

تحلیل ارتعاش ورق تاخوردۀ مدرج تابعی: رویکرد تفاضل مربعات

و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

محمد فدایی	مصطفی طالبی توتی*	نیما مهندسی
دانشیار	دانشیار	دانشجوی دکتری
دانشکده مهندسی مکانیک،	دانشکده مهندسی مکانیک،	دانشکده مهندسی مکانیک،
دانشگاه صنعتی قم	دانشگاه صنعتی قم	دانشگاه صنعتی قم
fadaee@qut.ac.ir	talebi@qut.ac.ir	mohandesi.n@qut.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۲/۲۵

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۳/۱۴

چکیده

در این پژوهش، ارتعاشات ورق‌های تاخوردۀ ساخته شده از مواد مدرج تابعی (FGM)^۱ مورد بررسی قرار گرفته است. مواد مدرج تابعی، به عنوان دسته‌ای از مواد پیشرفته، دارای ساختار ناهمگن بوده و مشخصات مکانیکی آن‌ها به طور پیوسته در راستای ضخامت تغییر می‌کند. ورق‌های تاخوردۀ، به دلیل سهولت تولید و هزینه‌ی پایین ساخت، کاربردهای متنوعی در صنایع مختلف یافته‌اند. از جمله کاربردهای نوظهور این ورق‌ها می‌توان به استفاده در طراحی و ساخت هواپیماهای جنگنده نسل پنجم با قابلیت رادارگریزی اشاره کرد. در این مطالعه، ابتدا مدول‌های الاستیک و چگالی ورق تاخوردۀ مواد مدرج تابعی در نظر گرفته شد. سپس، با استفاده از اصل همپلتون^۲، معادلات حاکم بر دینامیک و شرایط مرزی مربوط به هر دو لایه تشکیل‌دهنده ورق تاخوردۀ، به طور جداگانه استخراج شدند. با اعمال شروط پیوستگی در ناحیه تاخوردگی، معادلات حاکم، شرایط مرزی و معادلات پیوستگی به صورت یکپارچه فرمول‌بندی گردیدند. برای تحلیل این مجموعه معادلات، از روش ترکیبی لوی-تفاضل مربعات^۳ استفاده شد و با حل مسئله مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی ورق تاخوردۀ مواد مدرج تابعی محاسبه گردید. به منظور اعتبارسنجی نتایج تحلیلی، ورق تاخوردۀ مواد مدرج تابعی در نرم‌افزار شبیه‌سازی کامسول^۴ (مبتنی بر روش اجزاء محدود) مدل‌سازی و تحلیل شد. مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش اجزاء محدود با نتایج به دست آمده از روش ترکیبی لوی-تفاضل مربعات، نشان‌دهندۀ دقت بالای مدل‌سازی ریاضی و روش حل تحلیلی ارائه شده در این پژوهش است.

واژگان کلیدی: مواد مدرج تابعی؛ ارتعاشات؛ ورق تاخوردۀ؛ روش مربعات دیفرانسیلی

۱. مقدمه

ورق‌های تاخوردۀ نسبت به پوسته‌های منحنی شکل همانند پوسته‌ی استوانه‌ای، ساخت آسان و ارزان این سازه‌ها است به خصوص زمانی که جنس این سازه‌ها

ورق‌های تاخوردۀ در صنایع مختلفی همانند صنعت هوافضا کاربرد فراوانی دارند. برجسته‌ترین مزیت

