مقاله پژوهشی

توسعه روشی برای کاهش مرتبه مدل کوپل آکوستیک سازه خودرو

محمدرضا رحیمی‌نژاد*
کارشناسی ارشد
دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی
mrahiminejad96@email.kntu.ac.ir

شهرام آزادی
دانشیار
دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی
Azadi@kntu.ac.ir

گلسا قناتی
دکترای تخصصی
دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی
gghanati@mail.kntu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۵/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۶/۱۰

چکیده

در خودرو منابع نوفه زیادی وجود دارد، نوفه‌های انتقالی از سازه که از اجزا منتقل می‌شوند و نوفه‌های انتقالی از هوا که در محیط پخش می‌شوند. منابع نوفه شامل زنجیره انتقال قدرت، نوفه‌های ناشی از تایر، نوفه آیرودینامیک و ... هستند. صدای داخل کابین اتومبیل یکی از مهم‌ترین عوامل در راحتی سرنشین در خودرو است. ازاین‌رو داشتن مدل دقیق جهت کنترل و تحلیل ارتعاشی دقیق‌تر سیستم از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. شبیه‌سازی و تحلیل مدل کوپل شده‌ی سازه و محفظه آکوستیکی خودرو با دقت مناسب بسیار پیچیده است، زیرا یک مدل المان محدود نزدیک به واقعیت شامل درجات آزادی زیادی است. ازاین‌رو روش‌های کاهش مرتبه جهت ساده‌سازی مدل اصلی با درجات آزادی بالا به یک مدل ساده‌تر با درجات آزادی پایین و استفاده از مدل کاهش یافته در تحلیل‌ها و طراحی کنترل‌کننده موجب صرفه‌جویی در زمان انجام محاسبات و هزینه‌ها می‌شود. روش‌های متعددی به‌منظور کاهش مرتبه سیستم‌ها وجود دارد. کاهش مرتبه سیستم با دیدگاه روش‌هایی براساس تصویر کردن داده‌ها و روش‌هایی برپایه یافتن انرژی معادل سیستم اصلی طبقه‌بندی می‌شوند. در این پژوهش دو روش کاهش مرتبه مورد بررسی قرار گرفته است، روش اول روش زیرفضای کرایلف که براساس تصویرکردن داده‌ها است، روش دوم روش کوپلینگ مودال، که براساس استخراج شکل مودهای مدل سازه و محفظه آکوستیکی به‌صورت مجزا و کوپل کردن آنها است.

در نهایت مدل کوپل کاهش‌یافته شبیه‌سازی شده و پارامترهای فشار صوت و جابه‌جایی سازه نیز در این مدل‌ها در طیف فرکانسی مختلف بررسی شده است.

واژگان کلیدی: مدل کوپل سازه-آکوستیک، کاهش مرتبه، کوپلینگ مودال، زیرفضای کرایلف، الگوریتم ارنولدی

۱. مقدمه

موضوع راحتی سرنشین درخودرو یکی از مهم‌ترین مزیت‌های خودرو در رضایت مشتریان محسوب می‌شود. مسئله صوت در کابین خودرو، شامل کوپل سازه و سیال که مسئله‌ای از نوع وابستگی معادلات سیال سازه است و پاسخ هریک بر دیگری اثرگذار خواهد بود.

اینگونه مسائل شامل پیچیدگی معادلات ریاضی هستند که حل تحلیلی این مسائل بسیار مشکل است و تنها مسائل با هندسه ساده و فرضیات ساده‌کننده امکان حل تحلیلی خواهند داشت. در اکثر موارد برای اهداف تحقیقات صنعتی استفاده ازروش‌های حل عددی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در این پژوهش مدل سازه آکوستیکی[۱] خودرو و روش‌های کاهش مرتبه سیستم مورد بررسی قرار گرفته است.

مدل سازه متشکل از بدنه خودرو که به‌صورت پوسته طراحی شده است، در مجاورت با محفظه آکوستیکی که کابین داخل خودرو است قرار دارد.

یکی از قدرتمندترین و به‌روزترین روش‌ها در شبیه‌سازی مدل‌های سازه–آکوستیکی، استفاده از روش المان محدود است [۲]، همچنین برای محفظه آکوستیکی نیز می‌توان از روش المان مرزی که در پژوهش [۱] مورد بررسی قرار گرفته، می‌توان استفاده نمود. معادلات استخراج شده در حوزه فرکانسی یا زمان می‌توانند بررسی شوند.

از نرم‌افزار انسیس[۲] نیز جهت مدل‌سازی و استخراج اطلاعات مورد نیاز، استفاده شده است.

برای استخراج معادلات به روش المان محدود، به تعداد درجات آزادی هر گره متغیر خواهیم داشت. این روش یکی از نزدیک‌ترین شبیه‌سازی‌های یک مسئله فیزیکی خصوصا برای مدل‌های کوپل شده است. اما مشکل تحلیل مدل‌های المان محدود هزینه محاسباتی بالای آنها است.

همان‌طورکه پیش‌تر اشاره شد، به تعداد درجات آزادی مدل معادله المان مرزی خواهیم داشت، درجات آزادی مضربی از تعداد گره‌ها خواهند بود. این معادلات برای تحلیل‌های دینامیکی به‌خصوص حوزه زمانی می‌بایست معادلات مدل برای هر پله[۳] زمانی حل شوند و این موضوع توان محاسباتی بالایی نیاز خواهد داشت.

روش‌های کاهش مرتبه[۴] می‌توانند تعداد درجات آزادی مدل را به تعداد دلخواه کاهش دهند. مدل کاهش یافته که تقریبی از مدل اصلی است می‌تواند در شبیه‌سازی‌ها و کنترل مورد استفاده گیرد که از لحاظ محاسباتی نیاز به توان پردازشی بالایی نخواهد داشت [۳].

در این پژوهش دو روش کاهش مرتبه مورد بررسی قرار گرفته است که روش اول روش کوپلینگ مودال و روش دوم زیرفضای کرایلف هستند. روش اول براساس شناسایی قطب‌های غالب و روش دوم براساس تطبیق مومان[۵]های سیستم است.

۲. مدل آکوستیک–سازه‌ای

در مسائل کوپل آکوستیک–سازه‌ای فشار صوت داخل کابین علاوه‌بر ویژگی‌های آکوستیکی به برهم‌کنش مابین سطح مشترک سازه و محفظه آکوستیکی نیز وابستگی دارد. این‌گونه مسائل به اختصار FSI[۶] نامیده می‌شود.

کوپلینگ بین سازه و سیال در مسائل FSI می‌تواند از نوع قوی یا ضعیف باشند. در این مسئله به‌دلیل سنگین بودن سازه که شامل بدنه خودرو و رقیق بودن سیال هوای داخل کابین نوع کوپلینگ از نوع ضعیف[۷] است. درصورت ویسکوز بودن سیال و سازه‌ی سبک استفاده از این فرض موجب تولید خطای قابل‌ملاحظه‌ای می‌شود [۴].

