. البته باید توجه داشت که برای دستیابی به همگرایی در مودهای بالاتر، بدون شک به تعداد گره‌های بیشتری نیاز خواهد بود.

معادلات به روش GDQ با نتایج مراجع [۱۲]، [۲۲]، [۲۳] و همچنین شبیه‌سازی با نرم‌افزار آباکوس مقایسه گردید. در این مرحله، ماده‌ای با رفتار ایزوتروپ (فولاد) در نظر گرفته شد و نتایج مقایسه در جداول ۱ و ۲ ارائه شده‌اند.



شکل۳. نمودار همگرایی سه مود اول پوسته مخروطی متخلخل چرخان (N: تعداد گره که برای هر دو راستا یکسان در نظر گرفته شده است.)

در این تحلیل‌های صحه‌گذاری، طول پوسته ۲ متر، شعاع کوچک‌تر ۱ متر و ضخامت آن ۰/۱ متر در نظر گرفته شد.

جدول ۱. فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای تحت شرط مرزی C-F[8] (بر حسب هرتز)

شماره مود	تحقیق حاضر	آباکوس	[12]	[22]
۱	۱۴۶/۲۹	۱۴۵/۱۸	۱۴۶/۱۱	۱۴۶/۱۷
۲	۱۴۶/۲۹	۱۴۵/۱۸	۱۴۶/۱۱	۱۴۶/۱۷
۳	۲۱۰/۴۱	۲۰۹/۵۲	۲۱۰/۱۹	۲۱۰/۳۲
۴	۲۱۰/۴۱	۲۰۹/۵۲	۲۱۰/۱۹	۲۱۰/۳۲
۵	۲۴۲/۷۲	۲۴۲/۸۱	۲۴۲/۵۶	۲۴۲/۵۵
۶	۲۴۲/۷۲	۲۴۲/۸۱	۲۴۲/۵۶	۲۴۲/۵۵
۷	۳۶۶/۵۴	۳۶۷/۰۲	۳۶۶/۳۹	۳۶۶/۵۸
۸	۳۶۶/۵۴	۳۶۷/۰۲	۳۶۶/۳۹	۳۶۶/۵۸
۹	۴۰۲/۰۶	۴۰۲/۲۴	۴۰۲/۲۴	۴۰۱/۹۱
۱۰	۴۱۲/۰۶	۴۰۹/۰۵	۴۱۲/۲۳	۴۱۲/۳۶

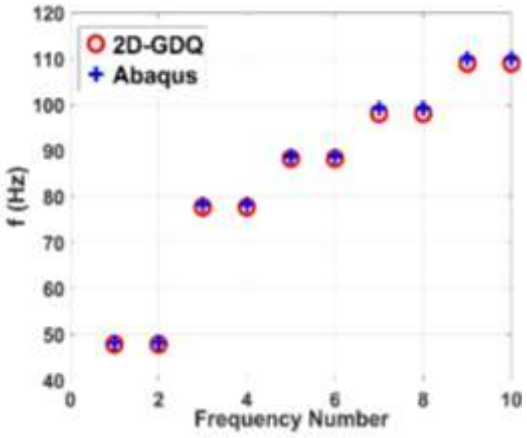
جدول ۲. فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای تحت شرط مرزی C-C[9] (بر حسب هرتز)

شماره مود	تحقیق حاضر	آباکوس	[12]	[22]
۱	۳۶۰/۱۶	۳۵۹/۵۰	۳۶۰/۲۶	۳۶۰/۳۶
۲	۳۶۰/۱۶	۳۵۹/۵۰	۳۶۰/۲۶	۳۶۰/۳۶
۳	۳۷۵/۷۰	۳۷۵/۱۹	۳۷۵/۹۶	۳۷۵/۸۶
۴	۳۷۵/۷۰	۳۷۵/۱۹	۳۷۵/۹۶	۳۷۵/۸۶
۵	۴۶۲/۹۹	۴۶۳/۲۹	۴۶۳/۴۳	۴۶۳/۲۹
۶	۴۶۲/۹۹	۴۶۳/۲۹	۴۶۳/۴۳	۴۶۳/۲۹
۷	۵۲۳/۵۰	۵۲۳/۶۴	۵۲۳/۴۵	۵۲۳/۵۵
۸	۵۲۳/۵۰	۵۲۳/۶۴	۵۲۳/۴۵	۵۲۳/۵۵
۹	۶۴۶/۱۲	۶۴۸/۰۱	۶۴۶/۷۳	۶۴۶/۵۶
۱۰	۶۴۶/۱۲	۶۴۸/۰۱	۶۴۶/۷۳	۶۴۶/۵۶

