

تحلیل پاسخ فرکانسی سیستم دیسک و پره همراه با نامیزانی در جرم و

سختی

سعید ضیایی راد
استاد
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی
اصفهان

szrad@cc.iut.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۲۳

احسان رئیسی استبرق*
استادیار
گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و
مهندسی، دانشگاه جیرفت

e.raeisi@ujiroft.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۴/۰۵

چکیده

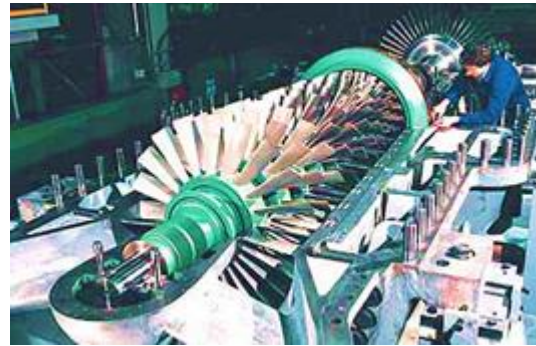
تمام پره‌های سیستم دیسک و پره در حالت ایده‌آل از نظر خصوصیات هندسی و خصوصیات مادی کاملاً یکسان و مشابه یکدیگر هستند. در حالت واقعی گاهی اوقات تفاوت‌های کوچکی بین خصوصیات پره‌های مختلف به وجود می‌آید. این تفاوت‌ها ناشی از تolerانس‌های ساخت، سائیده شدن و آسیب‌های خارجی هستند. این تفاوت‌های کوچک که نامیزانی نامیده می‌شوند تأثیر زیادی بر روی پاسخ دینامیکی پره‌های دیسک دارند. در این پژوهش در ادامه بررسی‌های انجام شده بر روی سیستم دیسک و پره، ماکزیمم پاسخ فرکانسی سیستم دیسک و پره در حالت وجود نامیزانی در جرم و ضریب سختی پره مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور ابتدا یک مدل مناسب برای سیستم دیسک و پره انتخاب شده و معادلات حرکت آن به دست می‌آید. سپس پاسخ سیستم در حالت میزان محاسبه می‌شود. در ادامه پاسخ فرکانسی سیستم نامیزان با استفاده از الگوریتم ژنتیک برای حالتی که جرم پره‌ها متفاوت باشد محاسبه می‌گردد. همچنین ماکزیمم پاسخ فرکانسی برای حالت وجود نامیزانی در ضریب سختی پره‌ها نیز به دست می‌آید. در نهایت ماکزیمم پاسخ برای وجود نامیزانی هم‌زمان در جرم و ضریب سختی هر پره محاسبه می‌شود. نتایج نشان می‌دهد وجود نامیزانی اندک در سیستم، می‌تواند پاسخ سیستم را نسبت به حالت میزان تا ۵/۵۶۳ برابر افزایش دهد. این میزان افزایش ماکزیمم پاسخ سیستم نامیزان نسبت به سیستم میزان، برای سیستم نامطلوب است و می‌تواند باعث شکست پره‌ها و یا برخورد آنها به یکدیگر در سرعت‌های زیاد شود. به همین دلیل این ضریب در طراحی اولیه این سیستم‌ها باید مدنظر قرار گیرد.

واژگان کلیدی: دیسک و پره، نامیزانی، جرم پره، ضریب سختی، پاسخ ارتعاشی.

۱. مقدمه

مشابه یکدیگر هستند. شکل ۱ یک سیستم دیسک و پره در توربوماشین‌ها را نشان می‌دهد که از تعداد زیادی پره مشابه تشکیل شده است.

تمام پره‌های یک سیستم دیسک و پره در حالت ایده‌آل از نظر خصوصیات هندسی و خصوصیات مادی کاملاً یکسان و



شکل ۱. سیستم دیسک و پره در توربوماشین‌ها

گاهی اوقات تفاوت‌های کوچکی بین خصوصیات پره‌های مختلف به‌وجود می‌آید که این تفاوت‌ها ناشی از تolerانس‌های ساخت، سائیده شدن و آسیب‌های خارجی هستند این تفاوت‌های کوچک که نامیزانی نامیده می‌شوند تأثیر زیادی بر روی پاسخ دینامیکی پره‌های دیسک دارند. اغلب مشاهده می‌شود که دامنه ارتعاشات سیستم دیسک و پره در حالت نامیزان نسبت به دامنه ارتعاشات سیستم در حالت میزان بسیار افزایش می‌یابد. این افزایش پاسخ لزوم در نظر گرفتن نامیزانی را هنگام طراحی این سیستم‌ها ضروری می‌نماید. ارتعاشات دیسک و پره در توربوماشین‌ها به‌صورت عمده به مرتبه تحریک موتور بستگی دارد. وقتی که دیسک و پره به‌صورت ناگزیر، در واقعیت نامیزان می‌شود میزان ارتعاشات بیش از اندازه افزایش می‌یابد که این افزایش میزان ارتعاشات می‌تواند منجر به مشکلات خطرناکی برای سیستم شود [۱-۲]. در سال‌های اخیر مطالعات زیادی توسط محققان برای شناسایی نامیزانی در پره‌ها انجام شده است [۳-۴]. اکثر مطالعات انجام شده بر روی توربوماشین‌ها، بر روی نامیزانی پره در این سیستم‌ها بحث می‌کنند و به بررسی ارتعاشات دیسک و پره نامیزان می‌پردازند.

ریواس و میگنولت ماکزیمم افزایش پاسخ پره به‌دلیل وجود نامیزانی در سیستم دیسک و پره را بررسی کردند و پاسخ در بدترین حالت را به‌دست آوردند [۵]. شین و همکاران نیز به بررسی سیستم دیسک و پره تحت تأثیر وجود نامیزانی در ضریب سختی پره‌ها پرداختند و پاسخ فرکانسی سیستم را

