

# برداشت انرژی از سیستم دیسک صلب چرخان با دو تیر طره و پیزوالکتریک

علی اصغر جعفری

استاد

آزمایشگاه پژوهشی آکوستیک و ارتعاشات دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

ajafari@kntu.ac.ir

اسماعیل شیرازی\*

دانشجوی دکتری

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

esmaeil\_shirazi@email.kntu.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۱۲

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۴/۰۱

## چکیده

در این پژوهش یک سیستم برداشت انرژی که در آن دو تیر طره کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک به یک دیسک صلب چرخان متصل هستند معرفی شده است. ابتدا معادلات سیستم با استفاده از روابط الکترومکانیکال لاگرانژ نوشته و سپس به روش حل دقیق و تقریب رزونانس حل دقیق، حل شده است. همچنین سیستم برداشت انرژی به کمک نرم‌افزار شبیه‌سازی گردیده است. اثر سرعت زاویه‌ای بر ولتاژ، مقاومت الکتریکی و توان بهینه بررسی و مشاهده شد که با افزایش سرعت زاویه‌ای، ولتاژ و مقاومت بهینه ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد ولی توان بهینه ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. کمینه ولتاژ و مقاومت بهینه و بیشینه توان بهینه در سرعت ۴۴ رادیان بر ثانیه به دست می‌آید. نتایج نشان داد که در این سیستم به منظور تولید توان حداکثر مطلق ۰/۰۹۴ وات به مقاومت الکتریکی ۱۱۱۵ اهم نیاز است. همچنین تغییرات توان بر حسب تغییرات ولتاژ و مقاومت الکتریکی بررسی شده است. مقایسه نتایج سه روش استفاده شده نشان داد که مطابقت بالایی میان نتایج حاصل از حل معادلات و شبیه‌سازی وجود دارد و پاسخ‌های تقریب رزونانس ساده‌تر از پاسخ‌های حل دقیق بوده و خطای ناچیزی دارد.

واژگان کلیدی: برداشت انرژی، پیزوالکتریک، تیر چرخان

## ۱. مقدمه

برداشت‌کننده‌های انرژی، انرژی موجود در محیط را دریافت کرده و به انرژی الکتریکی تبدیل می‌کنند. عملکرد سیستم‌های برداشت انرژی و سیستم‌های تولید انرژی از منابع تجدیدپذیر یکسان است. در برداشت‌کننده‌های انرژی، توان الکتریکی حاصل در مقیاس میکرو یا میلی‌وات بوده از این رو کاربرد انرژی الکتریکی تولید شده در سیستم‌های

برداشت انرژی فقط در وسایلی با توان بسیار کم از قبیل حس‌گرها، سیستم‌های بی‌سیم و مخابراتی است. در دو دهه اخیر سیستم‌های برداشت انرژی مورد توجه زیادی قرار گرفته و موجب عدم پیشرفت فناوری باتری‌ها بوده است [۱]. یکی از محاسن مهم برداشت‌کننده‌های انرژی عدم نیاز اتصال حس‌گر به منبع انرژی است که به‌عنوان مثال می‌توان از این برداشت‌کننده‌ها در چرخ خودرو استفاده کرد و انرژی مورد

نیاز یک حس گر که فشار باد تایلر را در هر لحظه برای راننده ارسال می کند تأمین کرد. با این فناوری راننده می تواند فشار باد تایرهای خودرو را مشاهده کرده و در صورت لزوم با تنظیم آنها باعث کاهش مصرف سوخت و کاهش تولید دی اکسید کربن و آلاینده های دیگر شود [۲]. در زمینه پایش و تعمیر سازه ها متخصصان می توانند با استفاده از این فناوری در هر لحظه سازه را بررسی کرده و در صورت بروز هرگونه مشکل در آن اقدامات پیشگیرانه را انجام دهند [۲]. یکی دیگر از کاربردهای پیزوالکتریک در مهندسی پزشکی است که در بدن انسان به منظور تأمین انرژی الکتریکی ضربان ساز قلب استفاده می شود که در این صورت دیگر نیازی به باتری قلب و تعویض آن نیست [۲].

اینمن و ارترک<sup>۱</sup> [۳] در سال ۲۰۰۹ تیر یکسر گیرداری را که پایه آن چرخش هارمونیک اندکی در راستای عرضی داشت و به ابتدای آن جرم متمرکزی متصل بود، مورد مطالعه قرار دادند. آنها تیر را، تیر اولر- برنولی فرض کرده و نشان دادند که شکل مود اول به دست آمده از حل تحلیلی، نتایج خوبی کسب می شود. یان و همکاران<sup>۲</sup> [۴] در سال ۲۰۱۳ تیر یکسر گیردار ثابتی را که در ابتدای آن یک آهن ربا نصب شده بود و در زیر آن یک آهن ربا می چرخید، مورد مطالعه قرار دادند. آنها با نصب پیزوالکتریک در مکان های مختلف به طور عملی نشان دادند که بهترین مکان قرارگیری پیزوالکتریک در انتهای تیر است. از طرف دیگر در این مکان شعاع انحنا تیر کمترین مقدار بوده و این موضوع با نتایج تئوری مطابقت دارد. همچنین آنها نشان دادند درحالی که آهن رباها در جهت طولی قرار گیرند در حین چرخش، زمان بیشتری روبه روی هم بوده که در نتیجه توان تولید شده افزایش می یابد. پیلاچ و همکاران<sup>۳</sup> [۵] در سال ۲۰۱۳ تیر یکسر گیرداری را بررسی کردند که یک آهن ربا در ابتدای آن و آهن ربای دیگری با فاصله از آن در یک قاب نصب شده بود و کل سیستم حول محوری به موازات سطح زمین می چرخید. آنها برای سادگی آزمایش، تیر را به صورت یک سیستم جرم- فنر-

مستهلک کننده مدل کرده و اثر فاصله و جهت گیری آهن رباها را بر ولتاژ الکتریکی تولید شده بررسی کردند. لایو و گوآن<sup>۴</sup> [۶] در سال ۲۰۱۵ تیر یکسر گیردار چرخانی را که بر روی آن پیزوالکتریک نصب شده بود و محور دوران، موازی سطح زمین بود مورد مطالعه قرار دادند.

آنها با انجام آزمایش توانستند در سرعت دورانی ۷-۱۳/۵ هرتز، توان ۸۲۵-۸۳/۵ میکرو وات را تولید کنند. این مقدار توان تولید شده برای استفاده در بی سیم ها کافی بود.

فان و همکاران<sup>۵</sup> [۷] در سال ۲۰۱۵ سیستم برداشت انرژی تیر- غلتکی را پیشنهاد دادند که دارای سه بخش اصلی تیر یکسر گیردار همراه با پیزوالکتریک، غلتک و قاب بود. در این سیستم، انرژی از طریق دو فرایند ارتعاش تیر پیزوالکتریک و تحریک نوسانی به وسیله غلتک برداشت می شد. آنها با انجام آزمایش موفق شدند طی دو فرایند مذکور به ترتیب ولتاژهای ۱۰/۶ و ۲۳ ولت را تولید کنند، البته نتایج شبیه سازی، ولتاژهای تولیدی را به ترتیب ۱۳ و ۲۵ ولت نشان می داد. آنها علت اختلاف ولتاژهای مذکور را دو دلیل بیان کردند [۸]. اولاً تغییرات ضریب مستهلک کننده در حین تغییر فرکانس ارتعاشی، در شبیه سازی منظور نشده بود. دوماً افزایش فرکانس در قالب گام های ۰/۲ هرتز ممکن بود باعث کاهش دقت در نتایج آزمایش شود. ماچادو و همکاران<sup>۶</sup> [۹] در سال ۲۰۱۵ با بررسی یک تیر پیزوالکتریک یکسر گیردار توانستند ولتاژ و توان خروجی را برای مودهای اول و دوم محاسبه کنند و رابطه ای برای محاسبه مقدار مقاومت الکتریکی بهینه به منظور افزایش توان تولیدی به دست آورند. یتمن و فو<sup>۷</sup> [۱۰] در سال ۲۰۱۷ سیستم برداشت انرژی چرخانی را مورد مطالعه قرار دادند که در آن با استفاده از یک آهن ربای چرخان و یک آهن ربای متصل به سر تیر، به تیر نیروی هارمونیک وارد کردند و با تغییر پارامترها و ترکیب بندی سیستم، توان تولیدی را افزایش دادند. خو و همکاران<sup>۸</sup> [۱۱] در سال ۲۰۱۷ اثرات دینامیکی یک سیستم برداشت کننده انرژی را بر روی دو تیر یکسر گیردار کوپل

شده بررسی کردند. در آزمایش آنها، تیر یکسر گیردار دوم که بر روی آن پیزوالکتریک تعبیه شده بود، قابلیت جابه‌جایی بر روی تیر یکسر گیردار اول را داشت. آنها با جابه‌جا کردن تیر دوم بر روی تیر اول نشان دادند که حداکثر ولتاژ تولیدی در حالتی است که تیر دوم در نقطه‌ای از تیر اول قرار گیرد که تیر اول در آن نقطه بیشترین جابه‌جایی یا بیشترین شتاب را داشته باشد. درحالی که اگر پیزوالکتریک بر روی تیر اول قرار داشت، در نقاط مذکور حداقل ولتاژ، تولید شده و در حالتی ولتاژ حداکثر می‌شود که پیزوالکتریک در نقطه‌ای قرار گیرد که بیشترین تنش یا کرنش را داشته باشد. به کمک نتایج به‌دست آمده، طراح سیستم‌های برداشت انرژی قادر است به کمک تحلیل دینامیکی سیستم، بهترین مکان برای نصب پیزوالکتریک را محاسبه کند. یتمن و فو [۱۲] در سال ۲۰۱۸ با افزودن یک آهن‌ربای ثابت دیگر به طرح قبلی خود، نتایج‌شان را بهبود بخشیدند. آنها شکل مودهای ارتعاشی مختلف را بررسی کردند و نهایتاً نتایج تئوری خود را با نتایج آزمایشگاهی مطابقت دادند. رامیرز و همکاران<sup>۹</sup> [۱۳] در سال ۲۰۱۹ سیستم برداشت انرژی چرخانی شامل دو تیر E شکل را ساختند و در فرکانس‌های کمتر از سه هرتز موفق شدند توان لازم برای حس‌گرهای سیستم‌های چرخان را تولید کنند.