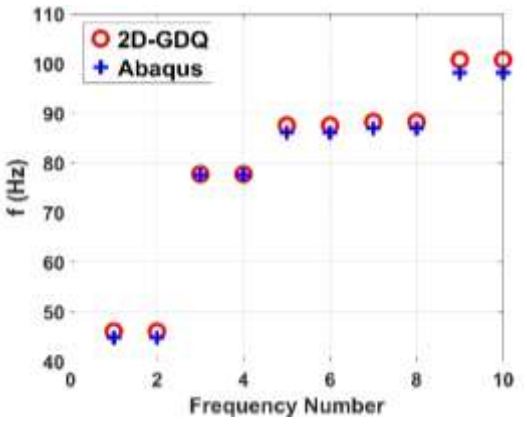
در گام بعد، جهت اطمینان از صحت معادلات حاکم، مدل‌سازی ماده و اعمال شرایط مرزی، راستی‌آزمایی با استفاده از منابع معتبر و نرم‌افزار آباکوس انجام گرفت. بدین منظور، ابتدا پوسته‌ی مخروطی ایزوتروپ غیرچرخان در نظر گرفته شد و نتایج حاصل از حل با نرم افزار آباکوس مقایسه شد و نتایج از انطباق خوبی برخوردار بودند. همچنین برای بررسی صحت مدل‌سازی ماده متخلخل، این مواد در نرم‌افزار آباکوس برای یک پوسته استوانه‌ای دو سرگیردار مدل‌سازی شده و نتایج با کد متلب توسعه‌یافته مقایسه گردید. نتایج این مقایسه در شکل ۴ ارائه شده است. با بررسی این شکل می‌توان دریافت که نتایج حاصل از دو روش با دقت بالایی با یکدیگر انطباق دارند.

همچنین شکل مود مربوط به ۶ فرکانس نخست یک پوسته‌ی مخروطی به کمک نرم افزار آباکوس رسم و در شکل ۵ ارائه شده است. در آخرین مرحله از صحت‌سنجی، یک پوسته مخروطی چرخان به ابعاد

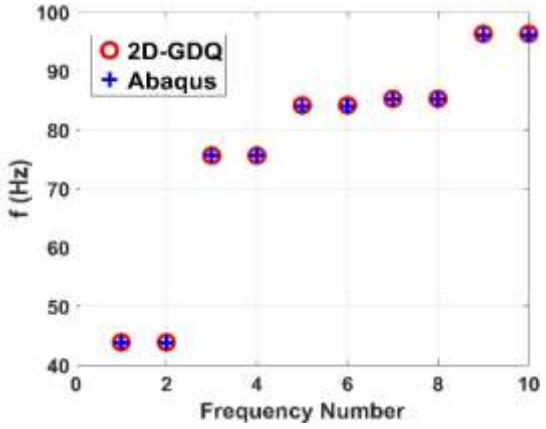
طول ۱۰، شعاع ۱ و زاویه نیم‌راس صفر با در نظر گرفتن جنس ایزوتروپ فولاد در نظر گرفته شده و فرکانس‌های طبیعی محاسبه و نتایج برای ضخامت‌های مختلف در جدول ۳ و ۴ ارائه شده سپس با مراجع معتبر [۲۹] و [۳۰] صحت‌سنجی شده است.



الف) توزیع تخلخل متقارن



ب) توزیع تخلخل نامتقارن نرم



ج) توزیع تخلخل یکنواخت

شکل۴. بررسی صحت سنجی مدل‌سازی ریاضی ماده متخلخل برای پوسته استوانه‌ای دو سر گیردار

قابل ذکر است که سرعت دورانی و فرکانس‌های طبیعی پیشرو (ω_f) و پسرو (ω_b) طبق رابطه ۵۷ بی‌بعد شده‌اند.

$$\omega_f^* = \omega_f R\sqrt{\frac{\rho(1-\upsilon^2)}{E}}$$
$$\omega_b^* = \omega_b R\sqrt{\frac{\rho(1-\upsilon^2)}{E}} \qquad (۵۷)$$
$$\Omega^* = \Omega R\sqrt{\frac{\rho(1-\upsilon^2)}{E}}$$

در رابطه بالا، R نشان دهنده شعاع کوچک پوسته مخروطی است. با بررسی‌های انجام‌شده، می‌توان از صحت معادلات حاکم استخراج‌شده برای پنل/پوسته مخروطی اطمینان حاصل کرد. همچنین، با توجه به شکل ۲، می‌توان تأیید کرد که مدل‌سازی ماده متخلخل برای توزیع‌های مختلف به‌درستی انجام شده است. بنابراین، در ادامه، ارتعاشات آزاد پنل/پوسته مخروطی متخلخل تحت سرعت‌های دورانی و شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

جدول ۳. فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای چرخان

تحت شرط مرزی C-C و ضخامت ۰/۰۵ متر (بر حسب هرتز)