به‌دست آوردند [۶]. رئیسی و ضیایی‌راد در سال ۱۳۹۱ به بررسی نامیزانی در ضریب سختی و استهلاک سیستم دیسک و پره پرداختند و ماکزیمم پاسخ سیستم را در حالت وجود نامیزانی در ضریب سختی و ضریب استهلاک به‌دست آوردند. نتایج به‌دست آمده نشان داد که تغییری در حدود ۰/۲ درصد در ضریب سختی پره‌ها، می‌تواند افزایش پاسخی معادل تغییر در حدود ۷۵٪ در ضریب استهلاک پره‌ها را ایجاد کند. چنین موضوعی، نشان‌دهنده حساسیت زیاد پاسخ سیستم به تغییر در ضریب سختی هر پره بود [۷]. همچنین آنها در مقاله دیگری در سال ۲۰۱۳ به بررسی نامیزانی در سیستم دیسک و پره پرداختند و با استفاده از شبکه عصبی و الگوریتم ژنتیک ماکزیمم پاسخ سیستم نامیزان را به‌دست آوردند [۸]. در مطالعات قبلی انجام شده در این زمینه مقادیر متفاوتی برای افزایش دامنه سیستم نامیزان نسبت به سیستم میزان به‌دست آمده است. به‌عنوان مثال برای سیستمی با ۷۳ پره مقدار ۲/۴۳ توسط باشو و گریفین [۹] و برای سیستمی با ۹۲ پره مقدار ۵ توسط پتروف و اوینز [۱۰] از روش‌های محاسباتی به‌دست آمده‌اند. مقدار تجربی ۵/۲۸ برای سیستم دیسک و پره نامیزان با ۵۲ پره توسط کیسر و همکاران مشاهده شده است [۱۱]. همچنین رحیمی و ضیایی‌راد در سال ۲۰۱۰ برای یک مدل ۵۶ پره‌ای نامیزان، ضریب ۲/۹۵ را به‌دست آوردند [۱۲]. این مقادیر بزرگ افزایش دامنه نسبت به حالت میزان به‌دلیل وجود تفاوت‌های اندک و کوچک، لزوم مطالعه در این زمینه برای به‌دست آوردن این ضریب افزایش را نشان می‌دهد. برای کاهش میزان ارتعاشات ناشی از نامیزانی از روش‌های متفاوتی مانند استراتژی طراحی اولیه با نامیزانی عمدی [۱۳] و بهینه‌سازی نامیزانی در هنگام طراحی اولیه [۱۴] استفاده می‌شود.

رئیسی و همکاران در سال ۲۰۱۶ تأثیرات نامیزانی را بر روی رفتار دینامیکی سیستم دیسک و پره بررسی کردند. آنها در مطالعه خود رفتار غیرخطی سیستم را از مرتبه سه در نظر گرفتند [۱۵].

بیرو و همکاران در سال ۲۰۱۹ تجزیه و تحلیل ارتعاش محوری دیسک و پره یک توربین را انجام دادند. آنها در تحلیل خود برای پیدا کردن یک الگوی مناسب برای کاهش دامنه حرکت پره‌ها از مدلی استفاده کردند که در آن نامیزانی به صورت عمدی در خصوصیات پره‌ها ایجاد شده بود [۱۶]. بای و همکاران در سال ۲۰۲۰ تحقیقات وسیعی را در زمینه بررسی رفتار دیسک و پره نامیزان انجام دادند [۱۷-۱۹]. کان و ژائو به بررسی سیستم دیسک و پره در سال ۲۰۲۱ پرداختند. آنها در مطالعه خود رفتار ارتعاشی سیستم دیسک و پره را بررسی کردند و روش‌هایی برای کاهش ارتعاشات اینگونه سیستم‌ها ارائه کردند [۲۰].

در سال ۲۰۲۱، ژانگ و همکاران به منظور بهینه‌سازی کاهش ارتعاشات سیستم دیسک و پره از تکنیک مدل‌سازی کاهش مرتبه استفاده کردند [۲۱]. ژائو و همکاران در سال ۲۰۲۱ تحقیقات گسترده‌ای در زمینه تحلیل ارتعاش آزاد سیستم دیسک و پره در شرایط مختلف انجام دادند [۲۲-۲۴]. پن و همکاران تأثیر در نظر گرفتن پارامترهای مختلف ارتعاشی را بر روی رفتار ارتعاشی سیستم دیسک و پره در سال ۲۰۲۱ بررسی کردند [۲۵].

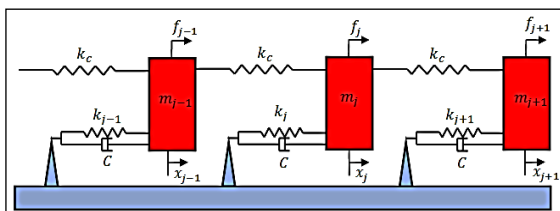
این تفاوت‌ها و تا حدی نتایج و بحث‌های متضاد شاید ناشی از استفاده مدل‌ها و مقادیر پارامترهای متفاوت در هر مطالعه است. در حالت کلی همه مطالعات قبلی نشان می‌دهد که وجود نامیزانی در سیستم می‌تواند تأثیرات نامطلوبی بر روی پاسخ فرکانسی سیستم داشته باشد. همان‌طور که از نتایج مطالعات قبلی مشخص می‌شود نامیزانی می‌تواند باعث افزایش قابل توجهی در دامنه ارتعاشی سیستم دیسک و پره شود و باعث ایجاد تأثیرات نامطلوبی بر روی سیستم گردد. به همین دلیل در این پژوهش تأثیرات وجود نامیزانی در جرم و ضریب سختی پره‌ها بر روی پاسخ فرکانسی سیستم بررسی شده است. نوآوری مطالعه حاضر در دو زمینه است:

در نظر گرفتن اثرات نامیزانی جرم، ضریب سختی پره‌ها و نامیزانی توام این دو پارامتر بر روی بدترین پاسخ سیستم استفاده از یک فرمولاسیون تحلیلی - عددی برای حل مسئله مورد نظر به جای در نظر گرفتن یک تحلیل کاملاً عددی. پیشبرد تحلیلی سبب شده است تا مسئله بهینه‌سازی در مدت زمان کم و با هم‌گرایی بهتر حاصل شود.