درخصوص مدل‌سازی المان محدود مطابق شکل ۱و ۲ به‌ترتیب مدل سازه‌ی خود و مدل محفظه‌ی آکوستیکی صورت گرفته است. مدل سازه به‌صورت پوسته[۸] و محفظه‌ی آکوستیکی شامل سیال محبوس در محفظه است.

۳. معادلات حاکم بر مدل سیال سازه‌ای

معادلات موج آکوستیکی که از معادلات ناویراستوکس و پیوستگی استخراج می‌شود، برای یک سیال تراکم‌پذیر و عدم وجود جریان متوسط و محیط آکوستیکی همگن به فرم زیر خلاصه می‌شود. [۱۴]

$$\partial \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 P = c^2 \frac{\partial Q_a}{\partial t} \qquad (۱)$$

در معادله ۱ پارامترهای، P فشار آکوستیکی سیال، c سرعت صوت، Q_a جرم اضافه‌ی سیال به واحد حجم است.

معادلات دیفرانسیلی حاکم بر پوسته درحال ارتعاش نیز به شرح زیر است.

$$\nabla^{\mathrm{T}} \sigma_s + b_s = \rho_s \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \qquad (۲)$$

در معادله ۲ پارامترهای، W جابه‌جایی سازه، ρ_s چگالی سازه، b_s نیروی حجمی، σ_s تانسور تنش است.

شرایط کوپلینگ در مرز بین سازه و محیط آکوستیکی و شرط پیوستگی در جابه‌جایی و فشار بین دو دامنه اعمال خواهد شد.

$$\begin{aligned} W_{ns} &= u_{na} \\ \sigma_n &= -p \end{aligned} \qquad (۳)$$

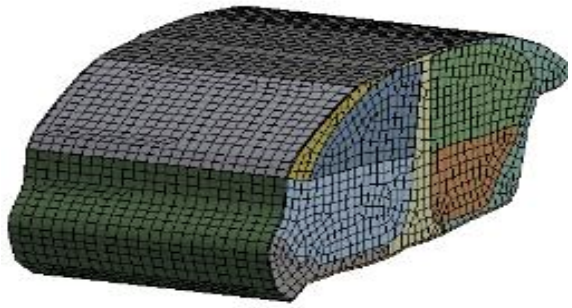
در رابطه ۳ کمیت‌های u_{na} و W_{ns} جابه‌جایی نرمال سیال و سازه، σ_n نیز تانسور تنش عمود برسطح است.

روش المان محدود یکی ازدقیق‌ترین شبیه‌سازی‌ها برای اینگونه سیستم‌ها است. در این روش فرمولاسیون متفاوتی برای مدل عددی کوپل آکوستیک سازه‌ای ارائه شده است.

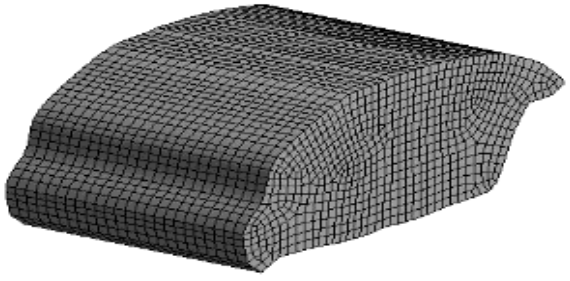
در مسئله کاهش مرتبه چالش رسیدن به یک مدل پایدار وجود دارد. برخی روش‌های کاهش مرتبه، پایداری مدل کاهش یافته را با درنظر گرفتن باند خطا تضمین می‌کنند. برای مثال روش برش متعادل[۹] [۸] و روش تقریب هنکل[۱۰] [۷] که براساس حل معادلات لیاپانوف هستند. مشکل اصلی این روش‌ها زمان بالای حل هستند و مناسب برای مدل‌ها با درجات آزادی بالا نیستند.

روش زیرفضای کرایلف[۱۱] برای مدل‌ها با درجات آزادی بالا دقت مناسبی را دارا است اما تضمینی بر پایداری سیستم ندارد. در پژوهش ون دویل و همکاران فرمولاسیونی برای مدل میرا شده ارائه شده است که مدل اصلی تحت این فرمولاسیون منجربه مدل کاهش یافته‌ی پایدار می‌شود. همچنین به‌جای استفاده از پارامتر فشار آکوستیکی از تابع پتانسیل آکوستیکی در معادلات استفاده شده است [۵]. پیشتر نیز استفاده از معادلات متقارن و استفاده از پتانسیل آکوستیکی توسط اورستاین پیشنهاد شده است [۹].

پژوهش ون اوپم و همکاران نیز برای ارائه مدل پایدار سازه–آکوستیکی و استخراج مدل کاهش یافته، توزیع فشار صوت در محیط صورت گرفته است [۶].



شکل ۱. مدل المان محدود سازه



شکل ۲. مدل المان محدود محفظه آکوستیکی

٤. معادلات گسسته شده مدل کوپل آکوستیک سازه‌ای

در این پژوهش از مدل آکوستیک سازه‌ای نامیرا استفاده شده است. معادلات به‌صورت ترکیب خطی فشار و جابه‌جایی هستند [۱۰].

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 \\ \rho {K_c}^{\mathrm{T}} & M_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{W} \\ \ddot{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s & -K_c \\ 0 & K_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

در معادله ۴، کمیت‌های M_s و K_s ماتریس‌های جرم و سختی سازه‌ای، و ماتریس‌های M_a و K_a ماتریس‌های جرم و سختی مدل آکوستیکی هستند. $\boldsymbol{\rho}$ چگالی هوا، F_s نیز ماتریس نیروی وارد بر سازه است. ورودی برای منبع آکوستیکی نیز درنظرگرفته نشده است. ماتریس K_c نیز ماتریس کوپلینگ بین سازه و سیال است.

اثر ارتعاشات سازه بر ناحیه سطح مشترک محفظه آکوستیکی باعث ایجاد شرط مرزی از نوع سرعت نرمال بر محفظه آکوستیک شده، به‌طوری‌که سرعت نرمال در مرز محفظه آکوستیک برابر سرعت نرمال در سازه مجاور است [۳].

$$\vec{V}_c^{\,e} = -\omega^2 \rho_0 (K_C^e)^{\mathrm{T}} \overrightarrow{W}^e \quad (۵)$$

در رابطه ۵، ω سرعت زاویه‌ای، ρ_0 چگالی سیال (هوا)، K_C^e ماتریس کوپلینگ سازه و محفظه آکوستیکی و $\vec{V}_c^{\,e}$ سرعت نرمال ناحیه مشترک سازه–سیال است.