در این پژوهش یک سیستم برداشت انرژی چرخان همراه با مدار الکتریکی معرفی می‌شود. در استخراج معادلات سیستم، اثر استهلاک هوا و میرایی نرخ کرنش منظور شده و با استفاده از حل دقیق، رفتار سیستم (تغییرات توان بر حسب تغییرات ولتاژ که دارای پدیده پرش است) بررسی می‌شود. در حالت حدی وقتی سرعت زاویه‌ای به سمت فرکانس طبیعی اول میل می‌کند؛ روابط مربوط به توان و مقاومت بهینه برای اولین بار به‌طور کامل به‌دست می‌آید. با توجه به اینکه نتایج حل دقیق پیچیده است بنابراین روش تقریب رزونانس حل دقیق به‌کار برده می‌شود تا نتایج ساده‌تر و با دقت بالا بیان شود. همچنین برای صحت‌سنجی معادلات

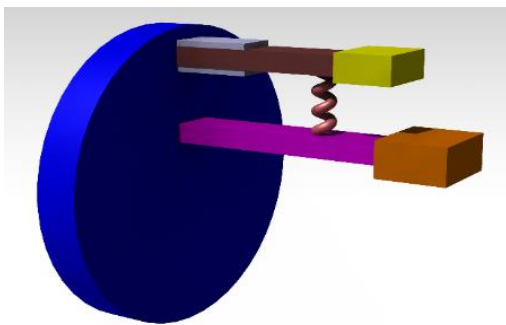
نوشته شده و مقایسه نتایج، هر دو بخش مکانیکی و الکتریکی سیستم برای اولین بار در نرم‌افزار انسیس<sup>۱۰</sup> شبیه‌سازی می‌شود به‌گونه‌ای که با اعمال سرعت زاویه‌ای، خروجی نرم‌افزار ولتاژ<sup>۱۱</sup> RMS است. بدین منظور از المان‌هایی استفاده می‌شود که خواص مواد پیزوالکتریک و قابلیت اعمال سرعت زاویه‌ای را داشته باشند.

## ۲. مدل ریاضی

در این بخش ابتدا معادلات مربوط به سیستم نوشته می‌شود. سپس به دو روش حل دقیق و تقریب رزونانس حل دقیق، حل خواهد شد. پس از آن سیستم در نرم‌افزار انسیس شبیه‌سازی شده و نتایج مربوطه استخراج می‌شود.

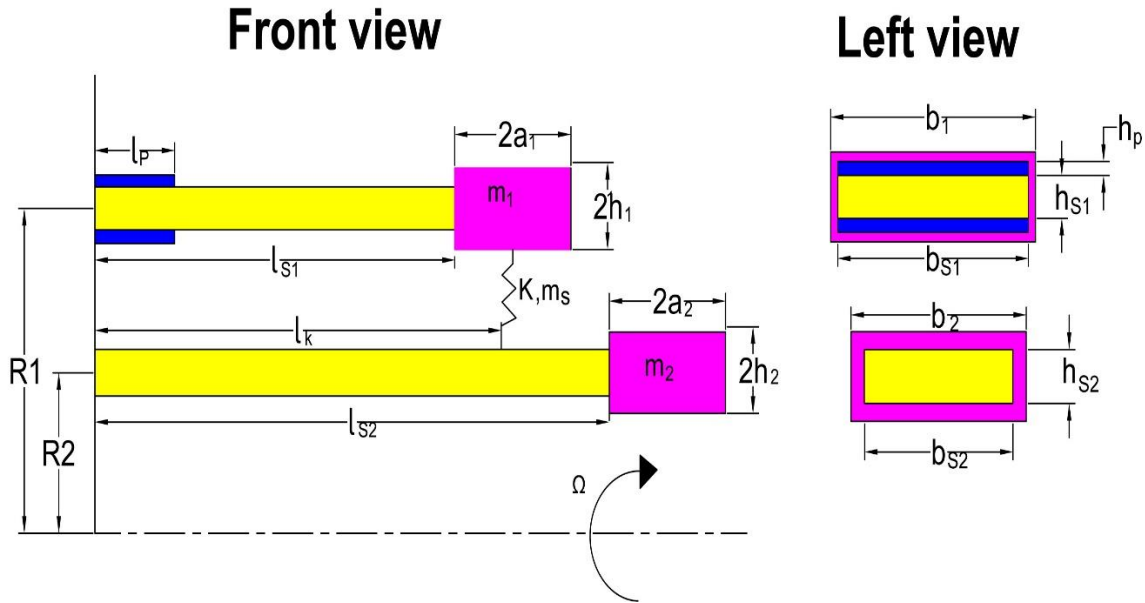
### ۲-۱. استخراج معادلات سیستم

سیستم برداشت انرژی مورد مطالعه، در شکل ۱ نشان داده شده است. این سیستم شامل دو تیر طره است که به سر آزاد هر کدام از تیرها جرمی تعبیه شده و دو تیر به‌وسیله فنری به یکدیگر متصل شده است. همچنین بر سطح بالا و پایین تیر فوقانی، پیزوالکتریک نصب شده است. سیستم با سرعت زاویه‌ای ثابت حول محور دیسک صلب دوران می‌کند.



شکل ۱. سیستم برداشت انرژی چرخان

مشخصات هندسی سیستم در شکل ۲ نشان داده شده است. انرژی جنبشی تیر شماره یک، تیر شماره دو و فنر طبق روابط ۱ تا ۳ محاسبه می‌شود. برای محاسبه انرژی جنبشی فنر سرعت دورانی و سرعت خطی متوسط فنر منظور می‌شود.



شکل ۲. مشخصات هندسی سیستم

$$\begin{aligned}
 T_1 = & \frac{1}{2} \rho_{s1} A_{s1} \int_0^{l_{s1}} \dot{w}_1^2 dx + \frac{1}{2} \rho_{s1} A_{s1} \int_0^{l_{s1}} (R_1 + w_1)^2 \Omega^2 dx + \rho_p A_p \int_0^{l_{p1}} \dot{w}_1^2 dx \\
 & + \rho_p A_p \int_0^{l_{p1}} (R_1 + w_1)^2 \Omega^2 dx + \frac{1}{2} I_1 (\dot{w}'_1|_{l_{s1}})^2 \\
 & + \frac{1}{2} m_1 \left( (\dot{w}_1|_{l_{s1}} + a_1 \dot{w}'_1|_{l_{s1}})^2 + (R_1 + w_1|_{l_{s1}} + a_1 w'_1|_{l_{s1}})^2 \Omega^2 \right)
 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 T_2 = & \frac{1}{2} \rho_{s2} A_{s2} \int_0^{l_{s2}} \dot{w}_2^2 dx + \frac{1}{2} \rho_{s2} A_{s2} \int_0^{l_{s2}} (R_2 + w_2)^2 \Omega^2 dx + \frac{1}{2} I_2 (\dot{w}'_2|_{l_{s2}})^2 \\
 & + \frac{1}{2} m_2 \left( (\dot{w}_2|_{l_{s2}} + a_2 \dot{w}'_2|_{l_{s2}})^2 + (R_2 + w_2|_{l_{s2}} + a_2 w'_2|_{l_{s2}})^2 \Omega^2 \right)
 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 T_s = & \frac{1}{2} m_s \left( \left( \frac{\dot{w}_1|_{l_{s1}} + a_1 \dot{w}'_1|_{l_{s1}} + \dot{w}_2|_{l_k}}{2} \right)^2 \right. \\
 & \left. + \left( \frac{\int_{R_2 + w_2|_{l_{s2}} + \frac{h_{s2}}{2}}^{R_1 + w_1|_{l_{s1}} + a_1 w'_1|_{l_{s1}} - h_1} s^2 \Omega^2 ds}{\left( R_1 + w_1|_{l_{s1}} + a_1 w'_1|_{l_{s1}} - h_1 + R_2 + w_2|_{l_{s2}} + \frac{h_{s2}}{2} \right)} \right)^2 \right)
 \end{aligned} \quad (3)$$