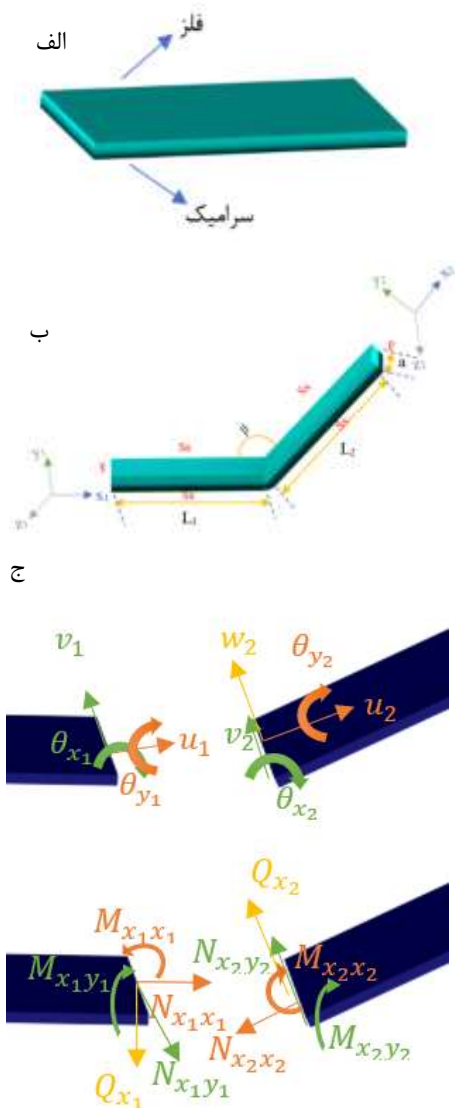
* نویسنده مسئول

از مواد کامپوزیتی باشد. مواد مدرج تابعی (FGM) نوعی مواد کامپوزیتی با ریز ساختار ناهمگن می‌باشد که خواص مکانیکی آن به طور پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند و غالباً از مواد همسان‌گرد همانند فلز و سرامیک ساخته می‌شود. استفاده از فلزات می‌تواند عملکرد مکانیکی را بالا ببرد و استفاده از سرامیک‌ها می‌تواند مقاومت حرارتی را بهبود بخشد. اولین بار مفهوم (FGM) توسط کوپوزومی^۵ برای مقاومت حرارتی توسعه داده شد [۱]. با رشد روز افزون فناوری ساخت مواد پیشرفته همانند مواد مدرج تابعی به طور گسترده در صنایعی همانند هوافضا و مهندسی خودرو به کار گرفته شد [۲]. نظریه‌های مختلفی توسط دانشمندان برای بررسی رفتار ورق‌ها توسعه یافت. در نظر گرفتن اثر تغییر شکل برشی در مدل‌سازی و تحلیل ورق با ضخامت متوسط ضروری است. بر این اساس نظریه‌هایی مانند نظریه ورق میندلین^۶ و نظریه ورق ردی^۷ توسعه داده شده است. بر اساس نظریه‌های ورق، رفتار مکانیکی ورق‌ها همانند خمش [۳ و ۴] و ارتعاشات [۵ و ۶] در طی پژوهش‌هایی بررسی گردید. حل دقیق ارتعاشات ورق مستطیلی از مواد مدرج تابعی توسط حسینی هاشمی و همکاران استخراج گردید [۷]. براساس تئوری غیر محلی مرتبه‌ی بالا و با استفاده از روش حل اجزاء محدود یک نانو صفحه از جنس ویسکوالاستیک مدل‌سازی شد و مورد تحلیل ارتعاشاتی قرار گرفت [۸]. پاسخ دینامیکی ورق کامپوزیتی مگنو الکترو الاستیک بر روی بستر ویسکو پاسترناک^۸ تحت بارگذاری انفجار بر اساس نظریه غیرمحلی مرتبه بالا بدست آمد [۹]. ارتعاشات آزاد یک ورق از مواد مدرج تابعی تقویت شده با لایه‌های گرافن، براساس نظریه مرتبه بالاتر برشی و با استفاده از روش حل اجزاء محدود تحلیل شد [۱۰]. در پژوهشی دیگر، حل دقیقی برای ارتعاشات حرارتی ورق از مواد مدرج تابعی چند جهته غوطه‌ور در آب ارائه شد [۱۱]. تجزیه و

تحلیل ارتعاش نانوتیرهای منحنی از مواد مدرج تابعی متخلخل روی بستر الاستیک با استفاده از روش عددی ریلی ریتز^۹ انجام شد [۱۲]. همچنین در پژوهشی دیگر رفتار دینامیکی ورق‌های تخت و تاشده در یک محیط گرمایی با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی غیر چند جمله‌ای بررسی شد [۱۳]. از یک نظریه مرتبه بالاتر ورق، برای تحلیل دینامیک گذرا صفحات کامپوزیت تاخورده تحت بارگذاری مختلف استفاده شد [۱۴]. ورق ساندویچی از مواد مدرج تابعی با لایه‌ی پیزوالکتریک تحت بارگذاری الکترومکانیکی به روش مربعات دیفرانسیلی حل گردید [۱۵]. ارتعاشات آزاد پل و پوسته متصل کروی استوانه‌ای به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته دوبعدی بررسی شد [۱۶]. اثر خواص مکانیکی الاستیک بر رفتار ارتعاشاتی پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی با شرایط مرزی مختلف مورد تحلیل قرار گرفت [۱۷].

ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی چرخان با وصله پیزوالکتریک به روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته و براساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)^{۱۰} بررسی شد [۱۸]. پاسخ ارتعاش آزاد و اجباری سازه‌های صفحه‌ای تاشده ساخته شده از کامپوزیت‌های چندلایه با استفاده از المان صفحه‌ای لاگرانژی ۹ گره‌ای و براساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول پیش‌بینی شد [۱۹]. ورق تاخورده آگرتیکی^{۱۱} براساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) به روش حل عددی مربعات دیفرانسیلی تحلیل شد [۲۰]. ارتعاشات ورق تاخورده بر اساس نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول و با استفاده از روش بدون شبکه‌ی گلرکین^{۱۲} تحلیل شد [۲۱]. تحلیل ارتعاش آزاد ورق تاشده کامپوزیتی چندلایه تحت بار رطوبتی-حرارتی با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول انجام شد [۲۲]. ویژگی‌های ارتعاش آزاد صفحات مستطیلی تاشده کامپوزیتی با

ضخامت ورق انجام می‌پذیرد و تنها در ابتدا و انتهای ضخامت ورق، خواص کاملاً مطابق با خواص سرامیک و یا خواص فلز می‌باشد.