همچنین فشار وارد بر سازه در محل تداخل سیال سازه نیز قابل تبدیل در نیرو در سازه است.

$$\vec{F}_c^{\,e} = K_C^e \vec{P} \quad (۶)$$

در رابطه۶ مشابه رابطه ۵، K_C^e ماتریس کوپلینگ سازه و محفظه آکوستیکی و $\vec{F}_c^{\,e}$ بردار نیرو در ناحیه مشترک سازه–سیال است. ماتریس کوپلینگ بین سازه و محفظه آکوستیکی K_c معادل انتگرال ضرب داخلی توابع شکل[۱۲] آکوستیکی و سازه‌ای است که بر روی فصل مشترک سازه و محفظه آکوستیکی گرفته می‌شود [۵].

$$K_c = \int_{\Gamma_c} [N_a^e]^{\mathrm{T}} \vec{n}^{e\mathrm{T}} [N_S^e] d\Gamma \quad (۷)$$

توابع شکل در معادله ۷ وابسته به نوع المان انتخابی در روش المان محدود است. هر المان تابع شکل مختص خود را دارا است. برای مثال تابع شکل المان از نوع پوسته با المان صلب متفاوت است.

در رابطه۷ پارامترهای Γ_c برابر سطح مشترک سازه–سیال، $[N_a^e]$ برابر تابع شکل المان آکوستیکی، $[N_S^e]$ تابع شکل المان سازه‌ای است. $\vec{n}^{e\mathrm{T}}$ بردار جهت عمود بر سازه (به سمت خارج از سازه) است.

انتگرال‌گیری عددی معادله ۷ شامل پیچیدگی‌های انتگرال‌گیری برداری است. برای این موضوع، روش انتگرال‌گیری مربع‌بندی گاوس[۱۳] پیشنهاد شده است.

تحلیل معادلات مدل اصلی از لحاظ محاسباتی بسیار زمان‌بر است. در این مثال تعداد درجات آزادی برای مدل سازه ۲۷۶۰۶ و برای محفظه آکوستیکی ۶۵۹۷۰ هستند، که در مجموع درجات آزادی مدل کوپل شده شامل۹۳۵۷۶ درجه آزادی است. در تحلیل هارمونیک این تعداد معادلات می‌بایست برای هر فرکانس حل شود و با توجه به پله فرکانسی و بازه فرکانسی تعداد معادلات ملزم به حل بسیار زیاد خواهد بود.

۵. روش کاهش مرتبه‌ی کوپلینگ مودال

فرمولاسیون ارائه شده توسط فهی و گاردونیو [۱۱] در مدل‌های کوپل آکوستیک سازه‌ای برای یافتن پاسخ سیستم کوپل شده، به‌صورتی است که پاسخ کل سیستم برابر با مجموع ترکیب شکل مودهای سازه و مدل محفظه آکوستیکی است.

شکل مودهای سازه درحالت خلاء و بدون لحاظ کردن محفظه آکوستیکی محاسبه می‌شود. همچنین شکل مودهای محفظه

آکوستیکی با فرض مطلقا صلب بودن مرزهای اطراف، محاسبه می‌شود.

$$W(r_s,\omega)=\sum_{m=1}^{N_s} w_m(\omega)\phi_m(r_s) \qquad (۸)$$

در رابطه ۸ برای سازه $\phi_m(r_s)$ برابر شکل مود mام در موقعیت دلخواه بر روی سازه است وپارامتر $w_m(\omega)$ ضریب مشارکت[۱۴] در مود mام است.

$$P(r,\omega)=\sum_{m=1}^{N_a} p_n(\omega)\psi_n(r) \qquad (۹)$$

رابطه ۹ برای محفظه آکوستیکی نیز مشابه رابطه ۸، $p_n(\omega)$ ضریب مشارکت در مود nام و $\psi_n(\mathrm{r})$ برابر شکل مود nام در موقعیت دلخواه بر روی محفظه آکوستیکی، N_a و N_s تعداد شکل مودهای آکوستیکی و سازه‌ای است.

مطابق جدول ۱ و ۲ ، شکل مودهای سازه‌ای و آکوستیکی از مدل المان محدود را با استفاده از آنالیز مودال محاسبه شده است. برای مدل سازه به تعداد N_s و برای محفظه آکوستیکی N_a شکل مود مورد نیاز خواهد بود.

به‌صورت تئوری تعداد فرکانس‌ها و شکل مودهای یک مدل ارتعاشی پیوسته بی‌نهایت است. اما محاسبه چنین امری ممکن نیست و تعداد فرکانس‌های استخراج شده می‌تواند سه الی چهار برابر بازه فرکانس مورد تحلیل باشد.

$$\begin{bmatrix} \Lambda_m(\omega_m^2-\omega^2) & -S[K_{Mc}] \\ (-\omega^2)S[K_{Mc}] & \dfrac{\Lambda_m}{\rho_0 c_0^2}(\omega_n^2-\omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_m \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m \\ \dot{Q}_n \end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

درنهایت مدل کوپل ماتریسی به فرم معادله ۱۰ خواهد بود.

ρ_0 چگالی سیال، c_0 سرعت صوت در سیال، کمیت $\dot{Q}_n$ شتاب حجمی مودال[۱۵] است. Λ_m بیانگرجرم مودال، K_{Mc} ماتریس کوپلینگ در روش کوپلینگ مودال، ω_n , ω_m به‌ترتیب فرکانس طبیعی سازه در مود mام و فرکانس طبیعی محفظه آکوستیکی در مود nام، S مساحت سطح سازه در ناحیه مشترک سازه–سیال است.

$$K_{cr}=\frac{1}{S}\int_S \psi_n(r_s)\phi_m(r_s)dS \qquad (۱۱)$$

در رابطه ۱۱ ماتریس کوپلینگ بین شکل مودهای سازه‌ای و آکوستیکی تعریف می‌شود. انتگرال‌گیری مابین سطح مشترک محفظه آکوستیکی و سازه صورت می‌گیرد. ماتریس کوپلینگ در روش کوپلینگ مودال با ماتریس کوپلینگ معادلات اصلی متفاوت است. در کوپلینگ مودال، کوپلینگ مابین شکل مودهای سازه و محفظه آکوستیکی صورت می‌گیرد. اما در روش مدل اصلی کوپلینگ مابین دو نوع المان متفاوت (به جهت استفاده در نواحی مرز مشترک) صورت خواهد گرفت.

پارامتر Λ_m جرم مودال، به صورت زیر قابل محاسبه است.