در روابط ۱ تا ۳،  $T_1, T_2, T_3$  به ترتیب انرژی جنبشی تیر شماره یک، تیر شماره دو و فنر است. انرژی پتانسیل تیرها و فنر طبق روابط ۴ تا ۶ محاسبه می‌شود. برای محاسبه انرژی پتانسیل فنر، علاوه بر انرژی پتانسیل کشسانی انرژی پتانسیل گرانشی فنر نیز منظور می‌شود. در روابط ۴ تا ۶

به ترتیب انرژی پتانسیل تیر شماره یک، تیر شماره دو و فنر است. در روابط ۱ تا ۶،  $w_{11}, w_{12}$  و  $w_2$  به ترتیب خیز تیر شماره یک در قسمت پیزوالکتریک، خیز تیر شماره یک در قسمت بدون پیزوالکتریک و خیز تیر شماره دو است.

$$U_1 = \frac{1}{2} E_{s1} I_{s1} \int_0^{l_{s1}} w_1''^2 dx + \rho_{s1} A_{s1} g \int_0^{l_{s1}} (R_1 + w_1) \sin(\Omega t) dx + \frac{1}{2} E_p I_p \int_0^{l_{p1}} w_1''^2 dx + 2\rho_p A_p g \int_0^{l_{p1}} (R_1 + w_1) \sin(\Omega t) dx - \frac{1}{2} e_{zx} b_{s1} (h_{s1} + h_p) w_1' |_{l_p} \dot{\lambda}(t) - \frac{1}{4} C_p (\dot{\lambda}(t))^2 + m_1 g (R_1 + w_1 |_{l_{s1}} + a_1 w_1' |_{l_{s1}}) \sin(\Omega t) \quad (4)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} E_{s2} I_{s2} \int_0^{l_{s2}} w_2''^2 dx + \rho_{s2} A_{s2} g \int_0^{l_{s2}} (R_2 + w_2) \sin(\Omega t) dx + m_2 g (R_2 + w_2 |_{l_{s2}} + a_2 w_2' |_{l_{s2}}) \sin(\Omega t) \quad (5)$$

در روابط ۱ تا ۵،  $\rho_{s1}, \rho_{s2}, \rho_p, E_{s1}, E_{s2}, E_p, A_{s1}, A_{s2}$  به ترتیب چگالی حجمی تیر شماره یک و دو، چگالی حجمی پیزوالکتریک، مدول یانگ تیر شماره یک و دو و مدول یانگ پیزوالکتریک، سطح مقطع تیر شماره یک و دو و سطح مقطع پیزوالکتریک است. همچنین  $I_1, I_2, I_{s1}, I_{s2}, I_p$  به ترتیب ممان اینرسی جرمی، جرم شماره یک و دو، ممان اینرسی سطح تیر شماره یک و دو و ممان اینرسی سطح پیزوالکتریک است در رابطه ۴،  $e_{zx}, \lambda$  و  $C_p$  به ترتیب بیانگر ضریب کوپلینگ الکترومکانیکی، شار الکتریکی و ظرفیت پیزوالکتریک است. ظرفیت پیزوالکتریک طبق رابطه ۷ به دست می‌آید [۱۳]. در روابط ۱ تا ۶  $g$  شتاب

گرانش و در رابطه ۳ و ۶  $m_s$  جرم فنر است. در رابطه ۷،  $\epsilon_{zz}^s$  بیانگر ثابت گذردهی پیزوالکتریک تحت کرنش صفر است. نماد پریم و دات در روابط به ترتیب مشتق نسبت به  $x$  (محور طولی تیرها) و مشتق نسبت به زمان را نشان می‌دهد. نمادهای دیگری که در روابط ۱ تا ۶ به کار رفته است مربوط به هندسه سیستم است که در شکل ۲ نشان داده شده است.

با استفاده از روش جداسازی متغیرها تابع دو متغیره  $w$  که در روابط قبلی مورد استفاده قرار گرفت (برای سادگی به جای  $w(x,t)$  در روابط از  $w$  استفاده شده است)، طبق رابطه ۸ به دو تابع تک متغیره  $\Phi(x)$  و  $T(t)$  تبدیل می‌شود [۱۴].

$$U_s = \frac{1}{2} K \int_0^{w_1 |_{l_{s1}} + a_1 w_1' |_{l_{s1}} - w_2 |_{l_{k2}}} s ds + m_s g \left( \frac{R_1 + w_{12} |_{l_{s1}} + a_1 w_{12}' |_{l_{s1}} - h_1 + R_2 + w_2 |_{l_{k2}} + \frac{h_{s2}}{2}}{2} \right) \sin(\Omega t) \quad (6)$$

$$w(x, t) = \Phi(x)T(t) \quad (۸)$$

$$C_p = \frac{\epsilon_{zz}^s b_{s1} l_p}{h_p} \quad (۷)$$

$$\beta_2 = \sqrt[4]{\frac{\rho_{s2} A_{s2} \omega_n^2}{E_{s2} I_{s2}}} \quad (۱۳)$$

در روابط ۱۱ تا ۱۳،  $\omega_n$  فرکانس طبیعی اول سیستم است. مقدار  $\omega_n$  با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب شرایط مرزی و پیوستگی سیستم به دست می آید. هشت شرط مرزی و چهار شرط پیوستگی برای تیرها در پیوست الف آورده شده است. تابع و معادلات الکترومکانیکی لاگرانژ بر پایه اصل همیتون به صورت روابط ۱۴ تا ۱۶ بیان می شود. در رابطه ۱۴ تا ۱۶،  $L$ ،  $W_{nc}$ ،  $\lambda$  و  $i(t)$  به ترتیب لاگرانژین، کار نیروهای غیرپایستار، شار و شدت جریان الکتریکی است. بنابر تعریف، تغییرات شار الکتریکی در واحد زمان، ولتاژ الکتریکی را نشان می دهد.

$$L = T_1 + T_2 + T_s - U_1 - U_2 - U_s \quad (۱۴)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{T}} \right) - \frac{\partial L}{\partial T} = \frac{\delta W_{nc}}{\delta T} \quad (۱۵)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda} = i(t) \quad (۱۶)$$

در ادامه گشتاور ناشی از میرایی نرخ کرنش با مدل کلین-ویت<sup>۱۲</sup> طبق رابطه ۱۷ به دست می آید [۱۶ و ۱۷]. کار گشتاور غیرپایستار طبق رابطه ۱۸ محاسبه می شود.

$$M = c_s I \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \quad (۱۷)$$

در رابطه ۸،  $x$  مختص مکان در جهت طولی تیر و  $t$  متغیر زمان است. تابع  $w(x, t)$  و  $\Phi(x)$  به ترتیب خیز تیر و شکل مود اول تیر می باشد. تابع  $\Phi(x)$  شامل دو تابع  $\Phi_1(x)$  و  $\Phi_2(x)$  (شکل مود اول تیرهای شماره یک و دو) بوده که به صورت روابط ۹ و ۱۰ بیان می شود [۱۴].

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} \Phi_{11}(x) = C_1 \sin(\beta_{11}x) \\ C_2 \sin(\beta_{11}x) + C_3 \sinh(\beta_{11}x) \\ + C_4 \cosh(\beta_{11}x) & 0 \leq x \leq l_p \\ \Phi_{12}(x) = C_5 \sin(\beta_{12}x) \\ + C_6 \cos(\beta_{12}x) + C_7 \sinh(\beta_{12}x) \\ + C_8 \cosh(\beta_{12}x) & l_p \leq x \leq l_{s1} \end{cases} \quad (۹)$$

$$\Phi_2(x) = C_9 \sin(\beta_2 x) + C_{10} \cos(\beta_2 x) + C_{11} \sinh(\beta_2 x) + C_{12} \cosh(\beta_2 x) \quad 0 \leq x \leq l_{s2} \quad (۱۰)$$

$C_1$  تا  $C_{12}$  ضرایب ثابت مجهول هستند که پس از محاسبه مقدار  $\omega_n$  بدست می آیند. تابع  $\Phi_1(x)$  شامل دو تابع  $\Phi_{11}(x)$ ،  $\Phi_{12}(x)$  است که به ترتیب بیانگر شکل مود تیر در قسمتی که پیزوالکتریک قرار دارد و شکل مود تیر در قسمت بدون پیزوالکتریک است. ضرایب  $\beta_{11}$ ،  $\beta_{12}$  و  $\beta_2$  به ترتیب مطابق روابط ۱۱ تا ۱۳ بیان می شود [۱۵].

$$\beta_{11} = \sqrt[4]{\frac{(\rho_{p1} A_{p1} + \rho_{s1} A_{s1}) \omega_n^2}{E_{p1} I_{p1} + E_{s1} I_{s1}}} \quad (۱۱)$$

$$\beta_{12} = \sqrt[4]{\left( \frac{\rho_{s1} A_{s1} \omega_n^2}{E_{s1} I_{s1}} \right)} \quad (۱۲)$$

$$i(t) = -\frac{\dot{\lambda}(t)}{R} \quad (21)$$

با جای گذاری روابط ۱۴، ۱۸، ۲۰ و ۲۱ در روابط ۱۵ و ۱۶ معادلات ۲۲ و ۲۳ به دست می آید که همان معادلات سیستم است. در رابطه ۲۳، R مقاومت الکتریکی است. ضرایب در معادلات ۲۲ و ۲۳ طبق روابط پیوست ب محاسبه می شود.