شکل ۱. شماتیکی از ماده‌ی مدرج تابعی

در شکل ۱-ب یک ورق تاخوردۀ از جنس مواد مدرج تابعی نشان داده شده است. L_1 و L_2 به ترتیب به طول قسمت اول و طول قسمت دوم ورق اشاره دارد. همچنین a نشان دهنده‌ی عرض ورق تاخوردۀ می‌باشد. زاویه‌ی تاخوردگی ورق با β نشان داده شده است. شرایط مرزی در حل این مسئله به صورت دو انتها آزاد و چهار لبه دیگر به صورت تکیه‌گاه ساده در

لایه‌های غنی‌شده با صفحات گرافن، با استفاده از روش المان مربعی دیفرانسیلی تعمیم‌یافته^{۱۳} بررسی شد [۲۳].

ارتعاشات آزاد ورق تاخوردۀ مورب مرکب تقویت شده با نانولوله‌های کربنی به صورت مدرج تابعی با استفاده از رویکرد آیزوژنومتریک^{۱۴} و بر اساس نظریه کلاسیک ورق‌ها مورد مطالعه قرار گرفت [۲۴]. به روش تجربی و روش عددی مربعات دیفرانسیلی ورق کامپوزیت چندلایه الیاف شیشه با نانولوله کربنی تاخوردۀ بررسی شد و با آنالیز مودال، فرکانس طبیعی و شکل مودها بدست آمد [۲۵]. در تحقیق دیگر فرکانس طبیعی و شکل مودهای ورق ساندویچی با هسته‌ی متخلخل و رویه‌های کامپوزیتی تقویت‌شده با نانو لوله‌های کربنی مدرج تابعی بررسی شد [۲۶].

در این پژوهش به بررسی ورق تاخوردۀ مدرج تابعی بر اساس نظریه اول تغییر شکل برشی به روش حل ترکیبی لوی-تفاضل مربعات پرداخته شده است. این روش ضمن امکان بررسی شرایط مرزی مختلف، پیچیدگی‌های روش‌های عددی مانند روش تفاضل مربعات دوطرفه را از بین برده است. با استفاده از نرم‌افزار کامسول ورق مورد نظر با جنس مدرج تابعی به صورت دقیق به روش اجزاء محدود تحلیل شد و نتایج حاصل از روش تفاضل مربعات بر اساس نتایج حاصل از نرم‌افزار صحت‌سنجی شد. همچنین اثر تغییر ضخامت ورق، تغییر طول و تغییر زاویه‌ی تاخوردگی بر فرکانس طبیعی ورق تاخوردۀ مواد مدرج تابعی بررسی گردید.

۲. ویژگی‌های هندسی و مادی ورق تاخوردۀ

ورق تاخوردۀ از مواد مدرج تابعی در نظر گرفته می‌شود. شکل ۱-الف مواد مدرج تابعی را توصیف می‌کند. همانطور که نشان داده شده است جنس ورق از یک سطح به سطح دیگر از سرامیک به فلز تغییر پیدا می‌کند. تغییر خواص ماده به مرور و با تغییر

نظر گرفته می‌شود که به ترتیب لبه‌ی آزاد و تکیه‌گاه ساده در شکل با F و Ss نشان داده شده است. ثابت‌های الاستیک ورق FGM به صورت روابط ۱ محاسبه می‌شود.

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^P + E_m$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^P + \rho_m \quad (1)$$

$$G(z) = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))}$$

در روابط ۱، E ، G ، ρ ، h و ν به ترتیب نشان‌دهنده‌ی مدول یانگ، مدول برشی، چگالی، ضخامت ورق و ضریب پواسون می‌باشند. همچنین اندیس‌های c و m به ترتیب به ماده‌ی سرامیک و فلز اشاره دارند. ضریب توانی P یک عدد کلیدی در مواد مدرج تابعی می‌باشد که سرعت و نحوه تغییر تدریجی خواص مواد مدرج تابعی را از یک سطح به سطح دیگر تعیین می‌کند.

۳. معادلات حاکم

مؤلفه‌های تنش و کرنش بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول ورق‌ها مطابق با رابطه‌ی ۲ بیان می‌گردد.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{x_k x_k} \\ \epsilon_{y_k y_k} \\ \gamma_{x_k y_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \\ \frac{\partial v_k}{\partial y_k} \\ \frac{\partial u_k}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_{x_k}}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \theta_{y_k}}{\partial y_k} \\ \frac{\partial \theta_{x_k}}{\partial y_k} + \frac{\partial \theta_{y_k}}{\partial x_k} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{x_k z_k} \\ \gamma_{y_k z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \\ \theta_{y_k} + \frac{\partial w_k}{\partial y_k} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x_k x_k} \\ \sigma_{y_k y_k} \\ \sigma_{x_k y_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{k11} & Q_{k12} & 0 \\ Q_{k21} & Q_{k22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{k33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{x_k x_k} \\ \epsilon_{y_k y_k} \\ \epsilon_{x_k y_k} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x_k z_k} \\ \sigma_{y_k z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{k44} & 0 \\ 0 & Q_{k55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{x_k z_k} \\ \epsilon_{y_k z_k} \end{bmatrix}, \quad k=1,2.$$