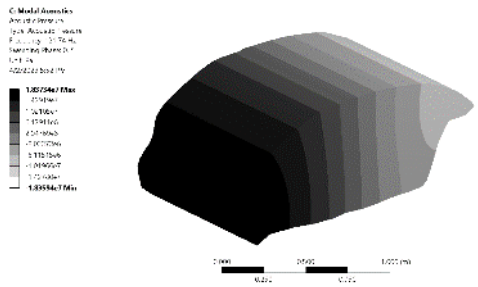
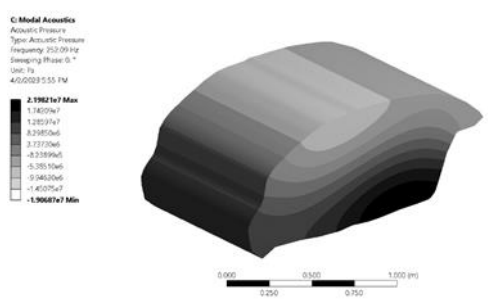
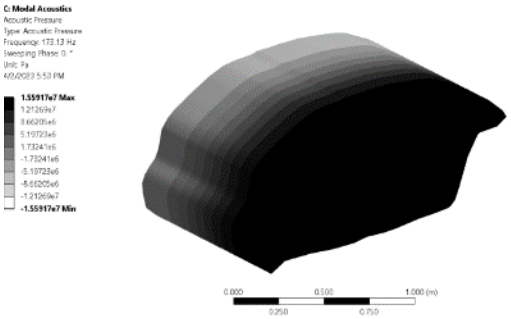
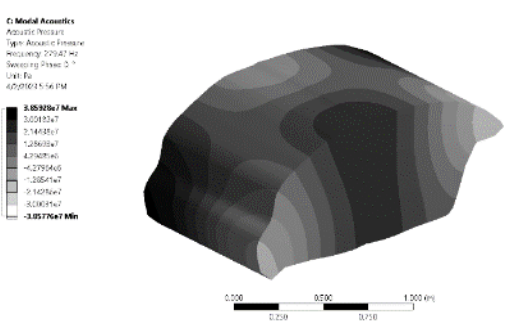
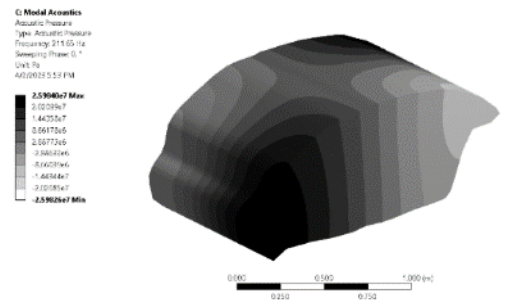
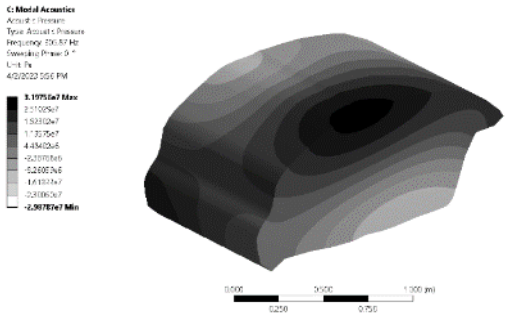
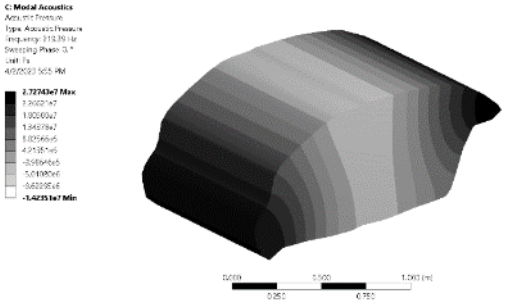
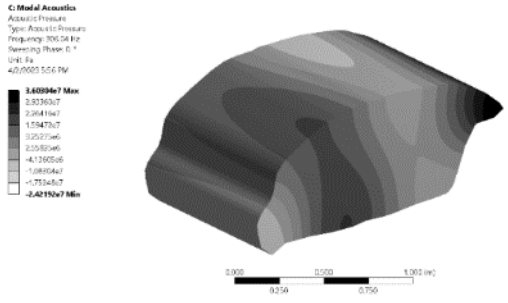
$$\Lambda_m=\int_S M(r_0)\psi_m^2(r_0)dS \qquad (۱۲)$$

در رابطه ۱۲، $M(r_0)$ جرم سازه در ناحیه r_0 است.

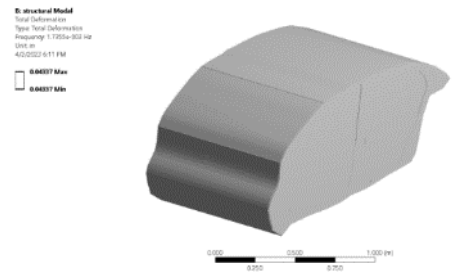
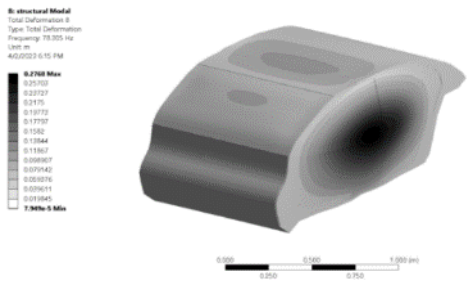
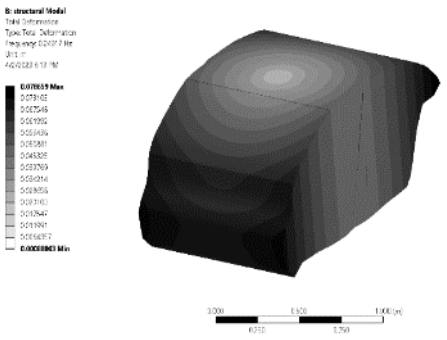
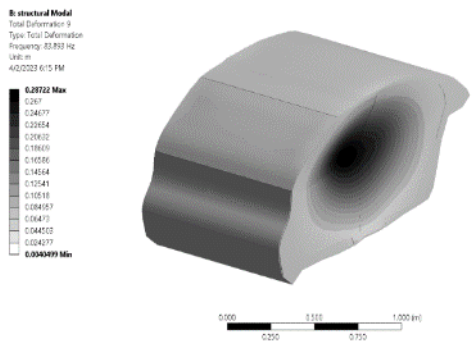
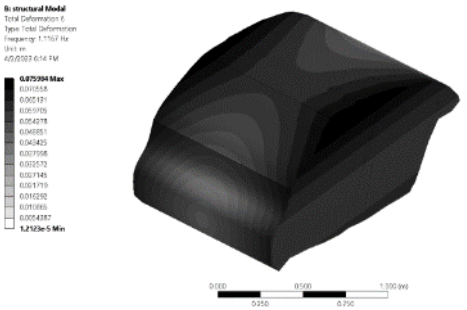
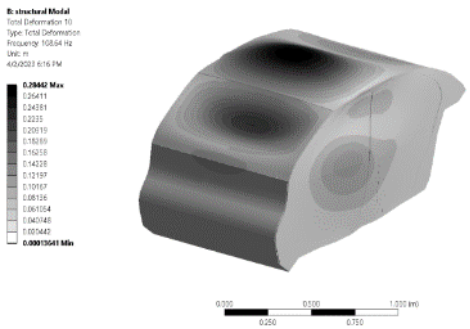
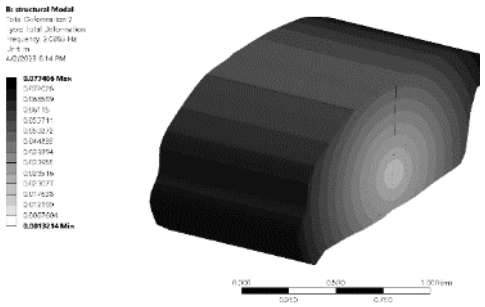
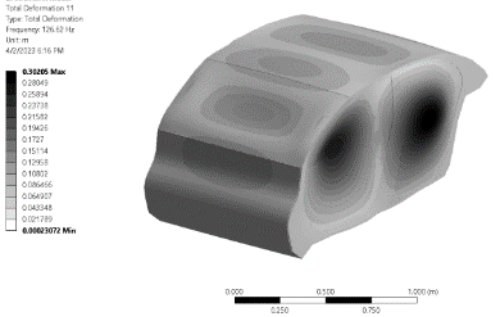
استفاده از روش کوپلینگ مودال ملزم به استخراج شکل مودهای مدل سازه و آکوستیک جداگانه از یکدیگر است، و درجات آزادی مدل کاهش یافته برابر با مجموع تعداد شکل مود استخراج شده از سازه و محفظه آکوستیکی است.