شماره موج n	ω_f^*	ω_b^*	مرجع	Ω^*
۲	۰/۰۵۶۰	۰/۰۶۰۰	[۲۹]	Ω^* ۰/۰۲۵
۳	۰/۱۱۱۶	۰/۱۱۴۶		
۴	۰/۲۱۰۸	۰/۲۱۳۲		
۵	۰/۳۴۰۳	۰/۳۴۲۳		
۲	۰/۰۵۵۹	۰/۰۵۹۹	[۳۰]	
۳	۰/۱۱۱۵	۰/۱۱۴۵		
۴	۰/۲۱۰۶	۰/۲۱۳۰		
۵	۰/۳۴۰۰	۰/۳۴۲۰		
۲	۰/۰۵۶۰	۰/۰۶۰۰	تحقیق حاضر	
۳	۰/۱۱۳۲	۰/۱۱۴۲		
۴	۰/۲۰۹۱	۰/۲۰۹۵		
۵	۰/۳۳۶۸	۰/۳۴۱۶		

جدول ۴. فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای چرخان

تحت شرط مرزی C-C و ضخامت ۰/۰۲ متر (بر حسب هرتز)

شماره موج n	ω_f^*	ω_b^*	مرجع	Ω^*
۲	۰/۰۴۱۳	۰/۰۴۹۳	[۳۰]	Ω^* ۰/۰۵
۳	۰/۰۴۷۸	۰/۰۵۳۸		
۴	۰/۰۸۵۱	۰/۰۸۹۸		
۵	۰/۱۳۶۸	۰/۱۴۰۷		
۲	۰/۰۴۱۱	۰/۰۴۹۱	تحقیق حاضر	
۳	۰/۰۴۷۶	۰/۰۵۳۶		
۴	۰/۰۸۴۷	۰/۰۸۹۵		
۵	۰/۱۳۸۶	۰/۱۳۹۷		

۵-۲. نتایج

در این بخش، تأثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس طبیعی پوسته‌ی مخروطی چرخان مورد بررسی قرار می‌گیرد. نخست مقادیر فرکانس پایه پوسته‌ی چرخان برای مقادیر مختلف ماده No در جدول ۵ ارائه شده است. پوسته به ابعاد طول ۱۰، ضخامت ۰/۰۵ و زاویه نیم‌رأس ۳۰ درجه تحت شرایط مرزی دو سر گیردار بوده و سرعت دورانی بی‌بعد سیستم برابر با ۰/۰۵ در نظر گرفته شده است. انواع مواد ارائه‌شده در جدول، در واقع بیانگر انواع توزیع مواد متخلخل هستند که به ترتیب در معادلات ۱ تا ۴ تعریف شده‌اند.

جدول ۵. تأثیر No بر فرکانس طبیعی پوسته مخروطی چرخان

تحت شرط مرزی C-C $\alpha = 30^\circ$ و $\Omega^* = 0.05$

جنس	N_0	ω_f^*	ω_b^*
نوع۱	۰/۲	۰/۲۰۶۸	۰/۲۱۶۰
	۰/۴	۰/۲۰۱۹	۰/۲۱۳۷
	۰/۶	۰/۱۹۷۷	۰/۲۱۳۲
	۰/۸	۰/۱۹۵۷	۰/۲۱۲۱
نوع۲	۰/۲	۰/۲۰۳۵	۰/۲۱۱۷
	۰/۴	۰/۱۹۴۲	۰/۲۰۳۷
	۰/۶	۰/۱۸۳۳	۰/۱۹۳۳
	۰/۸	۰/۱۶۹۸	۰/۱۷۸۵
نوع۳	۰/۲	۰/۲۰۷۱	۰/۲۱۴۹
	۰/۴	۰/۲۰۲۳	۰/۲۱۰۸
	۰/۶	۰/۱۹۷۶	۰/۲۰۵۹
	۰/۸	۰/۱۹۳۷	۰/۲۰۰۰
نوع۴	۰/۲	۰/۲۰۴۸	۰/۲۱۲۷
	۰/۴	۰/۱۹۶۷	۰/۲۰۵۸
	۰/۶	۰/۱۸۶۸	۰/۱۹۷۰
	۰/۸	۰/۱۷۳۰	۰/۱۸۵۱
ماده همگن	۰/۲	۰/۲۱۱۶	۰/۲۱۸۷
	۰/۴	۰/۲۱۱۶	۰/۲۱۹۰
	۰/۶	۰/۲۱۱۶	۰/۲۱۹۰
	۰/۸	۰/۲۱۱۶	۰/۲۱۹۰

همان‌طور که از جدول ۵ مشهود است، با افزایش No به دلیل کاهش وزن و همچنین کاهش سفتی سیستم، فرکانس پایه پیشرو و پسرو روند نزولی پیدا می‌کند.