$$m\ddot{T}(t) + c\dot{T}(t) + kT(t) - p\dot{\lambda}(t) = c_1 + c_2 \sin(\Omega t) \quad (22)$$

$$\frac{1}{2}C_p\ddot{\lambda}(t) + \frac{\dot{\lambda}(t)}{R} + p\dot{T}(t) = 0 \quad (23)$$

### ۲-۲. حل دقیق

با توجه به ساختار معادله ۲۲ جواب خصوصی معادله به صورت مجموع یک جواب هارمونیک و یک جواب ثابت در نظر گرفته می شود. برای معادلات دیفرانسیل ۲۲ و ۲۳ جوابها به صورت روابط ۲۴ و ۲۵ به دست می آید. از رابطه ۲۵ مشاهده می شود که نیروی پله ای  $c_1$  در معادله دیفرانسیل ۲۲، هیچ تأثیری در مقدار ولتاژ الکتریکی ندارد. هدف اصلی در موضوع برداشت انرژی، محاسبه توان الکتریکی خروجی است و بدین منظور در ادامه توان الکتریکی محاسبه می شود.

$$T(t) = \frac{c_1}{k} - \frac{c_2\alpha_1 \sin(\Omega t)}{\alpha_3} - \frac{c_2\Omega(\Omega^2 R^2 c C_p^2 + 4Rp^2 + 4c) \cos(\Omega t)}{\alpha_3} \quad (24)$$

$$v(t) = \frac{2\Omega^2 R c_2 p (\Omega^2 R C_p m - R k C_p - 2Rp^2 - 2c) \sin(\Omega t)}{\alpha_3} + \frac{2c_2\Omega R p (\Omega^2 R c C_p + 2\Omega^2 m - 2k) \cos(\Omega t)}{\alpha_3} \quad (25)$$

با مشتق گیری از توان نسبت به مقاومت الکتریکی، مقاومت بهینه به صورت رابطه ۲۷ به دست می آید [۲۳].

$$P = \frac{v^2}{R} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{nc} &= - \int_0^l M \delta \theta dx \\ &= - \int_0^l M \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \\ &= - \int_0^l c_s I \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \\ &= - \int_0^l c_s I \phi'' \dot{T} (\delta \phi' T + \phi' \delta T) dx \end{aligned} \quad (18)$$

برای محاسبه نیروی ناشی از اصطکاک هوا رابطه ۱۹ استفاده می شود [۱۸]. در حالت کلی کار نیروی غیرپایستار طبق رابطه ۲۰ محاسبه می شود.

$$F = c_a \frac{\partial w}{\partial t} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{nc} &= - \int_0^l F \delta w dx \\ &= - \int_0^l c_a \frac{\partial w}{\partial t} \delta w dx \\ &= - \int_0^l c_a \phi \dot{T} (\delta \phi T + \phi \delta T) dx \end{aligned} \quad (20)$$

$c_s$ ،  $c_a$  و  $I$  به ترتیب ضریب میرایی نرخ کرنش، ضریب اصطکاک هوا و ممان اینرسی سطح است. رابطه بین شدت جریان و شار الکتریکی و مقاومت الکتریکی طبق رابطه ۲۱ بیان می شود. [۱۹ و ۲۰ و ۲۱].

توان الکتریکی از رابطه ۲۶ به دست می آید [۲۲]. در این رابطه  $v$  و  $P$  به ترتیب بیانگر ولتاژ و توان الکتریکی هستند.

$$R_{opt} = \frac{2}{\Omega C_p} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega c}{m\omega_n^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega c}{m\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2p}{mC_p\omega_n^2}\right)^2 - \frac{4p^2\Omega^2}{mC_p\omega_n^4} + \frac{4p^2}{mC_p\omega_n^2}} \quad (27)$$

$$P_{opt} = \frac{p^2 c_2^2 \Omega \sqrt{\alpha_4 \alpha_5}}{\alpha_6 + 2\Omega c p^2 \sqrt{\alpha_4 \alpha_5}} \quad (28)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega_n} R_{opt} = \frac{2c \left( c_2^2 + \left( \frac{2p}{C_p \omega_n} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}}{C_p \omega_n} \quad (29)$$

با جای گذاری مقاومت بهینه در تابع توان الکتریکی، توان بهینه طبق رابطه ۲۸ به دست می آید. در حالت حدی اگر مقدار فرکانس نیروی تحریک ( $\Omega$ ) که همان سرعت زاویه ای سیستم است به سمت فرکانس طبیعی سیستم ( $\omega_n$ ) میل کند مقاومت و توان بهینه به روابط ساده تر ۲۹ و ۳۰ تبدیل می شود. نمادهای  $\alpha_1$  تا  $\alpha_7$  در پیوست پ تعریف شده است.

$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega_n} P_{opt} = \frac{p^2 c_2^2 \Omega m \sqrt{-2C_p^2 m^2 \Omega^4 + 2C_p m \Omega^4 + c_2^2 C_p^2 \Omega^2 + 4m^2 p^4}}{4c \Omega p^4 + 2p^2 \sqrt{-2C_p^2 m^2 \Omega^4 + 2C_p m^2 \Omega^4 + c_2^2 C_p^2 \Omega^2 + 4m^2 p^4}} \quad (30)$$

$$\Omega^2 = \omega_n^2 + \varepsilon^2 \sigma^2 + 2\varepsilon \sigma \omega_n \cong \omega_n^2 + 2\varepsilon \sigma \omega_n \quad (34)$$

پس از حل دستگاه معادلات ۳۱ و ۳۲ به روش دقیق و جایگذاری روابط ۳۳ و ۳۴ در جواب معادلات، ولتاژ و توان به صورت روابط ۳۵ و ۳۶ به دست می آید [۲۴].

$$v = \frac{d_2 \eta}{\varepsilon \sqrt{\alpha_7}} \quad (35)$$

$$P = \frac{d_2^2 \eta^2}{\varepsilon^2 \alpha_7 R} \quad (36)$$

### ۳. شبیه سازی سیستم در نرم افزار انسیس

برای شبیه سازی دو تیر طره، لایه های پیزوالکتریک، مقاومت الکتریکی و دیود در نرم افزار انسیس به ترتیب از المان های SOLID 186، SOLID 226، CIRCUC 124 و CIRCUC 125 استفاده می شود. جدول ۱ مشخصات فیزیکی و هندسی این شبیه سازی را نشان می دهد [۱۷ و ۲۵

### ۲-۳. تقریب رزونانس حل دقیق

در این بخش تقریب رزونانس حل دقیق بررسی می شود [۲۴]. بدین منظور معادلات سیستم به صورت روابط ۳۱ و ۳۲ بازنویسی می شود. ضرایب معادلات ۳۱ و ۳۲ در پیوست آورده شده است.

$$\begin{aligned} \ddot{T}(t) + 2\varepsilon\mu\omega_n \dot{T}(t) + \omega_n^2 T(t) \\ - \psi \varepsilon v(t) \\ = d_1 + d_2 \sin(\Omega t) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\dot{v}(t) + \gamma v(t) + \eta \dot{T}(t) = 0 \quad (32)$$

اگر فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی سیستم نزدیک باشد  $\Omega$  به صورت رابطه ۳۳ فرض می شود همچنین  $\Omega^2$  طبق رابطه ۳۴ به دست می آید [۲۴]. در رابطه ۳۳،  $\ll 14$  و  $\sigma$  پارامتر تنظیم است.

$$\Omega = \omega_n + \varepsilon \sigma \quad (33)$$

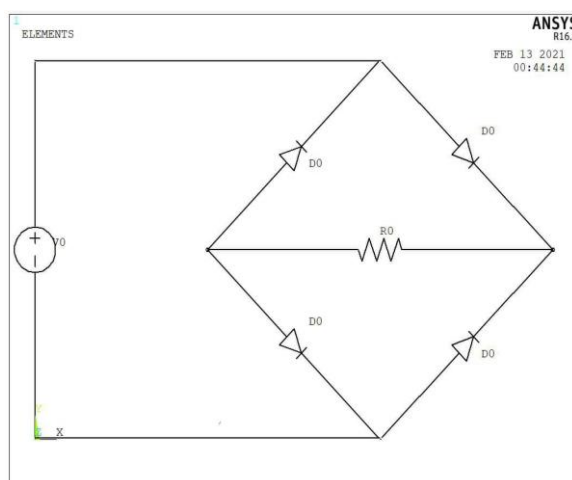


و ۲۶]. مقدار  $C_a$  برابر  $۰/۲۰۱۴$  است [۱۷]. شبیه‌سازی هندسه و فیزیک سیستم در شکل ۳-الف نشان داده شده است. مدار الکتریکی اکثر سیستم‌های برداشت انرژی در قالب مدار الکتریکی پل دیود است که به‌طور معمول در آزمایش‌ها استفاده می‌شود [۲۴ و ۲۷]. در این پژوهش مدار مذکور در نرم افزار انسیس مدل‌سازی شد که این مدار شامل چهار دیود