با استفاده از آنالیز مودال فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای هر دو مدل سازه و محفظه آکوستیکی قابل محاسبه هستند.

جدول۱. شکل مودهای محفظه آکوستیکی در هشت شکل مود اول

مود	شکل مودهای ارتعاشی محفظه‌ی آکوستیکی
اول	
پنجم	
دوم	
ششم	
سوم	
هفتم	
چهارم	
هشتم	

جدول۲. شکل مودهای سازه‌ای (شکل مود ۱الی۳ مود صلب هستند)

مود	شکل مودهای ارتعاشی سازه			
اول		هفتم		
چهارم		هشتم		
پنجم		نهم		
ششم		دهم		

در روش کوپلینگ مودال به تعداد شکل مودهای استخراج شده از مدل می‌توان درجات آزادی را کاهش داد. در این پژوهش برای محفظه آکوستیکی ۹۹ شکل مود و برای سازه ۱۰۰ شکل مود استخراج شده است و درنهایت ۱۹۹ درجه‌ی آزادی برای مدل کوپل سازه–آکوستیکی خواهیم داشت.

٦. روش کاهش مرتبه زیرفضای کرایلف

رویکرد مهم دیگر در فرایند کاهش مرتبه سیستم‌های خطی، روش زیرفضاهای کرایلف است که برمبنای تصویر کردن داده‌ها است. این روش در ابتدا برای حل مسائل خطی بزرگ مقیاس گسترش یافته و سپس در زمینه مهندسی کنترل و فرایند کاهش مرتبه سیستم به‌کار برده شد.

هدف مطابقت ساختار تطبیق ممان کاهش مرتبه یافته و تابع تبدیل کاهش مرتبه یافته تابع تبدیل مدل اصلی است.

زیرفضای کرایلف به‌صورت رابطه ۱۳ تعریف می‌شود [۱۳]:

$$\begin{aligned}\operatorname{colspan}(V_m) &= \kappa_m(A,B)\\ &= \operatorname{colspan}^{16}\{B, AB, \dots, A^{m-1}B\}\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

$A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ چندجمله‌ای مرتبه‌ی N و $B \in \mathbb{R}^{N\times m}$ بردار شروع است. بردارهای $B, AB, \dots, A^{m-1}B$ که سازنده زیرفضا هستند، بردارهای پایه نامیده می‌شوند.

در زیرفضای کرایلف الگوریتم ارنولدی[۱۷] امکان ساختن پایه‌های تعامد را فراهم می‌کند. قدم اصلی در این الگوریتم روش تعامد گرام اشمیت[۱۸] است [۱۲].

ساختار بردار V_m دارای تعامد یکه است و ستون‌های آن از پایه‌های زیرفضای کرایلف هستند، زیرا هر ستون بردار V_m را می‌توان به‌صورت یک چندجمله‌ای برحسب A از مرتبه m-1 نوشت [۱۳].

معادلات پایه تعامد استخراج شده از ارنولدی را نیز می‌توان به‌حالت معادله۱۴ نوشت:

$$\begin{aligned}AV_m &= V_m A_{Vm} + v_{m+1}C_{Vm},\\ B &= V_m B_{Vm}\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

$$\begin{aligned}A_{Vm} = V_m^{\mathrm{T}}AV_m,\ B_{Vm} = V_m^{\mathrm{T}}B\ ,\ C_{Vm}\\ = v_{m+1}^{\mathrm{T}}AV_m\end{aligned}$$

در رابطه ۱۴ بردار $v_{m+1} \in \mathbb{R}^n$ بخشی از ماتریس $V_{m+1} = [V_m, v_{m+1}]$ است. ستون‌های ماتریس V یک پایه برای زیرفضای کرایلف داده شده تشکیل می‌دهد. در این الگوریتم در هر مرحله یک بردار بیشتر ساخته می‌شود که نسبت به تمام بردارهای قبلی ساخته شده متعامد بوده. اگرچه زمانی‌که m نسبتا بزرگ باشد الگوریتم ممکن است یک مجموعه بردارهای پایه‌ای را تولید کند که دیگر نسبت به‌هم مستقل خطی نیستند، در چنین شرایطی فرایند تقلیل[۱۹] معرفی می‌شود که برای حذف بردارهای وابسته خطی تا حد یک تقریب معین استفاده می‌شود، درواقع زمانیکه m به اندازه کافی کوچک نباشد به این معنی است که همه بردارها، مستقل خطی نیستند دراین‌صورت باید m را کاهش دهیم.

برای تشکیل معادلات فضای حالت و سپس فضای حالت کاهش یافته درصورتی‌که ماتریس جرمی سیستم معکوس‌پذیر نباشد رسیدن به معادلات ممکن نیست. ون دویل [۵] پیشنهاد استفاده از معادلات در فرم فضای توصیف‌گر به‌جای استفاده از فضای حالت را داده است.