جدول ۶. تأثیر α بر فرکانس طبیعی پوسته مخروطی چرخان

تحت شرط مرزی C-C $N_0 = 0.2$ و $\Omega^* = 0.05$

جنس	α	ω_f^*	ω_b^*
نوع۱	۰	۰/۰۵۳۲	۰/۰۶۱۲
	۳۰	۰/۲۰۶۸	۰/۲۱۶۰
	۴۵	۰/۲۵۱۵	۰/۲۵۱۹
	۶۰	۰/۲۵۶۱	۰/۲۶۸۰
	۹۰	۰/۰۳۵۰	۰/۰۶۶۴
نوع۲	۰	۰/۰۵۲۱	۰/۰۶۰۱
	۳۰	۰/۲۰۳۵	۰/۲۱۱۷
	۴۵	۰/۲۴۷۳	۰/۲۴۸۴
	۶۰	۰/۲۵۳۰	۰/۲۶۴۸
	۹۰	۰/۰۳۴۱	۰/۰۶۵۸
نوع۳	۰	۰/۰۵۲۹	۰/۰۶۰۹
	۳۰	۰/۲۰۷۱	۰/۲۱۴۹
	۴۵	۰/۲۵۱۱	۰/۲۵۲۶
	۶۰	۰/۲۵۶۶	۰/۲۶۷۷
	۹۰	۰/۰۳۴۱	۰/۰۶۵۸
نوع۴	۰	۰/۰۵۲۳	۰/۰۶۰۳
	۳۰	۰/۲۰۴۸	۰/۲۱۲۷
	۴۵	۰/۲۴۸۶	۰/۲۵۰۰
	۶۰	۰/۲۵۴۴	۰/۲۶۵۸
	۹۰	۰/۰۳۳۹	۰/۰۶۵۷
ماده همگن	۰	۰/۰۵۴۳	۰/۰۶۲۲
	۳۰	۰/۲۱۱۶	۰/۲۱۸۷
	۴۵	۰/۲۵۴۷	۰/۲۵۷۸
	۶۰	۰/۲۶۱۲	۰/۲۷۰۹
	۹۰	۰/۰۳۵۱	۰/۰۶۶۴

علاوه بر جنس سیستم، پارامترهای هندسی نیز بر فرکانس‌های طبیعی تأثیرگذار هستند. یکی از این پارامترها، زاویه‌ی نیم‌رأس پوسته‌ی مخروطی است. همان‌طور که در جدول ۶ مشاهده می‌شود، با افزایش زاویه‌ی α، فرکانس طبیعی سیستم به دلیل افزایش سفتی، افزایش می‌یابد. با این حال، در زاویه‌ی نیم‌رأس ۹۰ درجه که پوسته به یک ورق دایره‌ای توخالی تبدیل می‌شود، به دلیل مقاومت کمتر ورق‌ها در مقایسه با پوسته‌ها، فرکانس به‌صورت ناگهانی کاهش می‌یابد. یکی دیگر از پارامترهای بسیار تأثیرگذار بر رفتار ارتعاشی پوسته‌ها، شرط مرزی آن‌هاست. با عنایت به جدول ۷ می‌توان تأثیر شروط مرزی مختلف بر فرکانس طبیعی سیستم را مشاهده کرد.

جدول ۷. تأثیر شرط مرزی بر فرکانس طبیعی پوسته مخروطی

چرخان $\alpha = 30^\circ$ و $\Omega^* = 0.05$ و $N_0 = 0.2$

جنس	شرط مرزی	ω_f^*	ω_b^*
نوع۱	C-C	۰/۲۰۶۸	۰/۲۱۶۰
	C-F	۰/۱۱۰۹	۰/۱۴۱۰
	S-S[10]	۰/۲۰۲۴	۰/۲۱۴۵
نوع۲	C-C	۰/۲۰۳۵	۰/۲۱۱۷
	C-F	۰/۰۸۴۶	۰/۱۱۴۸
	S-S	۰/۱۹۸۳	۰/۲۱۰۰
نوع۳	C-C	۰/۲۰۷۱	۰/۲۱۴۹
	C-F	۰/۱۱۳۳	۰/۱۴۳۳
	S-S	۰/۲۰۳۵	۰/۲۱۳۸
نوع۴	C-C	۰/۲۰۴۸	۰/۲۱۲۷
	C-F	۰/۰۹۸۹	۰/۱۲۸۹
	S-S	۰/۲۰۰۵	۰/۲۱۱۳
ماده همگن	C-C	۰/۲۱۱۶	۰/۲۱۸۷
	C-F	۰/۱۰۱۲	۰/۱۳۱۳
	S-S	۰/۲۰۷۱	۰/۲۱۷۳

با توجه به ماهیت چرخشی پوسته در این مطالعه، سرعت دورانی به عنوان یک پارامتر کلیدی بر پاسخ دینامیکی سیستم تأثیر می‌گذارد. همان‌طور که در جدول ۸ مشاهده می‌شود، در میان حالت‌های چرخان (با سرعت دورانی غیرصفر)، افزایش سرعت دورانی از ۵ به ۴۰ رادیان بر ثانیه باعث افزایش محسوس فرکانس‌های طبیعی می‌گردد. این رفتار را می‌توان به

اثرات سخت‌کنندگی ناشی از نیروهای گریز از مرکز و کوریولیس نسبت داد که با افزایش سرعت چرخش، سفتی مؤثر پوسته را افزایش می‌دهند.