از این رو یک سیستم مناسب با بیست و دو پره انتخاب شده و معادلات حرکت آن نوشته شده و ماکزیمم پاسخ برای حالت میزان به دست آمده است. سپس با استفاده از الگوریتم ژنتیک بدترین الگو برای وجود نامیزانی در جرم و ضریب سختی پره به دست آمده و پس از آن ماکزیمم پاسخ برای سیستم محاسبه و رسم شده است. در نهایت نتایج سیستم میزان و نامیزان با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

۲. معادلات حرکت حاکم بر سیستم

مدل ارائه شده برای بررسی تأثیر وجود نامیزانی در جرم و ضریب سختی پره بر روی پاسخ فرکانسی سیستم در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲. مدل دینامیکی سیستم دیسک و پره

در این مدل، هر کدام از ۲۲ پره تشکیل‌دهنده سیستم، توسط یک فنر خطی و دمپر یک درجه آزادی، شبیه‌سازی شده‌اند. هر دو پره مجاور، توسط یک فنر خطی به یکدیگر متصل شده‌اند که مقدار سختی آن در این پژوهش برای تمام پره‌ها یکسان و برابر K_c فرض شده است. ضریب سختی بین پره‌ها (K_c) در برگیرنده اثرات هواکشسانی^۱ و انعطاف‌پذیری هر پره است. به علاوه، فرض می‌شود که ضریب استهلاک (C) برای تمام پره‌ها با هم برابر است و نامیزانی در جرم پره

با ساده‌سازی دو طرف رابطه ۴، این رابطه به صورت معادله ۵ بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} (-m_j \omega^2 + i\omega c + k_j + 2k_c)x_j \\ - k_c x_{j-1} - k_c x_{j+1} \\ = f_0 \end{aligned} \quad (5)$$

فرکانس طبیعی برای Γ امین مرتبه تحریک موتور با استفاده از رابطه ۶ محاسبه می‌شود [۲۶]. در این رابطه N تعداد پره‌های سیستم است که در پژوهش حاضر برابر با ۲۲ است.

$$\omega_r^2 = \frac{k_t}{m} + 4 \frac{k_c}{m} \sin^2\left(\frac{\pi r}{N}\right) \quad (6)$$

برای حل معادله ۱ و به دست آوردن جواب معادلات حرکت سیستم، ضریب بی بعد \bar{A}_j به صورت زیر پیشنهاد می‌شود [۵]:

$$\bar{A}_j = \frac{x_j}{\frac{f_0}{c\omega_r}} \quad (7)$$

با ضرب دو طرف تساوی معادله ۵ در ضریب $\frac{c\omega_r}{f_0}$ معادله به صورت رابطه ۸ نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} (-m_j \omega^2 + i\omega c + k_j \\ + 2k_c) \frac{c\omega_r}{f_0} x_j \\ - k_c \frac{c\omega_r}{f_0} x_{j-1} \\ - k_c \frac{c\omega_r}{f_0} x_{j+1} \\ = c\omega_r \end{aligned} \quad (8)$$

با استفاده از ضریب تعریف شده در رابطه ۷، رابطه ۸ به صورت رابطه ۹ بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} (-m_j \omega^2 + i\omega c + k_j + 2k_c) \bar{A}_j \\ - k_c \bar{A}_{j-1} - k_c \bar{A}_{j+1} \\ = c\omega_r \end{aligned} \quad (9)$$

رابطه ۹ را بر k_c تقسیم می‌کنیم. در نتیجه این رابطه به صورت رابطه ۱۰ خواهد بود.

(m_j) و سختی پره (k_j) در نظر گرفته می‌شود. اگرچه سیستم بیست و دو درجه آزادی معرفی شده، یک طرح ساده از سیستمی واقعی است؛ اما در تحقیق حاضر، چنین سیستمی فقط به عنوان نمونه، برای مطالعه اثر وجود نامیزانی بر روی پاسخ فرکانسی سیستم بررسی می‌شود.

معادله حرکت برای مدل دیسک و پره نشان داده شده در شکل ۲ که به صورت یک سیستم خطی چند درجه آزادی در نظر گرفته می‌شود به صورت رابطه ۱ است.

$$\begin{aligned} m_j \ddot{X}_j + c \dot{X}_j + (k_j + 2k_c) X_j \\ - k_c X_{j-1} - k_c X_{j+1} \\ = f_j(t) \end{aligned} \quad (1)$$

در رابطه ۱ m_j جرم پره، C سختی استهلاک بین دیسک و پره، k_j ضریب سختی فنر خطی بین پره و دیسک است (هنگامی که سیستم میزان است $k_j = k_t$ و $m_j = m_t$ است). همچنین K_c ضریب سختی فنر بین دو پره مجاور یکدیگر است. $f_j(t)$ نیز نیروی وارد بر Γ امین پره است که به صورت رابطه ۲ در نظر گرفته می‌شود.

$$f_j(t) = f_0 e^{i\omega t} \quad (2)$$

با فرض حل حالت دائم معادله ۱ به صورت $X_j(t) = x_j e^{i\omega t}$ (که x_j دامنه پاسخ سیستم است) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{X}_j(t) = x_j i\omega e^{i\omega t}, \\ \ddot{X}_j(t) \\ = -\omega^2 x_j e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3)$$

با جای گذاری رابطه ۳ در رابطه ۱ و فاکتورگیری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} [(-m_j \omega^2 + i\omega c + k_j + 2k_c)x_j \\ - k_c x_{j-1} \\ - k_c x_{j+1}] e^{i\omega t} \\ = f_0 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4)$$

۳. الگوریتم ژنتیک

تئوری بهینه‌سازی، نحوه به‌دست آوردن بهترین را بررسی می‌کند. بدین منظور بایستی چگونگی اندازه‌گیری و تفاوت میان مطلوب و نامطلوب را تشخیص داد. در بسیاری از امور زندگی، بهترین، ملاک داوری نیست بلکه پیشرفت به‌سوی بهترین معیار عمل است. بهینه‌یابی، نقطه یا نقاط بهینه را جستجو می‌کند. الگوریتم ژنتیک، تکنیک جستجویی در علم رایانه برای یافتن راه‌حل تقریبی برای بهینه‌سازی و مسائل جستجو است. این الگوریتم که به‌عنوان یکی از روش‌های تصادفی بهینه‌یابی شناخته شده، توسط جان هالند در سال ۱۹۶۷ ابداع شده است. بعدها این روش با تلاش‌های گلدبرگ در سال ۱۹۸۹، مکان خویش را یافته و امروزه نیز به‌واسطه توانایی‌های خویش، جای مناسبی در میان دیگر روش‌ها دارد [۲۷]. از این‌رو در مطالعه حاضر از الگوریتم ژنتیک که یک روش کارآمد برای حل مسائل بهینه‌سازی است، به‌منظور یافتن بدترین پاسخ و الگوی متناسب با آن، با وجود نامیزانی در جرم و ضریب سختی پره‌ها استفاده شده است. با توجه به این‌که هدف اصلی مقاله بحث در مورد الگوریتم ژنتیک نیست لذا از الگوریتم ژنتیک استاندارد باینری برای این منظور استفاده شده است. مشخصه‌های استفاده شده در الگوریتم ژنتیک، مطابق جدول ۱ است.