(۲)

جایی که متغیر $(u_k, v_k, w_k, \theta_{x_k}, \theta_{y_k})$ نشان‌دهنده‌ی مؤلفه‌های جابه‌جایی و چرخش در نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول می‌باشند. متغیر k که مقادیر ۱ و ۲ را می‌گیرد به ورق اول و دوم اشاره می‌کند. درایه‌های ماتریس سفتی برای ورق مواد مدرج تابعی با توجه به تئوری FSDT مطابق با رابطه‌ی ۳ محاسبه می‌گردد که با توجه به جنس یکسان هر دو ورق، این روابط بر هر دو ورق قابل به کارگیری است.

$$Q_{11}(z) = Q_{22}(z)$$

$$= \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2}, \quad Q_{12}(z) = Q_{21}$$

$$= \frac{E(z)\nu(z)}{1 - \nu(z)^2} \quad (3)$$

$$Q_{66} = Q_{55} = Q_{44} = G(z)$$

با استفاده از رابطه‌ی ۳ ماتریس‌های سفتی مطابق با رابطه‌ی ۴ بدست می‌آید که با توجه به جنس و ضخامت

$$T_k = \frac{1}{2} \int_0^{L_k} \int_0^a \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_k \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial t} + z \frac{\partial \theta_{xk}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + z \frac{\partial \theta_{yk}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_k}{\partial t} \right)^2 \right] dz dy dx$$

با استفاده از روابط ۶ و ۷ و به کمک انتگرال گیری جزبه جز، پنج معادله‌ی حاکم برای قسمت‌های مختلف ورق مطابق با روابط ۸ بدست می‌آید.

$$\frac{\partial N_{x_k x_k}}{\partial x} + \frac{\partial N_{x_k y_k}}{\partial y} = J_{k1} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + J_{k2} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial N_{y_k y_k}}{\partial y} + \frac{\partial N_{x_k y_k}}{\partial x} = J_{k1} \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + J_{k2} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial Q_{xk}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yk}}{\partial y} =$$

$$J_{k1} \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{x_k x_k}}{\partial x} + \frac{\partial M_{x_k y_k}}{\partial y} - Q_{xk} = J_{k2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + J_{k3} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{y_k y_k}}{\partial y} + \frac{\partial M_{x_k y_k}}{\partial x} - Q_{yk} = J_{k2} \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + J_{k3} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial t^2},$$

در معادله‌ی ۸، N ها و M ها به ترتیب به منتجه‌های نیرو و ممان اشاره دارند که مطابق با رابطه‌ی ۹ بدست می‌آید.

یکسان هر دو قسمت ورق، قابل استفاده برای هر دو بخش می‌باشد.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, z, z^2) dz \quad (۴)$$

همچنین منتجه‌های نیروی محوری، نیروی برشی و ممان خمشی مطابق رابطه‌ی زیر خواهد بود.

$$\begin{pmatrix} N_{x_k x_k} \\ N_{y_k y_k} \\ N_{x_k y_k} \\ M_{x_k x_k} \\ M_{y_k y_k} \\ M_{x_k y_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{x_k x_k}^0 \\ \epsilon_{y_k y_k}^0 \\ \epsilon_{x_k y_k}^0 \\ \kappa_{x_k x_k} \\ \kappa_{y_k y_k} \\ \kappa_{x_k y_k} \end{pmatrix} \quad (۵)$$

با استفاده از اصل کمینه‌سازی انرژی (اصل همیلتون)، معادلات حاکم بر ورق و شرایط مرزی در لبه‌های ورق بدست می‌آید که به صورت رابطه‌ی ۶ بیان می‌گردد.

$$\sum_{k=1}^2 \left(\delta \int_0^t (U_k - T_k) dt \right) = 0 \quad (۶)$$

در رابطه‌ی ۶، U_k و T_k به ترتیب بیانگر انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی می‌باشد. مقادیر انرژی جنبشی و پتانسیل مطابق با رابطه‌ی ۷ بدست می‌آید.

$$U_k = \frac{1}{2} \int_0^{L_k} \int_0^a \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{x_k x_k} \epsilon_{x_k x_k} + \sigma_{y_k y_k} \epsilon_{y_k y_k} + \sigma_{x_k y_k} \gamma_{x_k y_k} + \sigma_{x_k z_k} \gamma_{x_k z_k} + \sigma_{y_k z_k} \gamma_{y_k z_k}) dz dy dx, \quad (۷)$$