با این حال، مقایسه مقادیر فرکانس در حالت غیرچرخان ($\Omega = 0$) با حالت‌های چرخان نشان می‌دهد که الگوی رفتاری به نوع توزیع تخلخل وابسته است. برای نمونه، در توزیع نوع ۲ و ۳، فرکانس‌های پس‌رونده در $\Omega = 5$) از مقدار حالت ساکن کمتر هستند، در حالی‌که در توزیع نوع ۴، فرکانس پس‌رونده در $\Omega = 10$) از حالت ساکن فراتر می‌رود. این پدیده ناشی از توزیع غیریکنواخت جرم در ضخامت پوسته متخلخل است که باعث می‌شود تعادل بین اثر نرم‌شوندگی ژیروسکوپی (در سرعت‌های پایین) و اثر سخت‌شوندگی تنش‌های گریز از مرکز (در سرعت‌های بالا) برای هر نوع تخلخل متفاوت باشد. بنابراین، اگرچه در دامنه وسیعی از سرعت‌ها، افزایش Ω منجر به افزایش فرکانس می‌شود، ولی مقدار فرکانس در سرعت‌های دورانی پایین می‌تواند کمتر یا بیشتر از حالت غیرچرخان باشد که این رفتار به طور مستقیم تحت تأثیر نوع توزیع تخلخل قرار دارد.

جدول ۸. تأثیر سرعت دوران بر فرکانس طبیعی پوسته مخروطی

تحت شرط مرزی C-C $N_0 = 0.2$ و $\alpha = 30^\circ$

جنس	Ω	ω_f^*	ω_b^*
نوع۱	۰	۰/۱۹۹۴	۰/۱۹۹۴
	۵	۰/۱۹۸۴	۰/۲۰۲۵
	۱۰	۰/۱۹۹۴	۰/۲۰۴۵
	۲۰	۰/۲۰۴۶	۰/۲۰۶۸
	۳۰	۰/۲۰۸۰	۰/۲۲۰۶
	۴۰	۰/۲۱۴۴	۰/۲۳۹۵
نوع۲	۰	۰/۲۴۵۲	۰/۲۴۵۲
	۵	۰/۱۹۳۷	۰/۱۹۷۸
	۱۰	۰/۱۹۴۷	۰/۲۰۱۱
	۲۰	۰/۲۰۱۳	۰/۲۰۲۳
	۳۰	۰/۲۰۴۸	۰/۲۱۶۵
	۴۰	۰/۲۱۱۳	۰/۲۳۵۷
نوع۳	۰	۰/۲۴۷۶	۰/۲۴۷۶
	۵	۰/۱۹۷۲	۰/۲۰۱۳
	۱۰	۰/۱۹۸۲	۰/۲۰۴۹
	۲۰	۰/۲۰۵۰	۰/۲۰۵۷
	۳۰	۰/۲۰۸۴	۰/۲۱۹۶
	۴۰	۰/۲۱۴۷	۰/۲۳۸۶
نوع۴	۰	۰/۱۹۵۷	۰/۱۹۵۷
	۵	۰/۱۹۴۷	۰/۱۹۸۸
	۱۰	۰/۱۹۵۷	۰/۲۰۲۵
	۲۰	۰/۲۰۲۶	۰/۲۰۳۳
	۳۰	۰/۲۰۶۱	۰/۲۱۷۴
	۴۰	۰/۲۱۲۵	۰/۲۳۶۶
ماده همگن	۰	۰/۲۰۲۶	۰/۲۰۲۶
	۵	۰/۲۰۱۶	۰/۲۰۵۷
	۱۰	۰/۲۰۲۵	۰/۲۰۹۷
	۲۰	۰/۲۰۹۶	۰/۲۰۹۸
	۳۰	۰/۲۱۲۹	۰/۲۲۳۳
	۴۰	۰/۲۱۹۰	۰/۲۴۲۰