جدول ۱. مشخصه‌های استفاده شده در الگوریتم ژنتیک

ترکیب	ادغام چند نقطه‌ای (Multipoint)	٪۹۰
جهش	تصادفی (Multi-nonuniform)	٪۲
تعداد نسل	-	۱۰۰

$$\left(\frac{-m_j\omega^2 + k_j + 2k_c}{k_c}\right)\bar{A}_j + \frac{i\omega c}{k_c}\bar{A}_j - \overline{A_{j-1}} - \overline{A_{j+1}} = \frac{c\omega_r}{k_c} \quad (10)$$

برای سادگی بیشتر و حل راحت‌تر متغیرهای رابطه ۱۱ را فرض می‌کنیم.

$$\bar{k}_j = \frac{-m_j\omega^2 + k_j + 2k_c}{k_c}, \bar{k}_c = \frac{k_c}{c\omega} \quad (11)$$

با استفاده از متغیرهای جدید تعریف شده، رابطه ۱۰ به صورت رابطه ۱۲ نوشته می‌شود.

$$\bar{k}_j\bar{A}_j + \frac{i}{\bar{k}_c}\bar{A}_j - \overline{A_{j-1}} - \overline{A_{j+1}} = \frac{c\omega_r}{k_c} \quad (12)$$

سپس رابطه ۱۲ را در $\bar{k}_c\frac{\omega}{\omega_r}$ ضرب می‌کنیم، در این حالت رابطه به شکل رابطه ۱۳ نوشته می‌شود.

$$\frac{\omega}{\omega_r} [(\bar{k}_j\bar{k}_c + i)\bar{A}_j - \bar{k}_c\overline{A_{j-1}} - \bar{k}_c\overline{A_{j+1}}] = 1 \quad (13)$$

با تعریف متغیر جدید $A_j = \frac{\omega}{\omega_r}\bar{A}_j$ به صورت $A_j = \bar{A}_j$ داریم $\omega = \omega_r$ فرض $\omega = \omega_r$ در نتیجه رابطه ۱۳ به صورت رابطه ۱۴ بازنویسی می‌شود.

$$[(\bar{k}_j\bar{k}_c + i)A_j - \bar{k}_c A_{j-1} - \bar{k}_c A_{j+1}] = 1 \quad (14)$$

با استفاده از رابطه ۱۴ ضریب A_j برای بیست و دو پره در حالت وجود نامیزانی در جرم و ضریب سختی پره‌ها به‌دست می‌آید. برای محاسبه ماکزیمم ضریب A_j از الگوریتم ژنتیک استفاده شده است.

۴. یافته‌های تحقیق

در این قسمت نتایج به‌دست آمده برای سیستم بیست و دو درجه آزادی آورده شده است. ابتدا پاسخ سیستم در حالت میزان به‌دست آمده و نمودار آن رسم شده است. سپس با اعمال نامیزانی در جرم پره‌ها، با استفاده از الگوریتم ژنتیک ماکزیمم پاسخ به‌دست آمده است. در ادامه نامیزانی در ضریب سختی هر پره در نظر گرفته شده و نتایج استخراج گردیده است. در نهایت نامیزانی به‌صورت هم‌زمان در جرم و ضریب سختی هر پره در نظر گرفته شده و بدترین الگو و ماکزیمم پاسخ فرکانسی هر پره محاسبه شده است.

۴-۱. پاسخ فرکانسی سیستم میزان

در این قسمت نتایج مربوط به حل معادله ۱۴ برای سیستمی با بیست و دو پره آورده شده است. ابتدا پاسخ سیستم در حالت میزان و با توجه به مقادیر عددی موجود در جدول ۲ به‌دست آمده است [۲۶]. همچنین مقدار پارامتر f_0 برابر با یک در نظر گرفته شده است [۲۰].

جدول ۲. مقادیر عددی استفاده شده برای محاسبه پاسخ سیستم

میزان	
جرم هر پره (m_t)	۰/۰۱۱۴ کیلوگرم
ضریب سختی (k_t)	۴۳۰۰۰۰ نیوتن بر متر
ضریب سختی (k_c)	۴۵۴۳۰ نیوتن بر متر
ضریب استهلاک (C)	۱/۴۴۳ نیوتن ثانیه بر متر

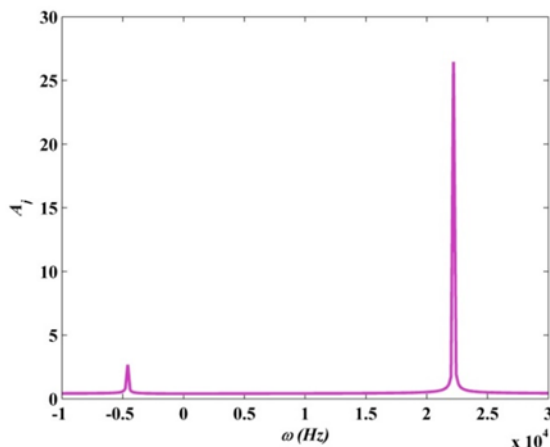
شکل ۳ پاسخ فرکانسی سیستم میزان برای بیست و دو پره را نشان می‌دهد. همان‌طور که از روی شکل مشخص است ماکزیمم پاسخ سیستم میزان برای بیست و دو پره برابر با ۲۶/۴۶۱۳ است و مشخص است پاسخ بیست و دو پره یکسان و برابر است.

۴-۲. پاسخ فرکانسی سیستم نامیزان (نامیزانی در جرم پره‌ها)

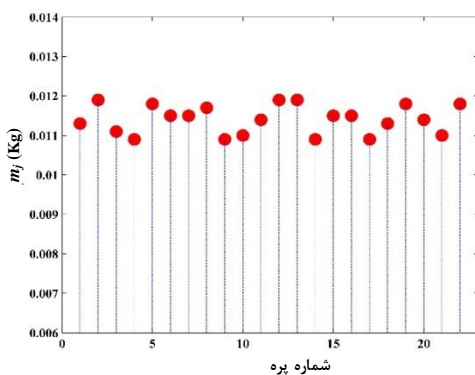
به‌منظور بررسی سیستم نامیزان، برای ایجاد نامیزانی در سیستم، جرم بیست و دو پره مطابق رابطه ۱۵ نامیزان شده است.

$$m_j = m_t(1 + \delta_j) \quad j = 1, 2, \dots, 22 \quad (15)$$

مقادیر مجاز برای δ_j از بازه $[-0.1, 0.1]$ انتخاب می‌شوند [۸]. سپس با استفاده از الگوریتم ژنتیک و معادله ۱۴ بدترین الگوی نامیزانی برای جرم پره‌ها به‌دست آمده که این مقادیر در شکل ۴ آورده شده‌اند.