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} + A_{33} \frac{\partial^2 u_k}{\partial y_k^2} \\
 & + (A_{12} \\
 & + A_{33}) \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k \partial y_k} \\
 & + B_{11} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial x_k^2} \\
 & + B_{33} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial y_k^2} \\
 & + (B_{12} \\
 & + B_{33}) \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial x_k \partial y_k} \\
 & = J_{k1} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \\
 & + J_{k2} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial t^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (A_{11} + A_{33}) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial y_k} + A_{33} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k^2} \\
 & + A_{22} \frac{\partial^2 v_k}{\partial y_k^2} \\
 & + (B_{12} \\
 & + B_{33}) \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial x_k \partial y_k} \\
 & + B_{33} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial x_k^2} \\
 & + B_{22} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial y_k^2} \\
 & = J_{k1} \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} \\
 & + J_{k2} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial t^2},
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{44} \left(\frac{\partial \theta_{xk}}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_k^2} \right) \\
 & + A_{55} \left(\frac{\partial \theta_{yk}}{\partial y_k} \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2 w_k}{\partial y_k^2} \right) \\
 & = J_{k1} \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (N_{x_k x_k} \quad N_{x_k y_k} \quad N_{y_k y_k}) \\
 & = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{x_k x_k} \quad \sigma_{x_k y_k} \quad \sigma_{y_k y_k}) dz, \\
 & (M_{x_k x_k} \quad M_{x_k y_k} \quad M_{y_k y_k}) \\
 & = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{x_k x_k} \quad \sigma_{x_k y_k} \quad \sigma_{y_k y_k}) \\
 & \times z dz, \\
 & [Q_{x_k} \quad Q_{y_k}] \\
 & = K_S \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{x_k z_k} \quad \sigma_{y_k z_k})
 \end{aligned} \tag{9}$$

در رابطه‌ی فوق K_S ضریب تصحیح برشی در نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول ورق‌ها می‌باشد که برابر با $\frac{5}{6}$ است. همچنین ممان‌های اینرسی مطابق با رابطه‌ی ۱۰ بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 & (J_{k1} \quad J_{k2} \quad J_{k3}) \\
 & = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_k (1 \quad z \quad z^2) dz
 \end{aligned} \tag{10}$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی ۹ در رابطه‌ی ۸، رابطه‌ی ۱۱ بدست می‌آید.

مرزی اعمال می‌شود. در مطالعه‌ی حاضر هر جا به شرایط مرزی اشاره نشود، شرایط مرزی FSsSsFSsSs در نظر گرفته شده است.

شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌ها در امتداد محور x_k ها

$$u_k = v_k = w_k = \theta_{xk} = M_{y_k y_k} = 0 \quad (12)$$

شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌ها در امتداد محور y_k ها

$$u_k = v_k = w_k = \theta_{yk} = M_{x_k x_k} = 0 \quad (13)$$

شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار در لبه‌ها در امتداد محور x_k ها و y_k ها

$$u_k = v_k = w_k = \theta_{xk} = \theta_{yk} = 0 \quad (14)$$

معادلات فوق به شرایط مرزی ورق در لبه‌ها اشاره دارد. همچنین در مرز اتصال بین دو ورق به یکدیگر شرایط پیوستگی جابه‌جایی، پیچش، نیرو و ممان حاکم است. شرایط پیوستگی مربوط به جابه‌جایی به صورت رابطه‌ی ۱۵ بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} u_1(L_1, y) &= -u_2(0, y) \\ &\quad \times \cos \beta \\ &\quad - w_2(0, y) \times \sin \beta \\ v_1(L_1, y) &= v_2(0, y) \\ w_1(L_1, y) &= u_2(0, y) \\ &\quad \times \sin \beta \\ &\quad - w_2(0, y) \times \cos \beta \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \theta_{x1}(L_1, y) &= \theta_{x2}(0, y) \\ \theta_{y1}(L_1, y) &= \theta_{y2}(0, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &B_{11} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + B_{33} \frac{\partial^2 u_k}{\partial y_k^2} \\ &\quad + (B_{12} \\ &\quad + B_{33}) \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k \partial y_k} \\ &\quad + D_{11} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial x_k^2} \\ &\quad + D_{33} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial y_k^2} \\ &\quad + (D_{12} \\ &\quad + D_{33}) \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial x_k \partial y_k} \\ &\quad - A_{44} \left(\theta_{xk} + \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \right) \\ &= J_{k2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \\ &\quad + J_{k3} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial y_k} + B_{33} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k^2} \\ &\quad + B_{22} \frac{\partial^2 v_k}{\partial y_k^2} \\ &\quad + (D_{12} \\ &\quad + D_{33}) \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial x_k \partial y_k} \\ &\quad + D_{33} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial x_k^2} \\ &\quad + D_{22} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial y_k^2} \\ &\quad - A_{55} \left(\theta_{yk} + \frac{\partial w_k}{\partial y_k} \right) \\ &= J_{k2} \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} \\ &\quad + J_{k2} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

اصل همیلتون علاوه بر معادلات حاکم بر ورق، شرایط مرزی را در لبه‌های ورق تعیین می‌کند. با استفاده از این اصل می‌توان شرایط مرزی را برای همه حالت‌ها تعیین کرد. برای ورق تاخوردگی برای شش لبه شرایط

مانند ψ در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه و نقاط مجاور با ضرایب وزنی مختلف، برابر است.

$$\frac{d\psi}{dx} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N_{Lk}} C_{ij}^1 \psi(x_j), \quad (18)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N_{Lk}} C_{ij}^2 \psi(x_j)$$