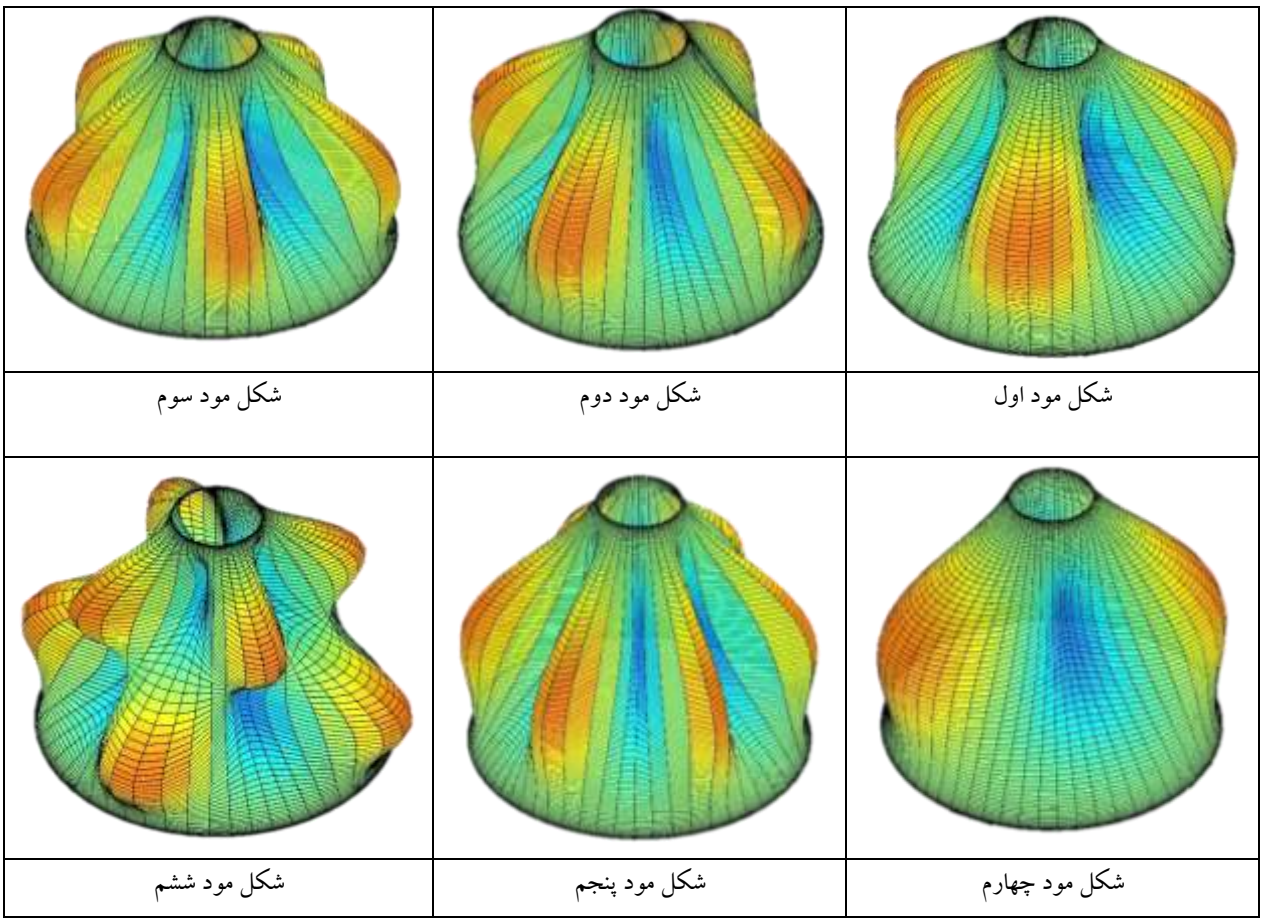
۶. نتیجه‌گیری

در این پژوهش، ارتعاشات آزاد پنل و پوسته‌های مخروطی متخلخل FGP چرخان با استفاده از روش عددی GDQ مورد مطالعه قرار گرفت. صحت و پایایی نتایج از طریق بررسی همگرایی، راستی‌آزمایی با مراجع معتبر و نرم‌افزار آباکوس، و همچنین تحلیل حساسیت پارامترهای کلیدی تأیید گردید.

بررسی‌ها نشان داد که افزایش پارامتر تخلخل (N_0) به دلیل کاهش جرم و سختی سیستم، موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود. از سوی دیگر، افزایش

زاویه نیم‌رأس پوسته (α) تا پیش از رسیدن به حالت ورق دایره‌ای (۹۰ درجه)، به علت افزایش سفتی سیستم، فرکانس‌های طبیعی را افزایش می‌دهد. همچنین، تأثیر سرعت دورانی بر سیستم به‌وضوح مشهود بود، به‌طوری‌که با افزایش سرعت چرخش، اثرات سخت‌کنندگی ناشی از نیروهای گریز از مرکز و کوریولیس منجر به افزایش مقادیر فرکانس طبیعی گردید. همچنین قابل ذکر است که در این پژوهش با توجه به مدل‌سازی سیستم با عدم تقارن محوری، می‌توان علاوه بر پوسته کامل، پنل‌های دورانی متخلخل که در صنعت کاردبرد بیشتری دارد را نیز بررسی کرد.