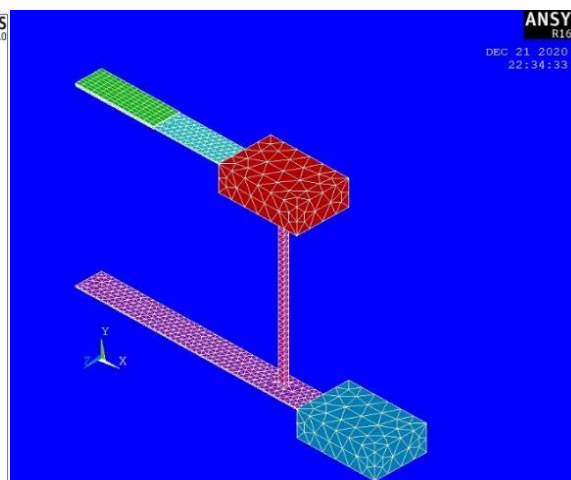
و یک مقاومت است که در شکل ۳-ب مشاهده می‌شود. مجموعه دیودها که پل دیود نامیده می‌شود ولتاژ متناوب را به ولتاژ مستقیم قابل ذخیره در منبع ذخیره انرژی تبدیل می‌کند. ولتاژ مستقیم خروجی از نرم افزار، ولتاژ RMS است. با توجه به اینکه منبع ذخیره انرژی بر نتایج شبیه‌سازی تأثیری ندارد، در مدل‌سازی حذف شده است.

جدول ۱. مشخصات فیزیکی و هندسی سیستم برداشت انرژی

تیر شماره یک		تیر شماره دو		پیزوالکتریک		جرم شماره یک		جرم شماره دو	
$l_{s1}$	$۰/۰۶$ m	$l_{s2}$	$۰/۰۹$ m	$l_p$	$۰/۰۳$ m	$a_1$	$۰/۰۱۵$ m	$a_2$	$۰/۰۱۵$ m
$b_{s1}$	$۰/۰۱$ m	$b_{s2}$	$۰/۰۱$ m	$b_p$	$۰/۰۱$ m	$b_1$	$۰/۰۲$ m	$b_2$	$۰/۰۲$ m
$h_{s1}$	$۰/۵۰$ mm	$h_{s2}$	$۰/۵۰$ mm	$h_p$	$۰/۲۶$ mm	$h_1$	$۰/۰۱$ m	$h_2$	$۰/۰۱$ m
$E_{s1}$	$۲۱۰$ GN/m <sup>2</sup>	$E_{s2}$	$۶۷$ GN/m <sup>2</sup>	$E_p$	$۱۲۵$ GN/m <sup>2</sup>	$m_1$	$۰/۰۰۹۴$ kg	$m_2$	$۰/۰۰۹۴$ kg
$\rho_{s1}$	$۷۸۵۰$ kg/m <sup>3</sup>	$\rho_{s2}$	$۲۷۰۰$ kg/m <sup>3</sup>	$\rho_p$	$۷۸۰۰$ kg/m <sup>3</sup>				
$R_1$	$۰/۰۱$ m	$R_2$	$۰/۰۳$ m	$C_p$	$۱۲۵$ nF				
$C_d$	$۲۶/۱۰^۴ \times ۹۹$	$C_d$	$۲۶/۱۰^۴ \times ۹۹$	$C_d$	$۲۶/۱۰^۴ \times ۹۹$				



(ب)



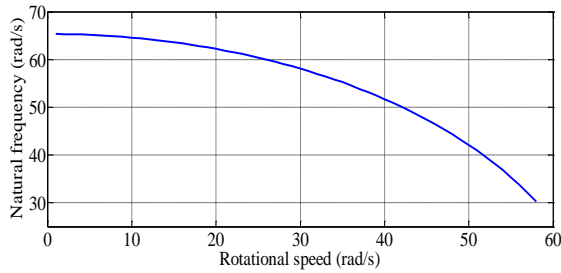
(الف)

شکل ۳. مدل‌سازی سیستم برداشت انرژی در نرم افزار انسیس (الف) شبیه‌سازی هندسه و فیزیک سیستم (ب) شبیه‌سازی مدار الکتریکی

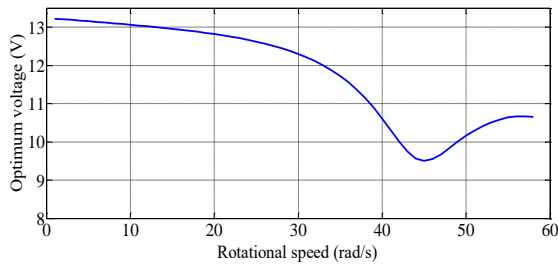
#### ۴. نتایج

در این بخش ابتدا نتایج حاصل از حل دقیق در شکل‌های ۴ تا ۹ نشان داده می‌شود. سپس نتایج سه روش حل دقیق، تقریب رزونانس حل دقیق و شبیه‌سازی با یکدیگر مقایسه

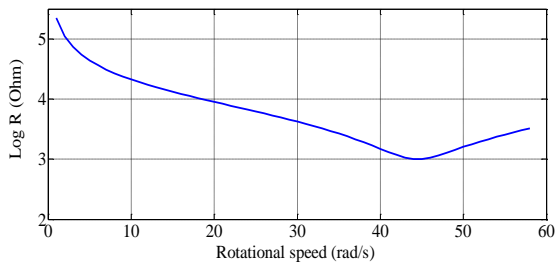
می‌شود. در شکل ۴ اثر سرعت زاویه‌ای بر فرکانس طبیعی سیستم نشان داده شده است. با توجه به رابطه سفتی (k) که در پیوست ب آورده شده است، جملاتی با ضرایب منفی در رابطه وجود دارد که این جملات با توان دوم سرعت



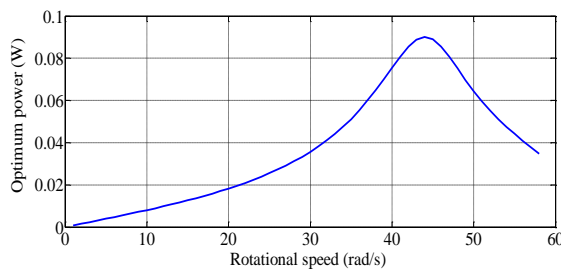
شکل ۴. فرکانس طبیعی بر حسب سرعت زاویه‌ای