در جایی که N_{Lk} تعداد نقاط شبکه‌بندی در طول x_k می‌باشد. C_{ij}^1 و C_{ij}^2 به ترتیب بیانگر ضرایب ثابت وزنی برای مشتق مرتبه اول و دوم می‌باشد [۹]. مقادیر ضرایب وزنی بستگی به تعداد نقاط شبکه و طول کل ورق دارد و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$C_{ij}^1 = \begin{cases} \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^{N_{Lk}} (x_i - x_j)}{(x_i - x_j) \prod_{j=1, j \neq i}^{N_{Lk}} (x_i - x_j)} & i \neq j \\ - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_{Lk}} C_{ij}^1 & i = j \end{cases} \quad (19)$$

$$C_{ij}^2 = \begin{cases} 2 \left(C_{ij}^1 C_{ii}^1 - \frac{C_{ij}^1}{(x_i - x_j)} \right) & i \neq j \\ - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_{Lk}} C_{ij}^2 & i = j \end{cases}$$

یک توزیع کسینوسی از نقاط شبکه گسسته، که در آن توزیع متراکم‌تری از نقاط شبکه گسسته در نزدیکی لبه‌ها ارائه شده است در این تحقیق استفاده شده که به صورت زیر است.

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right] L ; \quad i = 1, 2, \dots, N_{Lk} \quad (20)$$

با به کارگیری رابطه ۱۸ در معادلات حرکت و روابط حاکم بر شرایط مرزی و پیوستگی، و جدا کردن درجات آزادی دامنه (d) و مرز (b)، معادلات جبری به صورت ماتریسی زیر قابل بیان است. سطر اول معادله ۲۱،

همچنین معادلات مربوط به منتجه‌های نیرو و ممان برای مرز پیوستگی دو ورق در رابطه ۱۶ ارائه شده است.

$$\begin{aligned} & -N_{x_1 x_1}(L_1, y) \times \cos \beta \\ & \quad + Q_{x_1}(L_1, y) \\ & \quad \times \sin \beta \\ & = N_{x_2 x_2}(0, y) \\ N_{x_1 y_1}(L_1, y) & = N_{x_2 y_2}(0, y) \\ -N_{x_1 x_1}(L_1, y) \times \sin \beta & \\ & \quad - Q_{x_1}(L_1, y) \\ & \quad \times \cos \beta = Q_{x_2}(0, y) \\ M_{x_1 x_1}(L_1, y) & = M_{x_2 x_2}(0, y) \\ M_{x_1 y_1}(L_1, y) & = M_{x_2 y_2}(0, y) \end{aligned} \quad (16)$$

شکل ۱-ج کمک می‌کند تا روابط پیوستگی (۱۵-۱۶) قابل فهم باشد. با توجه به اینکه هدف بررسی ارتعاشات آزاد است و لبه‌های روبه‌روی هم در جهت y به صورت تکیه‌گاه ساده (حل لوی) می‌باشد، مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{bmatrix} u_k(x_k, y_k, t) \\ v_k(x_k, y_k, t) \\ w(x_k, y_k, t) \\ \theta_{xk}(x_k, y_k, t) \\ \theta_{yk}(x_k, y_k, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_k(x_k) \sin \lambda y \\ \tilde{v}_k(x_k) \cos \lambda y \\ \tilde{w}_k(x_k) \sin \lambda y \\ \tilde{\theta}_{xk}(x_k) \sin \lambda y \\ \tilde{\theta}_{yk}(x_k) \cos \lambda y \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (17)$$

که در رابطه ۱۷، $\lambda = \frac{n\pi}{a}$ می‌باشد که n بیانگر شماره موج در راستای عرضی ورق است. با جای‌گذاری رابطه ۱۷ در رابطه ۱۱، معادلات حرکت به صورت معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند. در ادامه جهت حل معادلات حاصل، از روش تفاضل مربعات استفاده می‌شود. روش حل تفاضل مربعات یک روش حل عددی مرتبه بالا می‌باشد و بر این اساس که مشتق یک تابع

معادلات جبری حرکت و سطر دوم، معادلات جبری شرط مرزی و پیوستگی است.

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{dd} & \bar{k}_{ab} \\ \bar{k}_{bd} & \bar{k}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ b \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \bar{m}_{dd} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ b \end{Bmatrix} = 0 \quad (21)$$

که بردار درجات آزادی مرز به صورت زیر می‌باشد.

$$(b)^T = [\tilde{u}_1(x_1), \tilde{u}_1(x_{NL_1}), \tilde{v}_1(x_1), \tilde{v}_1(x_{NL_1}), \tilde{w}_1(x_1), \tilde{w}_1(x_{NL_1}), \tilde{\theta}_{x1}(x_1), \tilde{\theta}_{x1}(x_{NL_1}), \tilde{\theta}_{y1}(x_1), \tilde{\theta}_{y1}(x_{NL_1}), \tilde{u}_2(x_1), \tilde{u}_2(x_{NL_2}), \tilde{v}_2(x_1), \tilde{v}_2(x_{NL_2}), \tilde{w}_2(x_1), \tilde{w}_2(x_{NL_2}), \tilde{\theta}_{x2}(x_1), \tilde{\theta}_{x2}(x_{NL_2}), \tilde{\theta}_{y2}(x_1), \tilde{\theta}_{y2}(x_{NL_2})] \quad (22)$$

مابقی درجات آزادی در بردار دامنه ظاهر خواهد شد. با حل مسئله مقدار ویژه رابطه ۲۱، فرکانس طبیعی مورد نظر یافت خواهد شد.