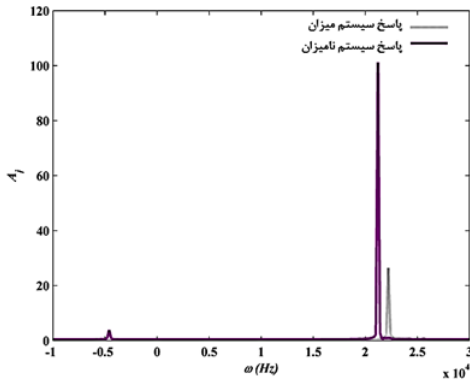


شکل ۳. پاسخ فرکانسی سیستم میزان برای بیست و دو پره



شکل ۴. مقادیر به‌دست آمده برای بدترین الگوی نامیزانی برای

جرم پره‌ها



شکل ۷. ماکزیمم پاسخ بیست و دو پره در حالت نامیزان برای بدترین الگو

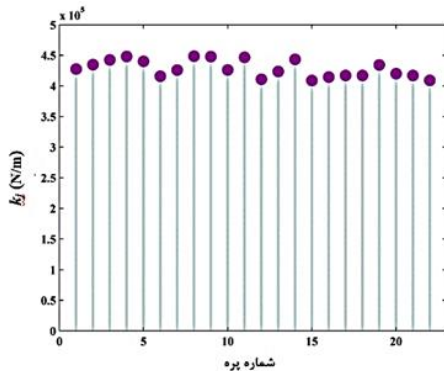
۳-۴. پاسخ فرکانسی سیستم نامیزان (نامیزانی

در ضریب سختی پره‌ها)

به منظور بررسی پاسخ فرکانسی سیستم نامیزان، برای ایجاد نامیزانی در سیستم، ضریب سختی بیست و دو پره مطابق رابطه ۱۶ نامیزان شده است.

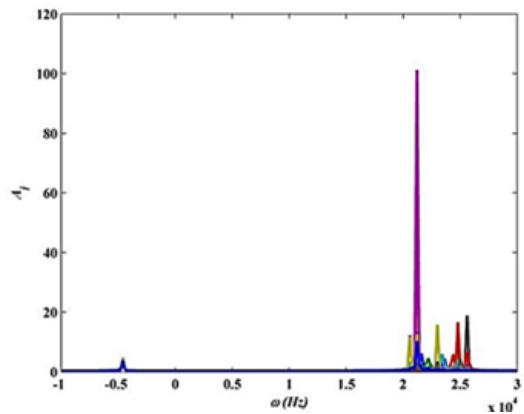
$$k_j = k_t(1 + \delta_j) \quad j = 1, 2, \dots, 22 \quad (16)$$

مقادیر مجاز برای δ_j از بازه $[-0.05, 0.05]$ انتخاب می‌شوند [۸]. سپس با استفاده از الگوریتم ژنتیک و معادله ۱۴ بدترین الگوی نامیزانی برای ضریب سختی پره‌ها به دست آمده که این مقادیر در شکل ۸ آورده شده‌اند. سپس پاسخ بیست و دو پره سیستم در حالت نامیزان و برای بدترین الگوی به دست آمده از الگوریتم ژنتیک محاسبه شد و در شکل ۹ رسم گردید.

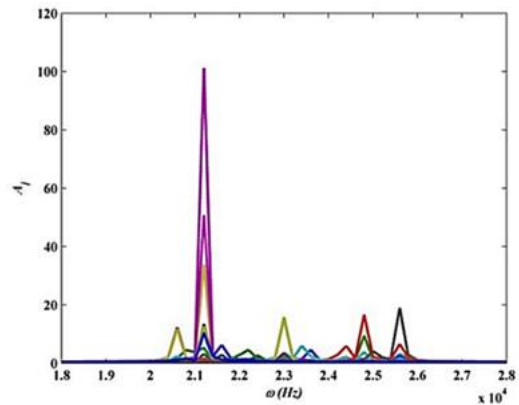


شکل ۸. مقادیر به دست آمده برای بدترین الگوی نامیزانی برای ضریب سختی پره‌ها

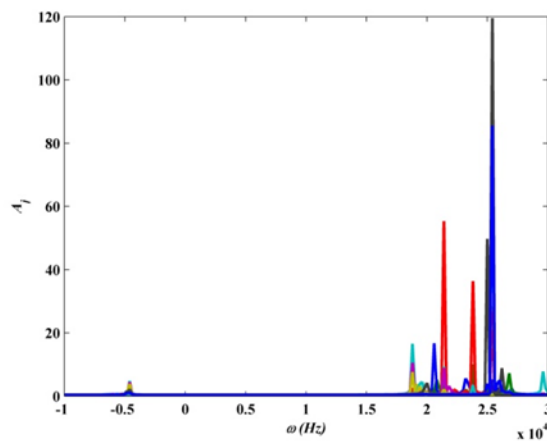
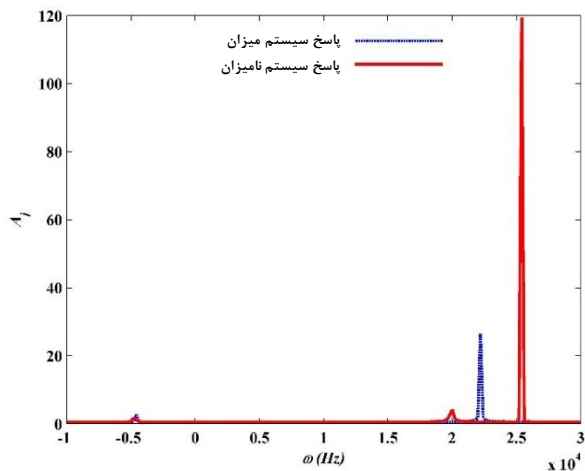
سپس پاسخ سیستم در حالت نامیزان و برای بدترین الگوی به دست آمده در شکل ۵ رسم شده است. برای وضوح بیشتر پاسخ بیست و دو پره در بازه $[18, 28]$ کیلوهرتز نیز در شکل ۶ آورده شده است. ماکزیمم پاسخ برای بیست و دو پره در بدترین الگو در شکل ۷ رسم شده است. نتایج نشان می‌دهد وجود نامیزانی در سیستم می‌تواند ماکزیمم پاسخ فرکانسی را تا $3/827$ برابر افزایش دهد. (ماکزیمم پاسخ سیستم میزان برابر با $26/4613$ و ماکزیمم پاسخ سیستم نامیزان در بدترین الگو برای بدترین پره برابر با $101/2743$ است).