شکل ۵. ولتاژ بهینه بر حسب سرعت زاویه‌ای



شکل ۶. لگاریتم مقاومت بهینه بر حسب سرعت زاویه‌ای

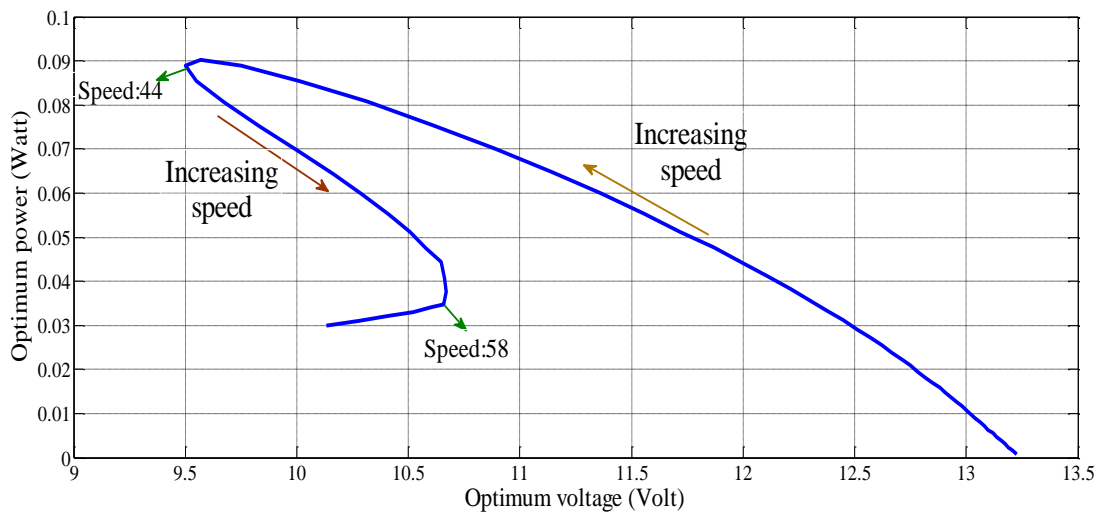


شکل ۷. توان بهینه بر حسب سرعت زاویه‌ای

زاویه‌ای رابطه مستقیم دارد. بنابراین با افزایش سرعت زاویه‌ای، سفتی سیستم و به دنبال آن فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. همان‌طور که در شکل ۵ نشان داده شده است با افزایش سرعت زاویه‌ای، ولتاژ بهینه ابتدا کاهش می‌یابد و در سرعت زاویه‌ای  $(44 \text{ rad/s})$  به حداقل مقدار خود رسیده و سپس افزایش می‌یابد. برای نشان دادن مقادیر مقاومت بهینه بر حسب سرعت زاویه‌ای از لگاریتم مقادیر مقاومت بهینه استفاده می‌شود تا تغییرات آن نمایان‌تر باشد که در شکل ۶ دیده می‌شود. در شکل ۶ مشابه شکل ۵ همان روند نزولی-صعودی مشاهده می‌شود و حداقل مقدار مقاومت بهینه در همان سرعت زاویه‌ای  $(44 \text{ rad/s})$  به دست می‌آید. شکل ۷ تغییرات توان بهینه بر حسب سرعت زاویه‌ای را نشان می‌دهد. این تغییرات به صورت صعودی-نزولی بوده و حداکثر مقدار توان بهینه در سرعت زاویه‌ای  $(44 \text{ rad/s})$  تولید می‌شود که همان مقدار سرعت زاویه‌ای متناظر با حداقل ولتاژ و مقاومت بهینه است. توان با مجذور ولتاژ رابطه مستقیم و با مقاومت رابطه معکوس دارد. در سرعت زاویه‌ای  $(44 \text{ rad/s})$  ولتاژ و مقاومت بهینه هر دو حداقل هستند ولی همان‌طور که از شکل ۷ مشخص است توان بهینه در سرعت مذکور به حداکثر مقدار خود می‌رسد و این موضوع بیانگر این است که اثر مقاومت بیشتر از اثر ولتاژ در محاسبه توان است. دلیل این امر را می‌توان در شکل‌های ۵ و ۶ یافت. در شکل ۵ با افزایش سرعت زاویه‌ای از صفر تا  $(44 \text{ rad/s})$ ، ولتاژ  $(3/47 \text{ V})$  یعنی  $26\%$  کاهش می‌یابد در صورتی که در شکل ۶ با افزایش سرعت زاویه‌ای از صفر تا  $(44 \text{ rad/s})$ ، لگاریتم مقاومت  $3412/2 \Omega$  یعنی  $99/5\%$  کاهش می‌یابد در نتیجه، کاهش شدید مقاومت باعث افزایش توان بهینه می‌شود.

شکل ۸ تغییرات توان بهینه بر حسب ولتاژ بهینه را نشان می‌دهد. هر نقطه روی منحنی مربوط به یک سرعت زاویه‌ای است. در یک توان بهینه‌ی ثابت، دو مقدار ولتاژ بهینه وجود دارد که این دو ولتاژ از حداقل ولتاژ بهینه (V)  $9/502$  بیشتر است. همان‌طور که روی منحنی شکل ۸ مشخص شده است اگر از راست به چپ روی منحنی حرکت شود سرعت زاویه‌ای افزایش می‌یابد و از صفر به  $58 \text{ (rad/s)}$  می‌رسد. در لحظه‌ای که سرعت زاویه‌ای  $44 \text{ (rad/s)}$  است توان بهینه به بیشینه خود  $0/0940 \text{ (watt)}$  رسیده و با کاهش یا افزایش سرعت زاویه‌ای نسبت به سرعت زاویه‌ای  $44 \text{ (rad/s)}$ ، توان بهینه به‌طور پیوسته کاهش می‌یابد. همان‌طور که در شکل ۷ و ۸ مشاهده می‌شود توان مطلق بهینه در سرعت زاویه‌ای

شکل ۸ تغییرات توان بهینه بر حسب ولتاژ بهینه را نشان می‌دهد. هر نقطه روی منحنی مربوط به یک سرعت زاویه‌ای است. در یک توان بهینه‌ی ثابت، دو مقدار ولتاژ بهینه وجود دارد که این دو ولتاژ از حداقل ولتاژ بهینه (V)  $9/502$  بیشتر است. همان‌طور که روی منحنی شکل ۸ مشخص شده است اگر از راست به چپ روی منحنی حرکت شود سرعت زاویه‌ای افزایش می‌یابد و از صفر به  $58 \text{ (rad/s)}$  می‌رسد. در لحظه‌ای که سرعت زاویه‌ای  $44 \text{ (rad/s)}$  است توان بهینه به بیشینه خود  $0/0940 \text{ (watt)}$  رسیده و با کاهش یا افزایش سرعت زاویه‌ای نسبت به سرعت زاویه‌ای  $44 \text{ (rad/s)}$ ، توان بهینه به‌طور پیوسته کاهش می‌یابد. همان‌طور که در شکل ۷ و ۸ مشاهده می‌شود توان مطلق بهینه در سرعت زاویه‌ای



شکل ۸. توان بهینه بر حسب ولتاژ بهینه

جدول ۲. نتایج حل تحلیلی و شبیه‌سازی در سرعت زاویه‌ای  $44 \text{ (rad/s)}$

	فرکانس طبیعی (rad/s)	ولتاژ بهینه (Volt)	ولتاژ بهینه rms (volt)	مقاومت الکتریکی بهینه ( $\Omega$ )	توان بهینه (Watt)	درصد خطا توان (%)
حل دقیق	$48/35$	$9/7680$	$6/907$	$1015/06$	$0/0940$	$4/57$
شبیه‌سازی	$48/1$	$9/546$	$6/75$	$1015/06$	$0/0897$	

جدول ۳. نتایج حل تحلیلی و تقریب رزونانسی در سرعت زاویه‌ای (rad/s) ۴۶

درصد خطا توان (%)	توان بهینه (Watt)	مقاومت الکتریکی بهینه ( $\Omega$ )	ولتاژ بهینه (Volt)	فرکانس طبیعی (rad/s)
۰/۹۳	۰/۰۸۵۵	۱۰۶۶/۶۳	۹/۵۵۱	۴۶/۴۵
	۰/۰۸۶۳	۱۰۶۶/۶۳	۹/۵۹۶۹۹	۴۶/۴۵

ابتدا افزایش یافته و در سرعت (rad/s) ۴۴ به حداکثر مقدار خود می‌رسد و سپس روند کاهشی را طی می‌کند. توان با مجذور ولتاژ رابطه مستقیم و با مقاومت رابطه عکس دارد. علی‌رغم اینکه انتظار می‌رود با کاهش ولتاژ و مقاومت، توان نیز کاهش یابد اما نتایج، عکس این موضوع را نشان می‌دهد بنابراین نتیجه‌گیری می‌شود که اثر مقاومت از اثر ولتاژ در توان حاصل از برداشت انرژی بیشتر است. دلیل این امر کاهش شدید مقاومت بهینه با افزایش سرعت زاویه‌ای است. با توجه به اینکه در نمودار توان بر حسب ولتاژ، پدیده پرش اتفاق می‌افتد بنابراین دسترسی به توان بهینه مطلق در جهتی است که ولتاژ بهینه کاهش می‌یابد. در عمل می‌توان با افزایش سرعت تا (rad/s) ۴۴ و یا کاهش سرعت تا (rad/s) ۴۴ از ولتاژ بیشتر به سمت ولتاژ کمتر حرکت کرد. البته در حالت اول توان بهینه مطلق سریع‌تر حاصل می‌شود. بررسی نتایج سه روش به کار برده شده در این پژوهش نشان می‌دهد که خطای نسبی توان در حل دقیق و شبیه‌سازی کمتر از پنج درصد و در حل دقیق و تقریب رزونانس حل دقیق بسیار ناچیز (۰/۹۳٪) است.

اختلاف توان به دست آمده از حل دقیق و تقریب رزونانس حل دقیق (W) ۰/۰۰۰۸ است که خطای ۰/۹۳٪ را نشان می‌دهد.

نتایج نشان می‌دهد که پاسخ‌های روش تقریب رزونانس حل دقیق نسبت به روش حل دقیق ساده‌تر است و نیز نسبت به روش حل دقیق خطای ناچیزی دارد.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این پژوهش معادلات سیستم برداشت انرژی چرخان پیزوالکتریک به روش حل دقیق و تقریب رزونانس حل دقیق، حل شد. همچنین این سیستم در نرم‌افزار انسیس شبیه‌سازی شد. نتایج نشان داد که با افزایش سرعت زاویه‌ای، فرکانس طبیعی سیستم به‌طور پیوسته کاهش می‌یابد. با افزایش سرعت زاویه‌ای ولتاژ و مقاومت الکتریکی بهینه ابتدا کاهش یافته و در سرعت (rad/s) ۴۴ که فرکانس طبیعی سیستم (rad/s) ۴۸/۳۵ است، به حداقل مقدار خود می‌رسد و سپس افزایش می‌یابد. توان الکتریکی بهینه برخلاف ولتاژ و مقاومت، با افزایش سرعت زاویه‌ای

## ۶. مأخذ

- [1] Paradiso, Joseph A., and Thad Starner, "Energy scavenging for mobile and wireless electronics", *IEEE Pervasive computing*, 2005, Vol.4, no.1, pp.18-27.
- [2] Yang, Zhengbao, Shengxi Zhou, Jean Zu, and Daniel Inman, "High-performance piezoelectric energy harvesters and their applications", *Joule*, 2018, Vol.2, no.4, pp.642-697.
- [3] Erturk, Alper, and Daniel J. Inman, "An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations", *Smart materials and structures*, 2009, Vol.18, no.2, p.025009.