به‌طور کلی، می‌توان نتیجه گرفت که پارامترهای هندسی، مکانیکی و دورانی تأثیر بسزایی در رفتار دینامیکی پوسته‌های مخروطی متخلخل دارند و در طراحی و بهینه‌سازی چنین سازه‌هایی در کاربردهای مهندسی باید به‌دقت مورد توجه قرار گیرند. روش عددی به‌کارگرفته‌شده نیز توانایی و دقت بالایی در مدل‌سازی این پدیده‌های پیچیده از خود نشان داد.



شکل مود اول	شکل مود دوم	شکل مود سوم
شکل مود چهارم	شکل مود پنجم	شکل مود ششم

شکل ۵. شکل‌مودهای مربوط به شش فرکانس نخست پوسته مخروطی دوسرگیردار

۷. منابع

[1] A. Chadha, P. E. Sudhagar, M. Gunasegeran, and V. S. Veerappa, “Vibration Analysis of Composite Laminated and Sandwich Conical Shell Structures: Numerical and Experimental Investigation,” *Int. J. Struct. Stab. Dyn.*, vol. 23, no. 11, Jul. 2023, doi: 10.1142/S0219455423501201.

[2] B. P. Patel, M. Ganapathi, and S. Kamat, “Free vibration characteristics of laminated composite joined conical-cylindrical shells,” *J. Sound Vib.*, vol. 237, no. 5, pp. 920–930, 2000, doi: 10.1006/jsvi.2000.3018.

[3] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis*. 2003.

[4] X. Liu, W. Sun, H. Liu, H. Ma, D. Du, and H. Li, “Modeling and vibration analysis of bolted composite conical-conical shells with flanges,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 200, p. 111955, Jul. 2024, doi: 10.1016/j.tws.2024.111955.

[5] S. Javed, F. H. H. Al Mukahal, and M. A. Salama, “Free Vibration Analysis of Composite Conical Shells with Variable Thickness,” *Shock Vib.*, vol. 2020, pp. 1–15, Feb. 2020, doi: 10.1155/2020/4028607.

[6] H. Aris and H. Ahmadi, “Using the higher-order shear deformation theory to analyze the free vibration of stiffened rotating FGM conical shells in a thermal environment,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 183, p. 110366, Feb. 2023, doi: 10.1016/j.tws.2022.110366.

[7] M. Jabbari, M. Z. Nejad, and M. Ghannad, “Thermo-elastic analysis of axially functionally graded rotating thick truncated conical shells with varying thickness,” *Compos. Part B Eng.*, vol. 96, pp. 20–34, Jul. 2016, doi: 10.1016/j.compositesb.2016.04.026.

[8] A. Zamani and M. A. Rahgozar, “Vibration Analysis of Thick Sandwich Plates with Saturated FG-Porous Core Using Quasi-3D Shear Deformation Theory,” *J. Comput. Methods Eng.*, vol. 42, no. 1, Sep. 2023, doi: 10.47176/jcme.42.1.9621.

[9] Y. Wang and D. Wu, “Free vibration of functionally graded porous cylindrical shell using a sinusoidal shear deformation theory,” *Aerosp. Sci. Technol.*, vol. 66, no. March, pp. 83–91, 2017, doi: 10.1016/j.ast.2017.03.003.

[10] W. Xiao, S. Liu, X. Huang, X. Wu, and X. Yuan, “Vibration Analysis of Porous Functionally Graded Material Truncated Conical Shells in Axial Motion,” *Mechanika*, vol. 30, no. 2, pp. 123–134, 2024, doi: 10.5755/j02.mech.34592.

[11] G. Li and Z. Yan, “Application of a semi-analytical method to the dynamic analysis of functionally graded porous conical–conical–cylindrical shell,” *AIP Adv.*, vol. 13, no. 6, Jun. 2023, doi: 10.1063/5.0152397.

[12] N. Motazedian, A. A. Jafari, and M. A. Montaseri, “Free Vibration of Joined Spherical–Conical Panel and Shells Using the 2D-GDQ Method,” *Int. J. Struct. Stab. Dyn.*, Jul. 2024, doi: 10.1142/S0219455425501822.

[13] S. Sarkheil and M. Saadat Foumani, “Free vibrational characteristics of rotating joined cylindrical-conical shells,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 107, pp. 657–670, 2016, doi: 10.1016/j.tws.2016.07.009.

[14] P. Malekzadeh and Y. Heydarpour, “Free vibration analysis of rotating functionally graded

truncated conical shells," *Compos. Struct.*, vol. 97, pp. 176–188, 2013, doi: 10.1016/j.compstruct.2012.09.047.