معادله ۱۵بیانگر معادلات سیستم اصلی در فضای حالت است.

$$\begin{cases}x^{\circ} = AX + Bu\\ \quad y = C^{\mathrm{T}}X\end{cases} \qquad (۱۵)$$

با استفاده از الگوریتم ارنولدی [۱۲] می‌توان پایه‌های تعامد مدل کاهش یافته را داد. معادلات فضای حالت کاهش یافته به فرم معادلات ۱۶ خواهد بود.

$$\begin{cases}X_r^{\circ} = W^{\mathrm{T}}AVX_r + W^{\mathrm{T}}bu\\ Y_r = C^{\mathrm{T}}VX_r\end{cases} \qquad (۱۶)$$

در رابطه ۱۶، V, W پایه‌های تعامد هستند. الگوریتم ارنولدی شامل دو دیدگاه روش یک‌طرفه و دوطرفه است. در روش دوطرفه هر دو پایه تعامد V, W محاسبه می‌شود، در این روش حجم محاسبات دو برابر حالت یک‌طرفه خواهد بود اما در

مواردی می‌تواند دقت بالاتری داشته باشد. در روش یک‌طرفه تنها یکی از پایه‌ها محاسبه می‌شود و تعریف تعامد یکه را ارضا می‌کند.

$$V = W, \qquad V_m V_m^{\mathrm{T}} = I_m \tag{۱۷}$$

الگوریتم ارنولدی در روش دوطرفه ذاتا ناپایدار است که در اینجا از روش یک‌طرفه استفاده شده است. مطابق رابطه ۱۷ در الگوریتم یک طرفه، تنها یک پایه تعامد خواهیم داشت. به ماتریس V، پایه تعامد[۲۰] گفته می‌شود.

۶-۱. شرایط حفظ پایداری مدل کاهش یافته در مدل کوپل سازه-آکوستیکی

استفاده از مدل کوپل شده و کاهش مرتبه مدل فضای حالت در برخی موارد امکان‌پذیر نیست. یکی از مشکلات اساسی، عدم دستیابی به ماتریس A به‌دلیل خطای محاسبات عددی است. درصورت وجود کوپلینگ ضعیف بین سازه و سیال می‌توان هر بخش را جداگانه کاهش داد و سپس مدل نهایی را مطابق معادلات ۲۱ کوپل نمود.

باتوجه به معادله ۴، ماتریس‌های سختی K_a و K_s که از مدل المان محدود به‌ترتیب محفظه آکوستیکی و سازه استخراج (همچنین ماتریس‌های جرم) می‌شوند. این ماتریس‌ها متقارن بوده و می‌توانند مثبت معین[۲۱] و یا نیمه‌مثبت معین[۲۲] باشند.

مقادیر ویژه صفر بیانگر مودهای صلب ارتعاشی در این ماتریس‌ها است، که در دستگاه مختلط در مبدا قرار می‌گیرند.

ماتریس V محاسبه شده توسط الگوریتم ارنولدی یک‌طرفه به‌صورت معادله ۱۸ است.

$$V = \begin{bmatrix} V_s \\ V_a \end{bmatrix} \tag{۱۸}$$

در معادله ۱۸، $V_s \epsilon \mathbb{C}^{n_s \times r}$ ماتریس پایه تعامد سازه است که تعداد سطرهای این ماتریس با درجات آزادی سازه برابر است. (r درجه آزادی مدل کاهش یافته است.) ماتریس $V_a \epsilon \mathbb{C}^{n_a \times r}$ ماتریس پایه تعامد محفظه آکوستیکی است.

مطابق پژوهش ون دویل [۵] می‌توان معادلات سیستم اصلی که به فرم $W - \varphi$ که معادلات براساس جابه‌جایی و تابع پتانسیل آکوستیکی هستند، نوشت. این معادلات توسط ماتریس پایه تعامد V قابلیت دستیابی به معادلات کاهش یافته را خواهد داشت. اما معادلات به فرم پتانسیل-جابه‌جایی سیستم کاهش یافته قابلیت تبدیل به فشار-جابه‌جایی را نخواهد داشت.

برای رسیدن به معادلات به فرم $W - P$ که برحسب فشار جابه‌جایی است، می‌بایست از ماتریس پایه تعامد بسط داده شده[۲۳] استفاده نمود.

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} V_s & 0 \\ 0 & V_s \end{bmatrix} \tag{۱۹}$$

درنهایت مدل کاهش یافته $W - P$ برای مدل نامیرا کوپل آکوستیک سازه به فرم معادلات ۲۰ خواهد بود [۵].

$$\begin{aligned} &M_{wP}\ddot{\hat{X}} + K_{wP}\hat{X} = F_{wP} \\ &M_{wP} = \begin{bmatrix} M_s & 0 \\ \rho {K_c}^{\mathrm{T}} & M_a \end{bmatrix} \\ &F_{wP} = \begin{bmatrix} F_s \\ 0 \end{bmatrix} \\ &K_{wP} = \begin{bmatrix} K_s & -K_c \\ 0 & K_a \end{bmatrix} \\ &M_{wPr} = \tilde{V}^{\mathrm{T}} M_{wP} \tilde{V}\,, \\ &K_{wPr} = \tilde{V}^{\mathrm{T}} K_{wP} \tilde{V} \\ &F_{wPr} = \tilde{V}^{\mathrm{T}} F_{wP} \tilde{V} \\ &\hat{X} = \begin{bmatrix} \widehat{W} \\ \widehat{P} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۲۰}$$

۶-۲. محدودیت‌های روش کاهش مرتبه مدل کوپل سازه-آکوستیکی توسط روش زیرفضای کرایلف

سیستم اصلی می‌بایست شامل ویژگی‌های زیر باشد [۵]:

۱. ماتریس‌های تشکیل‌دهنده سیستم می‌بایست مستقل از فرکانس باشند.

۲. ماتریس‌های سختی K_s, K_a باید متقارن و مثبت معین (یا مثبت نیمه‌معین) باشند.

۳. ماتریس‌های جرم M_s, M_a باید متقارن و مثبت معین باشند.

۴. ماتریس پایه تعامد V می‌تواند شامل هر ماتریس موهومی از مرتبه‌ی $V \epsilon \mathbb{C}^{n\times r}$ باشد، با شرط اینکه مرتبه این ماتریس[۲۴] برابر با r باشد.

تبدیل ماتریس پایه تعامد به ماتریس پایه تعامد بسط یافته در تشکیل معادلات پایدار الزامی است.

۷. تحلیل هارمونیک مقایسه روش کاهش مرتبه کوپلینگ مودال و زیرفضای کرایلف

روش کوپلینگ مودال با استفاده از آنالیز مودال به‌صورت جداگانه شکل مودهای سازه محفظه آکوستیکی را استخراج کرده و با استفاده از ماتریس کوپلینگ دو مدل را کوپل می‌کند. در روش زیرفضای کرایلف مدل کوپل شده اصلی به فرم معادلات فضای حالت درخواهد آمد و سپس ماتریس‌های فضای حالت سیستم اصلی به مدل کاهش یافته با مرتبه دلخواه در خواهد آمد. توابع تبدیل مدل کاهش یافته تقریبی از تابع تبدیل مدل اصلی است.

$$F = F_0 sin(\Omega_i t + \theta_i) \qquad (۲۱)$$

در تحلیل هارمونیک یک نیروی هارمونیک به بزرگی $F_0 =$ 100 نیوتن بر بدنه خودرو اعمال کرده و سپس پاسخ فرکانسی را در بازه فرکانسی Ω, ۰ تا ۴۰۰ هرتز می‌یابیم.