- [4] Yan, Lutao, Jingfeng Hou, Zhipeng Yang, and Xiangcheng Chu, "Design and experimental characterization of a vibration energy harvesting device for rotational systems", *Advances in Mechanical Engineering*, 2013, Vol.5, p.263614.
- [5] Yan, Lutao, Jingfeng Hou, Zhipeng Yang, and Xiangcheng Chu, "Design and experimental characterization of a vibration energy harvesting device for rotational systems", *Advances in Mechanical Engineering*, 2013, Vol.5, p.263614.
- [6] Guan, Mingjie, and Wei-Hsin Liao, "Design and analysis of a piezoelectric energy harvester for rotational motion system", *Energy Conversion and Management*, 2016, Vol.111, p.239-244.
- [7] Fan, Kangqi, Jianwei Chang, Fengbo Chao, and Witold Pedrycz, "Design and development of a multipurpose piezoelectric energy harvester", *Energy Conversion and Management*, 2015, Vol.96, pp.430-439.
- [8] Tang, Lihua, and Yaowen Yang, "A nonlinear piezoelectric energy harvester with magnetic oscillator", *Applied Physics Letters*, 2012, Vol.101, no.9, pp.094102.
- [9] Machado, Sebastián Pablo, Mariano Febbo, F. Rubio-Marcos, Leandro Alfredo Ramajo, and M. S. Castro, "Evaluation of the performance of a lead-free piezoelectric material for energy harvesting", *Smart Materials and Structures*, 2015, Vol.24, no.11, p.115011.
- [10] Fu, Hailing, and Eric M. Yeatman, "A methodology for low-speed broadband rotational energy harvesting using piezoelectric transduction and frequency up-conversion", *Energy*, 2017, Vol.125, pp.152-161.
- [11] Khoo, Shin Yee, Zainab Shakir Radeef, Zhi Chao Ong, Yu-Hsi Huang, Wen Tong Chong, and Zubaidah Ismail, "Structural dynamics effect on voltage generation from dual coupled cantilever based piezoelectric vibration energy harvester system", *Measurement*, 2017, Vol.107, pp.41-52.
- [12] Fu, Hailing, and Eric M. Yeatman, "Rotational energy harvesting using bi-stability and frequency up-conversion for low-power sensing applications: Theoretical modelling and experimental validation", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, Vol.125, pp.229-244.
- [13] Ramírez, Jose Miguel, Claudio David Gatti, Sebastián Pablo Machado, and Mariano Febbo. "Energy harvesting for autonomous thermal sensing using a linked E-shape multi-beam piezoelectric device in a low frequency rotational motion." *Mechanical Systems and Signal Processing* 133 (2019): 106267.
- [14] Cheng, Guangfeng, Chuh Mei, and Raymond YY Lee, "Large amplitude vibration of a cantilever beam with tip mass under random base excitation", *Advances in Structural Engineering*, 2002, Vol.4, no.4, pp.203-210.
- [15] Al-Ansary, M. D., "Flexural vibrations of rotating beams considering rotary inertia", *Computers & structures*, 1998, Vol.69, no.3, pp.321-328.
- [16] Basson, Madelein, Magdaline De Villiers, and NF Janse van Rensburg, "Solvability of a Model for the Vibration of a Beam with a Damping Tip Body", *Journal of Applied Mathematics*, 2014.
- [17] Banks, H. Thomas, and D. J. Inman, "On damping mechanisms in beams", 1991, pp.716-723.
- [18] Erturk, Alper, and Daniel J. Inman, "On mechanical modeling of cantilevered piezoelectric vibration energy harvesters", *Journal of intelligent material systems and structures*, 2008, Vol.19, no.11, pp.1311-1325.
- [19] Zhou, Shengxi, Junyi Cao, Daniel J. Inman, Jing Lin, and Dan Li, "Harmonic balance analysis of nonlinear tristable energy harvesters for performance enhancement", *Journal of Sound and Vibration*, 2016, Vol.373, pp.223-235.

- [20] Erturk, Alper, and Daniel J. Inman, "A distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters", *Journal of vibration and acoustics*, 2008, Vol.130, no.4.
- [21] Stanton, Samuel C., Alper Erturk, Brian P. Mann, and Daniel J. Inman, "Nonlinear piezoelectricity in electroelastic energy harvesters: modeling and experimental identification", *Journal of Applied Physics*, 2010, Vol.108, no.7, p.074903.
- [22] Khameneifar, Farbod, Siamak Arzanpour, and Mehrdad Moallem, "A piezoelectric energy harvester for rotary motion applications: Design and experiments", *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2012, Vol.18, no.5, pp.1527-1534.
- [23] Wang, Xu, and Liwei Lin, "Dimensionless optimization of piezoelectric vibration energy harvesters with different interface circuits", *Smart materials and structures*, 2013, Vol.22, no.8, p.085011.
- [24] Wang, Xu, and Liwei Lin, "Dimensionless optimization of piezoelectric vibration energy harvesters with different interface circuits", *Smart materials and structures*, 2013, Vol.22, no.8 p.085011.
- [25] Orban, F., "Damping of materials and members in structures", In *Journal of Physics: Conference Series*, 2011, Vol. 268, no.1, p.012022. IOP Publishing.
- [26] Sjöstrand, Jakob, "Some deviations from linear dynamics due to more accurate damping models", *TVSM-5000*, 2017.
- [27] Priya, Shashank, "Advances in energy harvesting using low profile piezoelectric transducers", *Journal of electroceramics*, 2007, Vol.19, no.1, pp.167-184.

۷. پیوست

پیوست الف

$$w_1(0) = 0, w_2(0) = 0, w_1'(0) = 0, w_2'(0) = 0$$

$$w_1|_{lp1} = w_1|_{lp1}, w_1'|_{lp} = w_1'|_{lp}$$

$$(E_{s1}I_{s1} + E_P I_P)w_1''|_{lp} = (E_{s1}I_{s1})w_1''|_{lp}$$

$$(E_{s1}I_{s1} + E_P I_P)w_1'''|_{lp} = (E_{s1}I_{s1})w_1'''|_{lp}$$

$$E_{s1}I_{s1}w_1''|_{ls1} = (I_1 + m_1 a_1^2)(\omega^2 + \Omega^2)w_1'|_{ls1} + m_1 d_1(\omega^2 + \Omega^2)w_1|_{ls1}$$

$$E_{s1}I_{s1}w_1'''|_{ls1} = -K_1(w_2|_{ls2} - w_1|_{ls1}) - m_1(\omega^2 + \Omega^2)w_1|_{ls1} - m_1 a_1(\omega^2 + \Omega^2)w_1'|_{ls1}$$

$$E_{s2}I_{s2}w_2''|_{ls2} = (I_2 + m_2 a_2^2)(\omega^2 + \Omega^2)w_2'|_{ls2} + m_2 a_2(\omega^2 + \Omega^2)w_2|_{ls}$$

$$E_{s2}I_{s2}w_2'''|_{ls2} = K_1(w_2|_{ls2} - w_1|_{ls1}) - m_2(\omega^2 + \Omega^2)w_2|_{ls2} - m_2 a_2(\omega^2 + \Omega^2)w_2'|_{ls2}$$