شکل ۵. پاسخ بیست و دو پره در حالت نامیزان

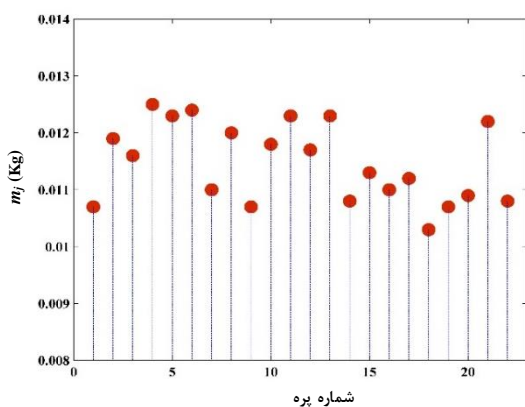


شکل ۶. پاسخ بیست و دو پره در حالت نامیزان در بازه $[18, 28]$ کیلوهرتز

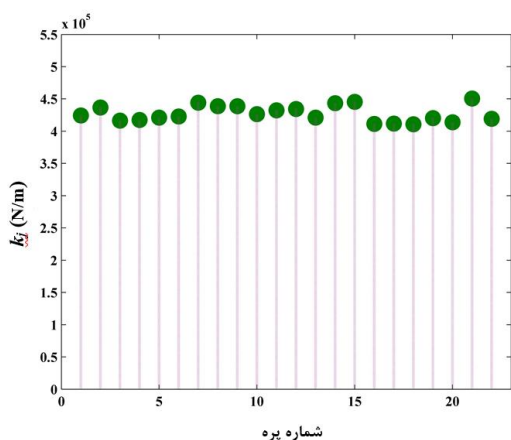


شکل ۹. پاسخ بیست و دو پره در حالت نامیزان

شکل ۱۰. ماکزیمم پاسخ بیست و دو پره در حالت نامیزان برای بدترین الگو



شکل ۱۱. مقادیر به دست آمده برای بدترین الگوی نامیزانی برای جرم پره‌ها

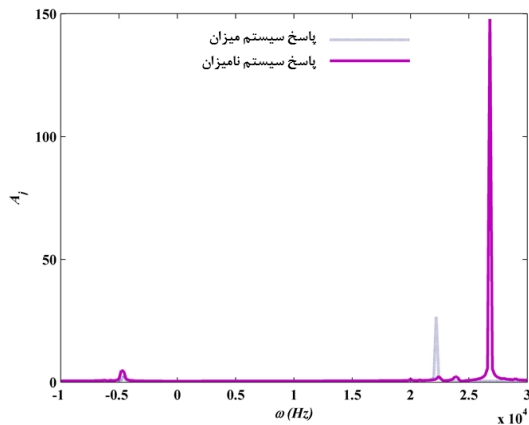


شکل ۱۲. مقادیر به دست آمده برای بدترین الگوی نامیزانی برای ضریب سختی پره‌ها

ماکزیمم پاسخ برای بیست و دو پره در بدترین الگو در شکل ۱۰ رسم شده است. نتایج نشان می‌دهد وجود نامیزانی در سیستم می‌تواند ماکزیمم پاسخ فرکانسی را تا $4/516$ برابر افزایش دهد (ماکزیمم پاسخ سیستم میزان برابر با $26/4613$ و ماکزیمم پاسخ سیستم نامیزان در بدترین الگو برای بدترین پره برابر با $119/4981$ است).

۴-۴. پاسخ فرکانسی سیستم نامیزان (نامیزانی هم‌زمان در جرم و ضریب سختی پره‌ها)

برای بررسی سیستم نامیزان، نامیزانی به صورت هم‌زمان در جرم و ضریب سختی پره‌ها در نظر گرفته شده است. برای ایجاد نامیزانی در سیستم، از روابط ۱۵ و ۱۶ استفاده شده است. سپس با استفاده از الگوریتم ژنتیک و معادله ۱۴ بدترین الگوی نامیزانی به دست آمده، که این مقادیر در شکل ۱۱ برای جرم پره‌ها و در شکل ۱۲ برای ضریب سختی پره‌ها آورده شده‌اند.



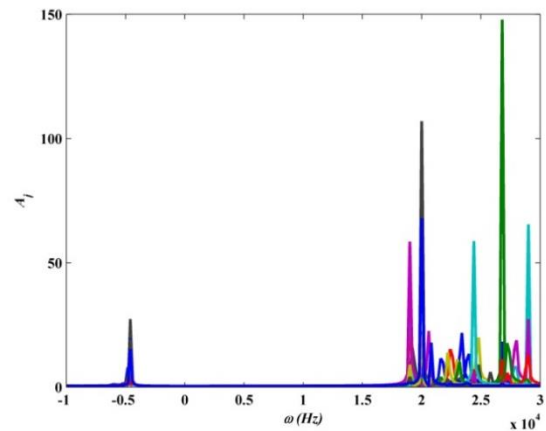
شکل ۱۵. ماکزیمم پاسخ بیست و دو پره در حالت نامیزان برای بدترین الگوی