[15] J. Wang, Y. Q. Wang, and Q. Chai, "Free vibration analysis of a spinning functionally graded spherical–cylindrical–conical shell with general boundary conditions in a thermal environment," *Thin-Walled Struct.*, vol. 180, p. 109768, Nov. 2022, doi: 10.1016/j.tws.2022.109768.

[16] S. M. Banijamali and A. A. Jafari, "Free vibration analysis of rotating functionally graded conical shells reinforced by anisogrid lattice structure," *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, vol. 51, no. 4, pp. 1881–1903, 2023, doi: 10.1080/15397734.2021.1881539.

[17] H. Amirabadi, F. Farhatnia, S. A. Eftekhari, and R. Hosseini-Ara, "Free vibration analysis of rotating functionally graded GPL-reinforced truncated thick conical shells under different boundary conditions," *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, vol. 50, no. 11, pp. 3821–3852, 2022, doi: 10.1080/15397734.2020.1822183.

[18] J. Zhao *et al.*, "Free Vibration and Dynamic Analysis on Free-Constrained Layer of Graphene Based on Composite Conical Shell via Jacobi–Ritz Method," *Int. J. Struct. Stab. Dyn.*, vol. 24, no. 02, Jan. 2024, doi: 10.1142/S0219455424500238.

[19] M. Shadmani, A. Afsari, R. Jahedi, and M. J. Kazemzadeh-Parsi, "Nonlinear free vibrations analysis of truncated conical shells made of bidirectional functionally graded materials," *J. Vib. Control*, vol. 30, no. 13–14, pp. 2842–2856, Jul. 2024, doi: 10.1177/10775463231186197.

[20] H. Bagheri, Y. Kiani, and M. R. Eslami, "Free vibration of conical shells with intermediate ring support," *Aerosp. Sci. Technol.*, vol. 69, pp. 321–332, Oct. 2017, doi: 10.1016/j.ast.2017.06.037.

[21] C. Shu, *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. London: Springer London, 2000. doi: 10.1007/978-1-4471-0407-0.

[22] F. Tornabene, E. Viola, and D. J. Inman, "2-D differential quadrature solution for vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annul plate structures," 2009. doi: 10.1016/j.jsv.2009.07.031.

[23] N. Motazedian and A. A. Jafari, "Free vibration of joined spherical-Cylindrical panel and shells using the 2D GDQ method," *J. Vib. Sound*, vol. 12, no. 23, pp. 156–176, 2023, doi: 20.1001.1.23831839.1402.12.23.12.0.

[24] H. Bagheri, Y. Kiani, and M. R. Eslami, "Free vibration of joined conical-conical shells," *Thin-Walled Struct.*, vol. 120, pp. 446–457, Nov. 2017, doi: 10.1016/j.tws.2017.06.032.

[25] H. Bagheri, Y. Kiani, and M. R. Eslami, "Free vibration of FGM conical–spherical shells," *Thin-Walled Struct.*, vol. 160, no. November 2020, p. 107387, Mar. 2021, doi: 10.1016/j.tws.2020.107387.

[26] T. Y. Ng, H. Li, and K. Y. Lam, "Generalized differential quadrature for free vibration of rotating composite laminated conical shell with various boundary conditions," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 45, no. 3, pp. 567–587, Mar. 2003, doi: 10.1016/S0020-7403(03)00042-0.

[27] K. Gao, W. Gao, B. Wu, D. Wu, and C. Song, "Nonlinear primary resonance of functionally graded porous cylindrical shells using the method of multiple scales," *Thin-Walled Struct.*, vol. 125, no. December 2017, pp. 281–293, 2018, doi: 10.1016/j.tws.2017.12.039.

[28] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. CRC Press, 2006. doi:

10.1201/9780849384165.

[29] T. Saito and M. Endo, “Vibration of finite length, rotating cylindrical shells,” *J. Sound Vib.*, vol. 107, no. 1, pp. 17–28, May 1986, doi: 10.1016/0022-460X(86)90279-8.

[30] S. Sun, S. Chu, and D. Cao, “Vibration characteristics of thin rotating cylindrical shells with various boundary conditions,” *J. Sound Vib.*, vol. 331, no. 18, pp. 4170–4186, 2012, doi: 10.1016/j.jsv.2012.04.018.

پی‌نوشت

[1] Functionally Graded Material, FGM
[2] Functionally Graded Porous, FGP
[3] Generalized Differential Quadrature, GDQ
[4] Symmetric Porosity Distribution
[5] Non-symmetric Porosity Stiff Distribution
[6] Non-symmetric Porosity Soft Distribution
[7] Chebyshev–Gauss–Lobatto
[8] Clamped-Free
[9] Clamped-Clamped
[10] Simply Supported- Simply Supported