۴. صحنه‌سنجی

به منظور صحنه‌سنجی، حل ترکیبی لوی-تفاضل مربعات با نتایج حاصل از مرجع [۲۱] مقایسه گردید که نتایج مطابق با جدول ۱ می‌باشد.

جدول ۱. مقایسه نتایج پارامتر فرکانسی بی‌بعد حل تحلیلی با جدول ۲ از مرجع [۲۱]

مُد	مُد (۱و۲)	مُد (۱و۳)	مُد (۴و۱)
مرجع			
[Error! Bookmark not defined.]	۱۲۲۱۰	۱۲۲۳۰	۱۶۱۱۳
۱۲	۰	۰	۰
تفاضل	۱۲۱۸۲	۱۲۱۸۹	۱۶۰۵۴
مربعات	۰	۰	۰
درصد اختلاف	۱/۲۶	۱/۸۳	۰/۹۶

نتایج نشان داد که حل تحلیلی از دقت قابل قبولی برخوردار است. همچنین جهت مقایسه نتایج با نتایج اجزاء محدود و همچنین رسم شکل مودها ورق تاخوردگی در نرم‌افزار شبیه‌سازی کامسول به روش اجزاء محدود تحلیل گردید. در این شبیه‌سازی از ماژول Solid mechanics استفاده گردید. مش‌بندی با استفاده از المان‌های شش‌وجهی^{۱۵} و به روش سوپیت^{۱۶} استفاده شد. مدل‌سازی ورق تاخوردگی به صورت تک‌لایه انجام شد و خواص مواد مدرج تابعی به صورت آنچه در رابطه‌ی ۱ اشاره شد در نرم‌افزار تعریف گردید. تعداد المان‌ها در این تحلیل ۸۰۰۰۰ می‌باشد. مشخصات هندسی و مادی ورق مطابق با جدول ۲ است. ویژگی‌ها در همه‌ی نتایج بر اساس این جدول می‌باشد مگر اینکه تغییر پارامتر ذکر گردد. شرایط مرزی در همه‌ی نتایج به صورت FSsSsFSsSs می‌باشد.

جدول ۲. مشخصات هندسی و الاستیک ورق تاخوردگی

E_c (GPa)	E_m (GPa)	ρ_c (kg/m ³)	ρ_m (kg/m ³)	N	β (deg)
۳۸۰	۷۰	۳۸۰۰	۲۷۰۲	۰/۳	۱۲۰
L_1 (m)	L_2 (m)	a (m)	h (m)	P	
۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۰۰۳	۱	

چهار فرکانس طبیعی نخست عرضی ورق تاخوردگی مدرج تابعی براساس مقادیر در نظر گرفته شده در جدول ۲ مطابق با جدول ۱ بدست آمد. مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش تفاضل مربعات با نتایج حاصل از حل نرم‌افزاری بر اساس روش اجزاء محدود، نشان می‌دهد که مدل‌سازی ریاضی و استفاده از روش عددی تفاضل مربعات در این مسئله از دقت قابل قبولی برخوردار است. اما اختلافات می‌تواند ناشی از خطای ایجاد شده در حل اجزاء محدود باشد. با توجه به اینکه ورق تا شده از مواد مدرج تابعی است بنابراین شبکه‌بندی در

راستای ضخامت ورق از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. و حتماً باید در راستای ضخامت تعداد شبکه‌بندی زیاد باشد که در غیراین صورت ماهیت مواد مدرج تابعی بی‌معنی می‌شود. اما افزایش تعداد المان در راستای ضخامت هم هزینه محاسباتی بالایی را تحمیل می‌کند.

جدول ۳. مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش تفاضل مربعات و اجزاء

اجزاء محدود	محدود برای زاویه $\beta=180^\circ$			
	فرکانس (۱و۱) Hz	فرکانس (۱و۲) Hz	فرکانس (۱و۳) Hz	فرکانس (۴و۱) Hz
تفاضل مربعات	۱۲۷۸/۲	۱۶۷۲/۶	۳۶۹۸/۲	۵۸۱۴/۱
درصد خطا	۷	۴/۲	۶/۴	۱/۴

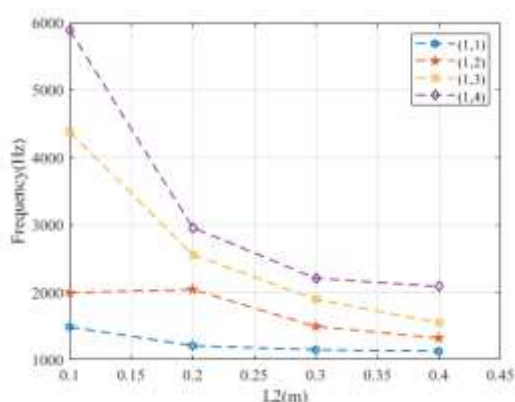
در جدول ۴ همگرایی حل ترکیبی لوی- تفاضل مربعات برای تعداد گره‌های مختلف آورده شده است. با توجه به نتایج، همگرایی در تعداد نقاط شبکه ۲۰ در هر طرف حاصل شده است. در ادامه از تعداد نقطه 20×20 برای استخراج نتایج استفاده خواهد شد.