۵. نتیجه گیری

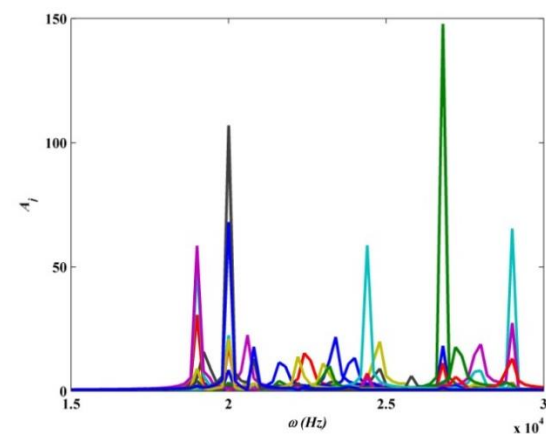
از آنجاکه وجود نامیزانی در سیستم دیسک و پره می‌تواند تأثیرات زیادی بر روی پاسخ فرکانسی سیستم بگذارد از این پدیده در تحلیل دینامیکی پرها نمی‌توان صرف نظر کرد. به همین دلیل در این پژوهش به این موضوع پرداخته شد بررسی نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که نامیزانی در جرم اجزاء سیستم دیسک و پره می‌تواند باعث افزایش پاسخ فرکانسی سیستم شود. همان‌طور که از نتایج مشخص می‌شود ماکزیمم پاسخ فرکانسی در حالت نامیزان می‌تواند تا مقدار $101/2743$ افزایش یابد که این پاسخ تقریباً $3/827$ برابر پاسخ در حالت میزان است که برای سیستم بسیار خطرناک است. همچنین وجود نامیزانی در ضریب سختی پرها می‌تواند ماکزیمم پاسخ را تا مقدار $119/4981$ افزایش دهد که این پاسخ $4/516$ برابر پاسخ سیستم میزان است. در نهایت وجود نامیزانی هم‌زمان در جرم و ضریب سختی پره باعث افزایش پاسخ فرکانسی به مقدار $147/2184$ می‌شود که $5/563$ برابر پاسخ سیستم در حالت میزان است.

نتایج نشان می‌دهد که پاسخ سیستم به وجود نامیزانی هم‌زمان در جرم و ضریب سختی هر پره نسبت به زمانی که نامیزانی فقط در یکی از خصوصیات پره است حساس‌تر است که با نتایج به دست آمده توسط لین و میگنولت مطابقت دارد

سپس پاسخ سیستم در حالت نامیزان و برای بدترین الگوی به دست آمده در شکل ۱۳ رسم شده است. همان‌طور که در نمودار مشخص شده است ماکزیمم پاسخ و محل اتفاق افتادن ماکزیمم پاسخ تغییر کرده است. همچنین ماکزیمم پاسخ تمام پرها در یک بازه پخش شده و ماکزیمم آنها نیز تغییر کرده است. برای وضوح بیشتر پاسخ بیست و دو پره در بازه $[15, 30]$ کیلوهرتز نیز در شکل ۱۴ رسم شده است.



شکل ۱۳. پاسخ بیست و دو پره در حالت نامیزان



شکل ۱۴. پاسخ بیست و دو پره در حالت نامیزان در بازه $[15, 30]$ کیلوهرتز

ماکزیمم پاسخ برای بیست و دو پره در بدترین الگو در شکل ۱۵ رسم شده است. نتایج نشان می‌دهد وجود نامیزانی هم‌زمان در سیستم می‌تواند ماکزیمم پاسخ فرکانسی را تا $5/563$ برابر افزایش دهد (ماکزیمم پاسخ سیستم میزان برابر با $26/4613$ و ماکزیمم پاسخ سیستم نامیزان در بدترین الگو برای بدترین پره برابر با $147/2184$ است).

[۳۱]. همچنین وجود نامیزانی هم‌زمان باعث تشدید پاسخ شده و ماکزیمم پاسخ را به میزان قابل‌توجهی افزایش می‌دهد و باعث می‌شود ماکزیمم پاسخ پره‌ها در یک بازه پخش شود. نتایج حاصل با نتایج به‌دست آمده توسط سایر محققان در این زمینه مطابقت دارد. در جدول ۳ تعدادی از ضرایب به‌دست آمده برای افزایش پاسخ سیستم نامیزان نسبت به پاسخ سیستم میزان آورده شده است. همان‌طور که مشخص است وجود نامیزانی در سیستم باعث افزایش قابل‌توجه در ماکزیمم پاسخ می‌شود. این تفاوت‌ها و تا حدی نتایج و بحث‌های متضاد شاید ناشی از استفاده مدل‌ها و مقادیر پارامترهای متفاوت در هر مطالعه است. از آنجاکه طراحی این نوع سیستم‌ها براساس ماکزیمم پاسخ انجام می‌گیرد از این‌رو در نظر گرفتن نامیزانی در طراحی اولیه این‌گونه سیستم‌ها بسیار مهم و ضروری است.

جدول ۳. نسبت ماکزیمم پاسخ سیستم نامیزان به پاسخ سیستم

سال	محقق	نسبت
۱۹۶۶	وایتهد [۲۸]	۲/۲۳
۱۹۸۴	گریفین و هوزاک [۲۹]	۲/۰۵
۱۹۸۶	باشو و گریفین [۹]	۲/۴۳
۱۹۹۴	کیسر و همکاران [۱۱]	۵/۲۸
۲۰۰۱	پتروف و اوینز [۱۰]	۵/۰۰
۲۰۱۰	رحیمی و ضیایی‌راد [۱۲]	۲/۹۵
۲۰۱۱	رئییسی و ضیایی‌راد [۳۰]	۲/۶۸
۲۰۱۳	رئییسی و ضیایی‌راد [۸]	۲/۷۳
۲۰۲۲	مطالعه حاضر (نامیزانی در جرم)	۳/۸۳
۲۰۲۲	مطالعه حاضر (نامیزانی در ضریب سختی)	۴/۵۲
۲۰۲۲	مطالعه حاضر (نامیزانی هم‌زمان)	۵/۵۶