در شکل ۳ محل اعمال نیروی هارمونیک به سازه و در شکل ۴ موقعیت حدودی سر سرنشین به‌عنوان خروجی درنظر گرفته شده است.

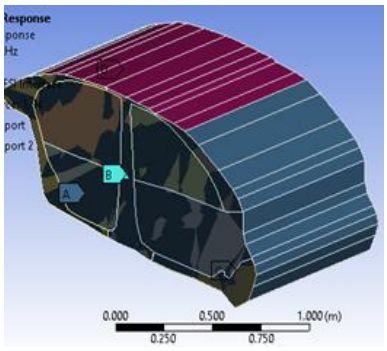
در شکل ۵ و شکل۶ مقایسه‌ای بین پاسخ فرکانسی[۲۵] مدل المان محدود و دو روش کاهش مرتبه الگوریتم ارنولدی و روش کوپلینگ مودال صورت گرفته است.

در شکل ۶ فشار صوت ناشی از تحریک هارمونیک بدنه در محل تقریبی سر سرنشین اندازه‌گیری شده است. در مدل کاهش یافته با توجه به معادلات کاهش یافته و همچنین با کاهش مرتبه ماتریس خروجی می‌توان پاسخ موردنظر را در نقطه دلخواه استخراج نمود.

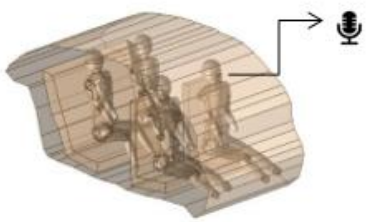
باتوجه به شکل ۵ و ۶ می‌توان دریافت که روش کوپلینگ مودال در فرکانس‌های پایین انحراف بیشتری نسبت به مدل دارد. الگوریتم ارنولدی برخلاف روش کوپلینگ مودال با توجه به عدم نیاز به نمونه‌برداری فرکانسی از مدل اصلی محدودیتی در این مورد ندارد. در الگوریتم ارنولدی با توجه به منحصربه‌فرد نبودن ماتریس A_r و بهینه نبودن مدل کاهش یافته، به این منظور روش ارنولدی معقول[۲۶] ارائه شده که مورد بحث این پژوهش نیست. خطای نسبی بین روش‌های زیرفضای کرایلف و روش کوپلینگ مودال با مدل المان محدود در رابطه ۲۲ آورده شده است.

با استفاده از رابطه ۲۲ می‌توان خطای نسبی مابین پاسخ فرکانسی مدل المان محدود و مدل‌های کاهش یافته را محاسبه کرد. به این منظور در شکل ۷ خطای نسبی آورده شده است.

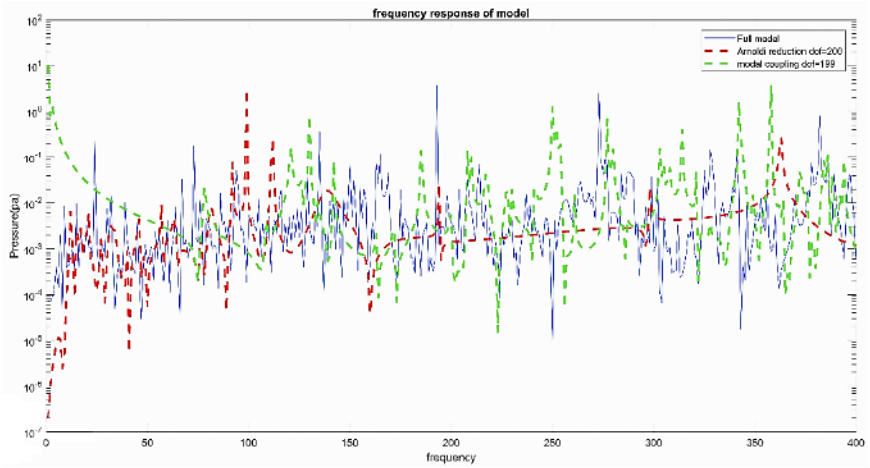
$$e = \frac{|\mathrm{FRF_{ROM}} - \mathrm{FRF_{FE}}|}{|\mathrm{FRF_{FE}}|} \qquad (۲۲)$$



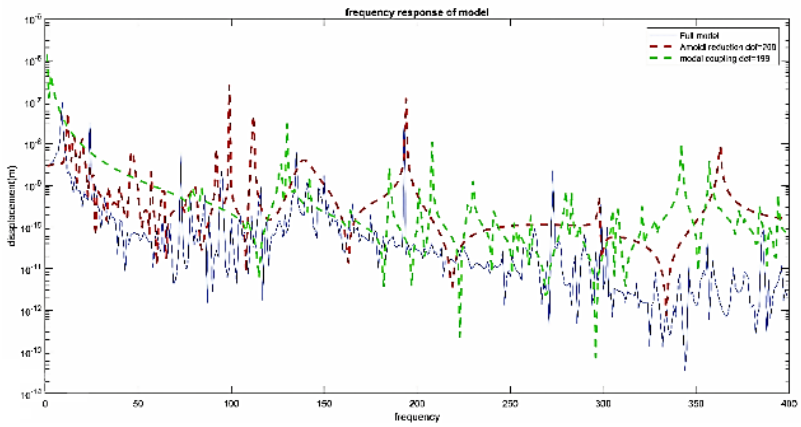
شکل۳. محل اعمال نیرو در سازه در نقطه B



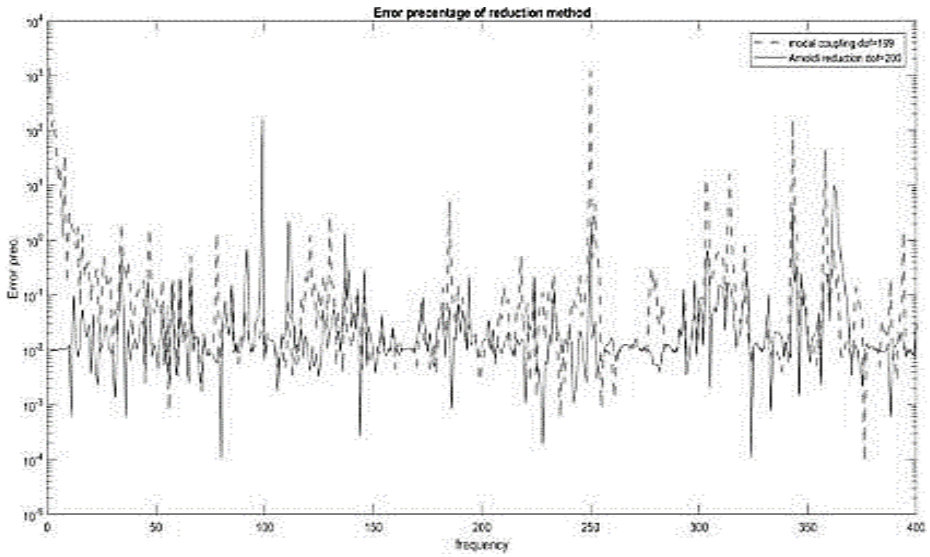
شکل۴. محل تقریبی سر راننده به‌عنوان خروجی فشار صوت