$$\begin{aligned}
 m = & \rho_{s1} A_{s1} \int_0^{l_p} \phi_{11}^2 dx + \rho_{s1} A_{s1} \int_{l_p}^{l_{s1}} \phi_{12}^2 dx + 2\rho_{p1} A_{p1} \int_0^{l_p} \phi_{11}^2 dx + \rho_{s2} A_{s2} \int_0^{l_{s2}} \phi_2^2 dx \\
 & + m_1 \left( \phi_{12}^2|_{l_{s1}} + a_1^2 \phi_{12}'^2|_{l_{s1}} + 2a_1 \phi_{12} \phi_{12}'|_{l_{s1}} \right) \\
 & + m_2 \left( \phi_2^2|_{l_{s2}} + a_2^2 \phi_2'^2|_{l_{s2}} + 2a_2 \phi_2 \phi_2'|_{l_{s2}} \right) + I_1 \phi_{12}''^2|_{l_{s1}} + I_2 \phi_2''^2|_{l_{s2}} \\
 & + \frac{1}{2} m_s \left( a_1 \phi_{12} \phi_{12}'|_{l_{s1}} + a_1 \phi_{12}'|_{l_{s1}} \phi_2|_{l_k} + \frac{1}{2} a_1^2 \phi_{12}'^2|_{l_{s1}} + \frac{1}{2} \phi_{12}^2|_{l_{s1}} + \phi_{12}|_{l_{s1}} \phi_2|_{l_k} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \phi_2^2|_{l_k} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c = & \int_0^{l_{p1}} c_{p1} I_{p1} \phi_{11}'' \phi_{11}' dx + \int_0^{l_{p1}} c_{s1} I_{s1} \phi_{11}'' \phi_{11}' dx + \int_{l_{p1}}^{l_{s1}} c_{s1} I_{s1} \phi_{12}'' \phi_{12}' dx + \int_0^{l_{s21}} c_{s2} I_{s2} \phi_2'' \phi_2' dx \\
 & + \int_0^{l_{p1}} c_{ap} \phi_{11}^2 dx + \int_{l_{p1}}^{l_{s1}} c_{as1} \phi_{12}^2 dx + \int_0^{l_{s2}} c_{as2} \phi_2^2 dx \\
 & + c_{am1} \left( \phi_{12}|_{l_{s1}} + \int_0^{2a_1} x \phi_{12}'|_{l_{s1}} dx \right)^2 + c_{am2} \left( \phi_2|_{l_{s2}} + \int_0^{2a_2} x \phi_2'|_{l_{s2}} dx \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k = & \left( E_{s1} I_{s1} \int_0^{l_{p1}} \phi_{11}''^2 dx + E_{s1} I_{s1} \int_{l_{p1}}^{l_{s1}} \phi_{12}''^2 dx + E_{p1} I_{p1} \int_0^{l_{p1}} \phi_{11}''^2 dx + E_{s2} I_{s2} \int_0^{l_{s2}} \phi_2''^2 dx \right) \\
 & - \Omega^2 \left( \rho_{s1} A_{s1} \int_0^{l_{p1}} \phi_{11}^2 dx + \rho_{s1} A_{s1} \int_{l_{p1}}^{l_{s1}} \phi_{12}^2 dx + 2\rho_{p1} A_{p1} \int_0^{l_{p1}} \phi_{11}^2 dx \right. \\
 & \left. + m_1 \left( \phi_{12}^2|_{l_{s1}} + a_1^2 \phi_{12}'^2|_{l_{s1}} + 2a_1 \phi_{12} \phi_{12}'|_{l_{s1}} \right) + \rho_{s2} A_{s2} \int_0^{l_{s2}} \phi_2^2 dx \right. \\
 & \left. + m_2 \left( \phi_2^2|_{l_{s2}} + a_2^2 \phi_2'^2|_{l_{s2}} + 2a_2 \phi_2 \phi_2'|_{l_{s2}} \right) \right) \\
 & - \frac{m_s \Omega^2}{3} \left( a_1^2 \phi_{12}'^2|_{l_{s1}} + \phi_{12}|_{l_{s1}} \phi_2|_{l_k} + \phi_{12}^2|_{l_{s1}} + \phi_2^2|_{l_k} + 2a_1 \phi_{12} \phi_{12}'|_{l_{s1}} \right. \\
 & \left. + a_1 \phi_{12}'|_{l_{s1}} \phi_2|_{l_k} \right) \\
 & + K_1 \left( 2a_1 \phi_{12} \phi_{12}'|_{l_{s1}} - 2a_1 \phi_{12}'|_{l_{s1}} \phi_2|_{l_k} - 2\phi_{12}|_{l_{s1}} \phi_2|_{l_k} + \phi_{12}^2|_{l_{s1}} + \phi_2^2|_{l_k} \right. \\
 & \left. + a_1^2 \phi_{12}'^2|_{l_{s1}} \right)
 \end{aligned}$$

$$p = \frac{1}{2} e_{zx} b_{s1} (h_{s1} + h_p) \phi_{11}'|_{l_p}$$

$$\begin{aligned}
 c_1 = R_1 \Omega^2 & \left( \rho_{s1} A_{s1} \int_0^{l_{p1}} \phi_{11} dx + \rho_{s1} A_{s1} \int_{l_{p1}}^{l_{s1}} \phi_{12} dx + 2\rho_p A_p \int_0^{l_{p1}} \phi_{11} dx \right. \\
 & \left. + m_1 (\phi_{12}|_{l_{s1}} + a_1 \phi'_{12}|_{l_{s1}}) \right) \\
 & + R_2 \Omega^2 \left( \rho_{s2} A_{s2} \int_0^{l_{s2}} \phi_2 dx + m_2 (\phi_2|_{l_{s2}} + a_2 \phi'_2|_{l_{s2}}) \right) \\
 & + m_s \Omega^2 \left( \frac{1}{12} h_{s2} \phi_{12}|_{l_{s1}} + \frac{1}{3} R_1 \phi_{12}|_{l_{s1}} - \frac{1}{3} h_1 \phi_{12}|_{l_{s1}} + \frac{1}{3} R_2 \phi_2|_{l_k} + \frac{1}{6} h_{s2} \phi_2|_{l_k} \right. \\
 & + \frac{1}{6} R_2 \phi_{12}|_{l_{s1}} + \frac{1}{6} R_1 \phi_2|_{l_k} - \frac{1}{6} h_1 \phi_2|_{l_k} + \frac{1}{6} R_2 a_1 \phi'_{12}|_{l_{s1}} + \frac{1}{12} h_{s2} a_1 \phi'_{12}|_{l_{s1}} \\
 & \left. + \frac{1}{3} R_1 a_1 \phi'_{12}|_{l_{s1}} - \frac{1}{3} h_1 a_1 \phi'_{12}|_{l_{s1}} \right) \\
 c_2 = -g & \left( \rho_{s1} A_{s1} \int_0^{l_p} \phi_{11} dx + \rho_{s1} A_{s1} \int_{l_p}^{l_{s1}} \phi_{12} dx + 2\rho_p A_p \int_0^{l_p} \phi_{11} dx + \rho_{s2} A_{s2} \int_0^{l_{s2}} \phi_2 dx \right. \\
 & + m_1 (\phi_{12}|_{l_{s1}} + a_1 \phi'_{12}|_{l_{s1}}) + m_2 (\phi_2|_{l_{s2}} + a_2 \phi'_2|_{l_{s2}}) \\
 & \left. + \frac{1}{2} m_s (\phi_{12}|_{l_{s1}} + a_1 \phi'_{12}|_{l_{s1}} + \phi_2|_{l_k}) \right)
 \end{aligned}$$

### پیوست پ

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \Omega^4 R^2 C_p^2 m - \Omega^2 R^2 C_p^2 k - 2\Omega^2 R^2 p^2 C_p + 4\Omega^2 m - 4k \\
 \alpha_2 &= \Omega^6 R^2 C_p^2 m^2 - 2\Omega^4 R^2 C_p^2 km - 4\Omega^4 R^2 mp^2 C_p + \Omega^2 R^2 C_p^2 k^2 + 4\Omega^2 R^2 p^2 C_p k + 4\Omega^2 R^2 p^4 \\
 & + 4\Omega^4 m^2 - 8\Omega^2 km + 4k^2 \\
 \alpha_3 &= \Omega^6 R^2 C_p^2 m^2 - 2\Omega^4 R^2 C_p^2 km + \Omega^2 R^2 C_p^2 k^2 + 4\Omega^2 R^2 p^2 C_p k + 4\Omega^4 m^2 - 8\Omega^2 km + \Omega^4 R^2 C_p^2 c^2 \\
 & + 8\Omega^2 Rcp^2 + 4\Omega^2 c^2 - 4\Omega^4 R^2 p^2 mC_p + 4\Omega^2 R^2 p + 4k^2 \\
 \alpha_4 &= \Omega^4 m + \Omega^2 c^2 - 2\Omega^2 km + k^2 \\
 \alpha_5 &= (\Omega^4 C_p^2 m^2 - 4\Omega^2 C_p mp^2 + \Omega^2 c^2 C_p^2 - 2\Omega^2 kmC_p^2 + 4C_p kp^2 + k^2 C_p^2 + 4p^4) \\
 \alpha_6 &= (\Omega^8 C_p^2 m^4 + 2\Omega^6 c^2 C_p^2 m^2 - 4\Omega^6 km^3 C_p^2 - 4\Omega^6 C_p m^3 p^2 + \Omega^4 c^4 C_p^2 - 4\Omega^4 c^2 C_p^2 km \\
 & - 4\Omega^4 c^2 C_p mp^2 + 6\Omega^4 C_p^2 k^2 m^2 + 12\Omega^4 C_p km^2 p^2 + 4\Omega^4 m^2 p^4 + 2\Omega^2 c^2 C_p^2 k^2 \\
 & + 4\Omega^2 c^2 C_p kp^2 + 4\Omega^2 c^2 p^4 - 4\Omega^2 C_p^2 k^3 m - 12\Omega^2 C_p k^2 mp^2 - 8\Omega^2 km p^4 + C_p^2 k^4 \\
 & + 4C_p k^3 p^2 + 4k^2 p^4) \\
 \alpha_7 &= 4\gamma^2 \mu^2 \omega^2 + 4\mu^2 \omega^4 + 4\eta\gamma\mu\psi\omega + \eta^2 \psi^2 - 4\eta\psi\sigma\omega + 6\sigma^2 \gamma^2 + 3\sigma^2 \omega^2
 \end{aligned}$$



## پیوست ت

$$2\varepsilon\mu\omega_n = \frac{c}{m}, \omega_n^2 = \frac{k}{m}, \psi\varepsilon = \frac{p}{m}, d_1 = \frac{c_1}{m}, d_2 = \frac{c_2}{m}, \gamma = \frac{2}{C_{PR}}, \eta = \frac{2p}{C_P}$$

## پی نوشت:

---

1. Inman & Erturk
2. Yan & et al.
3. Pillatsch & et al.
4. Liao & Guan
5. Fan & et al.
6. Machado & et al.
7. Yeatman & Fu
8. Khoo & et al.
9. Ramirez & et al.
10. ANSYS
11. root mean square
12. kelvin-voight model