۶. مأخذ

- [1] Wang, Shuai, Geng Yang, Li Ji, Chuanxing Bi, and Changjun Zheng, "Multi-mode vibration attenuation of mistuned bladed disks by frictional tuned mass dampers array", *Journal of Sound and Vibration*, 2022, Vol.536 p.117176.
- [2] Bornassi, S., T. M. Berruti, C. M. Firrone, and G. Battiato, "Vibration parameters identification of turbomachinery rotor blades under transient condition using Blade Tip-Timing measurements", *Measurement*, 2021, Vol.183, p.109861.
- [3] Zhou, Biao, Jingchao Zhao, and Teresa Maria Berruti, "Exploration of blade detuning tests for mistuning identification of blisks", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, Vol.175, p.109118.
- [4] Nyssen, Florence, Yann Colaïtis, and Alain Batailly. "Numerical investigation of a mistuned industrial bladed disk dynamics with structural contacts using time and frequency methods." *Journal of Sound and Vibration* (2022), p.117077.
- [5] Rivas-Guerra, Alejandro J., and Marc P. Mignolet, "Maximum amplification of blade response due to mistuning: Localization and mode shape aspects of the worst disks", *J. Turbomach*, 2003, Vol.125, no.3, pp.442-454.
- [6] Shin, Sang Ha, Min Kyoo Kang, and Hong Hee Yoo, "Mistuned coupling stiffness effect on the vibration localization of cyclic systems", *Journal of mechanical science and technology*, 2008, Vol.22, no.2, pp.269-275.
- [۷] رئییسی استبرق ا، ضیایی‌راد س، "یافتن بدترین پاسخ فرکانسی سیستم دیسک پره‌دار تحت تأثیر نامیزانی به کمک الگوریتم ژنتیک"، *نشریه علمی- پژوهشی مهندسی مکانیک/میرکبیر، زمستان ۱۳۹۱*، سال چهارم و چهار شماره ۲، ص ۴۱-۵۰.
- [8] Raeisi, E., and S. Ziaei-Rad, "The worst response of mistuned bladed disk system using neural network and genetic algorithm", *Meccanica*, 2013, Vol.48, no.2, pp.367-379.
- [9] Basu, P., and J. H. Griffin, "The effect of limiting aerodynamic and structural coupling in models of mistuned bladed disk vibration", 1986, pp.132-139.

- [10] Petrov, E. P., and D. J. Ewins, "Analysis of the worst mistuning patterns in bladed disc assemblies", In *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*, 2001, Vol.78538, p. V004T03A051. American Society of Mechanical Engineers.
- [11] Kaiser, Teri, Reed S. Hansen, Nhan Nguyen, Roy W. Hampton, Doug Muzzio, Mladen K. Chargin, Roy Guist, Ken Hamm, and Len Walker. "Experimental/analytical approach to understanding mistuning in a transonic wind tunnel compressor", 1994, No.NAS 1.15:108833.
- [12] Rahimi, Mohammad, and Saeed Ziaei-Rad, "Uncertainty treatment in forced response calculation of mistuned bladed disk", *Mathematics and Computers in Simulation*, 2010, Vol.80, no.8, pp.1746-1757.
- [13] Castanier, Matthew P., and Christophe Pierre, "Using intentional mistuning in the design of turbomachinery rotors", *AIAA journal*, 2002, Vol.40, no.10, pp.2077-2086.
- [14] Hou, Jianfu, and Charles Cross, "Minimizing blade dynamic response in a bladed disk through design optimization", *AIAA journal*, 2005, Vol.43, no.2, pp.406-412.
- [15] Estabragh, E. Raeisi, S. Ziaei-Rad, and M. Rahimi, "Effects of mistuning on dynamic behavior of nonlinear cyclic systems with lump masses and cubic nonlinearity", *Mechanics & Industry*, 2016, Vol.17, no.4, p.409.
- [16] Beirow, Bernd, Felix Figaschewsky, Arnold Kühhorn, and Alfons Bornhorn, "Vibration analysis of an axial turbine blisk with optimized intentional mistuning pattern", *Journal of Sound and Vibration*, 2019, Vol.442, pp.11-27.
- [17] Bai, Bin, Han Li, Wei Zhang, and Yanchao Cui, "Application of extremum response surface method-based improved substructure component modal synthesis in mistuned turbine bladed disk", *Journal of Sound and Vibration*, 2020, Vol.472, p.115210.
- [18] Bai, Bin, Junyi Zhang, Yanchao Cui, and Han Li, "Vibration characteristics investigation of mistuned blisks with receptance substructure component modal synthesis method", *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2020, Vol.34, no.7, pp.2715-2729.
- [19] Bai, Bin, and Guangwei Zhu, "Application of improved dynamic substructure finite element model-based state-space techniques in mistuned blisks", *International Journal of Aerospace Engineering*, 2020.
- [20] Kan, Xuanen, and Bo Zhao, "A New Method of Reducing the Vibration Localization of the Multi-packet Whole Mistuned Bladed Disk System Using Bladed Packets", *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, 2021, Vol.22, no.4, pp.857-865.
- [21] Zhang, Hongyuan, Huiqun Yuan, and Hongyun Sun, "Vibration reduction optimization for mistuned bladed disk based on reduced order modeling technique", *Journal of Vibroengineering*, 2021, Vol.23, no.2, pp.385-399.
- [22] Zhao, Tian Yu, Yuan Song Cui, Hong Gang Pan, Hui Qun Yuan, and Jie Yang, "Free vibration analysis of a functionally graded graphene nanoplatelet reinforced disk-shaft assembly with whirl motion", *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, Vol.197, p.106335.
- [23] Zhao, Tianyu, Yifeng Yang, Honggang Pan, Hongyuan Zhang, and Huiqun Yuan, "Free vibration analysis of a spinning porous nanocomposite blade reinforced with graphene nanoplatelets", *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 2021, Vol.56, no.8, pp.574-586.
- [24] Zhao, T. Y., Jiang, Z. Y., Zhao, Z., Xie, L. Y., Yuan, H. Q., "Modeling and free vibration analysis of rotating hub-blade assemblies reinforced with graphene nanoplatelets", *J. Strain Anal. Eng. Des.* 2021.
- [25] Pan, Honggang, Yunshi Wu, and Tianyu Zhao, "Study on influence of multi-parameter variation of bladed disk system on vibration characteristics", *Applied Sciences*, 2021, Vol.11, no.7, p.3084.
- [26] Lin, C-C., and Marc P. Mignolet, "Effects of damping and damping mistuning on the forced vibration response of bladed disks", *Journal of Sound and Vibration*, 1996, Vol.193, no.2, pp.525-543.
- [27] Goldberg, David E., "Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning", *Addison Reading*, 1989.
- [28] Whitehead, D. S., "Effect of mistuning on the vibration of turbo-machine blades induced by wakes", *Journal of mechanical engineering science*, 1966, Vol.8, no.1, pp.15-21.

[29] Griffin, J. H., and T. M. Hoosac, "Model development and statistical investigation of turbine blade mistuning", *ASME, Transactions, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 1984, Vol.106, pp.204-210.

[۳۰] رئیسی استبرق، احسان، ضیایی‌راد، سعید، دهقان، حسین، "استفاده از شبکه عصبی و الگوریتم ژنتیک در بدست آوردن ماکزیمم پاسخ سیستم نامیزان"، *مجله علمی- پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها*. دوره ۱، شماره ۲، پاییز ۱۳۹۰، ص. ۳۷-۴۶.

پی‌نوشت:

1. Aeroelasticity