شکل۵ . پاسخ فرکانسی فشار صوت ومقایسه مدل اصلی با روش کاهش مرتبه ارنولدی و مودال



شکل ۶. پاسخ فرکانسی جابه‌جایی سازه و مقایسه مدل اصلی با روش کاهش مرتبه ارنولدی و مودال



شکل۷. درصد خطای نسبی پاسخ فرکانسی فشار صوت مدل اصلی و روش‌های کاهش مرتبه ارنولدی و مودال

۸. نتیجه‌گیری

در این مقاله پیاده‌سازی روش‌های کاهش مرتبه برای مدل کوپل آکوستیک سازه‌ای در خودرو مورد بررسی قرار گرفته است. مدل‌سازی مدل سازه و سیال جداگانه توسط نرم‌افزار المان محدود صورت گرفته است و اطلاعات مربوط به هر دو مدل استخراج شده است. با استفاده از روش کوپلینگ و اثر دادن ماتریس کوپلینگ مدل-سازه سیال کوپل، شبیه‌سازی شده است. اما تحلیل این مدل بسیار زمان‌بر خواهد بود. ازاین‌رو روش‌های کاهش مرتبه زیرفضای کرایلف و روش کوپلینگ مودال جهت کاهش مرتبه مدل اصلی مورد بررسی قرار گرفته است. روش کوپلینگ مودال از شکل مودهای سیستم اصلی به‌صورت جداگانه برای سازه و محفظه آکوستیکی محاسبه می‌شود و سپس توسط ماتریس کوپلینگ کاهش یافته هر دو مدل کوپل می‌شوند. از مشکلات این روش عدم استفاده از ورودی‌ها در ایجاد مدل کاهش یافته است و مدل کاهش یافته با استفاده از خواص ذاتی سیستم ایجاد می‌شود.

ضعف دیگر این روش استخراج داده‌ها از دو مدل غیرکوپل است، به همین دلیل استفاده از روش کوپلینگ مودال در مدل-هایی که شامل کوپلینگ قوی هستند مناسب نیست. در روش زیرفضای کرایلف مدل اصلی کوپل شده به فرم فضای حالت درمی‌آید، سپس با استفاده از ماتریس A و ماتریس ورودی B به‌عنوان بردار شروع‌کننده حلقه تکرار در الگوریتم، پایه‌های تعامد قابل محاسبه است.

از لحاظ زمان پردازش مدل اصلی تحلیل هارمونیک مدل FSI کامل با تعداد درجات آزادی۹۳۵۷۶ در نرم‌افزار انسیس با در اختیار داشتن ۳۲ گیگابایت حافظه رم و سی‌پی‌یو زئون ۲۰ هسته‌ای حدود ۶/۵ ساعت خواهد بود که در معادلات کاهش یافته۲۰۰ درجه آزادی این زمان به کسری از ثانیه بدل خواهد شد. مدل کاهش یافته برای بازه فرکانسی میانی عملکرد مناسبی خواهد داشت اما برای فرکانس‌های بالاتر میزان خطا در ارائه مدل افزایش خواهد داشت.

۹. مآخذ

[1] Gaul, Lothar, and Martin Fischer, "Fast multipole boundary element method for the simulation of acoustic-structure interaction", *Fluid Structure Interaction and Moving Boundary Problems IV* 92, 2007, pp.313-319.

[2] Zienkiewicz, Olek C., Robert L. Taylor, and Jian Z. Zhu, "*The finite element method: its basis and fundamentals",* Elsevier, 2005.

[3] Antoulas, A. C., "Approximation of large-scale dynamical systems: An overview", *IFAC Proceedings, 2004,* Vol.37, no.11, vol19-28.

[4] Howard, Carl Q., Colin H. Hansen, and Anthony Zander, "Vibro-acoustic noise control treatments for payload bays of launch vehicles: discrete to fuzzy solutions", *Applied Acoustics,* 2005, Vol.66, no.11, pp.1235-1261.

[5] van de Walle, Axel, Frank Naets, Elke Deckers, and Wim Desmet, "Stability-preserving model order reduction for time-domain simulation of vibro-acoustic FE models", *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 2017, Vol.109, no.6, pp.889-912.

[6] van Ophem, Sjoerd, Onur Atak, Elke Deckers, and Wim Desmet, "Stable model order reduction for time-domain exterior vibro-acoustic finite element simulations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 2017, Vol.325, pp.240-264.

[7] Glover, Keith, "All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L, ∞-error bounds", *International journal of control*, 1984, Vol.39, no.6, pp.1115-1193.
[8] Moore, Bruce, "Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction", *IEEE transactions on automatic control*, 1981, Vol.26, no.1, pp.17-32.
[9] Everstine, G. C., "Finite element formulatons of structural acoustics problems", *Computers & Structures*, 1997, Vol.65, no.3, pp.307-321.
[10] Morand, Henri J-P., and Roger Ohayon. "Fluid structure interaction: applied numerical methods", *(No Title)*, 1995.
[11] Fahy, Frank J., "*Sound and structural vibration: radiation, transmission and response",* Elsevier, 2007.
[12] Arnoldi, Walter Edwin, "The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem", *Quarterly of applied mathematics*, 1951, Vol.9, no.1, pp.17-29.
[13] Bai, Zhaojun, "Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems", *Applied numerical mathematics*, 2002, Vol.43, no.1-2, pp.9-44.
[14] Ghanati, Golsa, and Shahram Azadi, "Active control of vehicle's interior sound field with considering acoustic structural coupling", *Modares Mechanical Engineering*, 2018, Vol.18, no.7, pp.177-186.

پی‌نوشت:

1. Vibro Acoustic Model
2. Ansys 2019R3
3. Time step
4. Model Order Reduction
5. Moment Matching
6. Fluid Structure Interaction
7. Weak Coupling
8. Shell
9. Balance Truncation
10. Hankel Norm Approximation
11. Krylov subspaces
12. Shape Function
13. Gauss Quadrature
14. Modal Participation Factor
15. Modal volume Acceleration
16. Column Span
17. Arnoldi method
18. Gram-Schmidt Orthogonalization
19. Deflation
20. orthonormal basis
21. Positive Definite
22. Positive Semi Definite
23. Extended Projection Basis Or Extended Orthogonal Basis
24. Rank of Matrix
25. Frequency Response Function (FRF)
26. Iterative Rational Krylov Algorithm(IRKA)