جدول ۴. فرکانس طبیعی در تعداد نقاط شبکه‌بندی مختلف برای زاویه ۱۲۰ درجه

شماره مود	5×5	10×10	15×15	20×20
(۱و۱) Hz	۱۲۹۸/۵	۱۲۹۲/۸	۱۲۸۹/۵	۱۲۸۹/۵
(۱و۲) Hz	۱۶۲۷/۵	۱۵۹۰/۴	۱۵۸۹/۶	۱۵۸۹/۵
(۱و۳) Hz	۲۹۶۱/۰	۳۲۶۳/۳	۳۲۵۸/۷	۳۲۵۸/۵
(۱و۴) Hz	۱۲۴۳۳/۹	۴۹۷۴/۱	۴۹۷۹/۶	۴۹۷۹/۴
(۱و۵) Hz	۲۱۶۹۹/۹	۶۷۹۴/۵	۶۸۰۵/۱	۶۸۰۴/۴
(۱و۶) Hz	۲۵۱۵۴/۹	۸۴۸۸/۹	۸۴۶۹/۸	۸۵۴۹/۶

۵. بحث و نتایج

تغییر پارامترهای هندسی ورق تاخوردگی از جنس FGM می‌تواند در فرکانس‌های طبیعی آن اثرگذار باشد. برای بررسی این موضوع هر بار با تغییر یک پارامتر و ثابت ماندن بقیه‌ی پارامترها مطابق با جدول ۲، نتایج بدست می‌آید و نمودار فرکانس طبیعی برحسب تغییرات پارامتر مورد نظر در چهار مود نخست عرضی ورق تاخوردگی مورد نظر رسم می‌گردد. طول ورق یکی از پارامترهایی که می‌تواند در تغییر فرکانس ورق تاخوردگی مؤثر باشد. در شکل ۲ تغییرات فرکانس طبیعی برحسب طول L_2 رسم گردیده است. مشاهده می‌گردد که با افزایش طول فرکانس طبیعی کاهش پیدا می‌کند که این کاهش فرکانس در مودهای بالاتر بسیار بیشتر است.

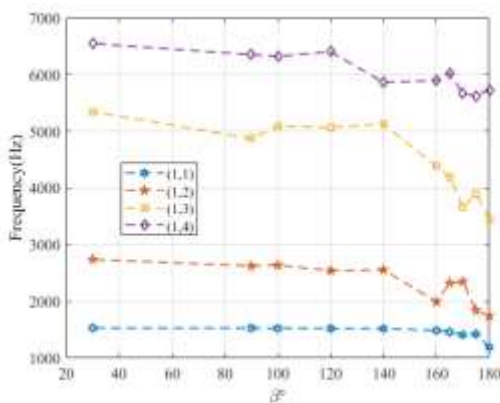


شکل ۲. نمودار تغییرات فرکانس برحسب طول L_2

با افزایش طول ورق، دو پدیده فیزیکی هم‌زمان رخ می‌دهد که هر دو باعث کاهش فرکانس طبیعی می‌شوند. اول، با بلندتر شدن ورق، جرم و در نتیجه اینرسی آن افزایش می‌یابد؛ به این معنا که برای به نوسان درآوردن ورق سنگین‌تر به نیروی بیشتری نیاز

ایجاد این انحنای موضعی زیاد، ورق باید در برابر خمش‌های شدید مقاومت کند؛ ضخامت بیشتر، مستقیماً این مقاومت خمشی موضعی را افزایش می‌دهد. به عبارت دیگر، در مودهای پایین، انرژی ارتعاش عمدتاً به صورت خمش کلی ورق است، اما در مودهای بالاتر، انرژی به نواحی کوچک‌تری متمرکز شده و وابستگی شدیدتری به سختی خمشی ناشی از ضخامت پیدا می‌کند. از این رو، افزایش ضخامت تأثیر فزاینده‌ای بر فرکانس مودهای بالاتر دارد.

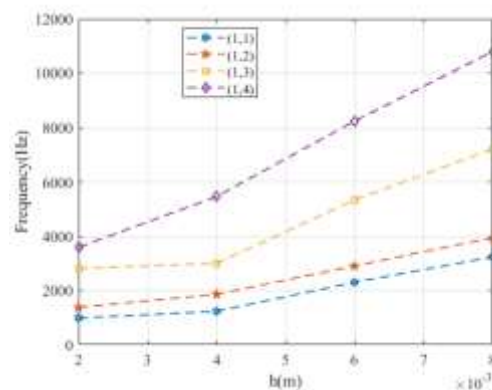
در شکل ۴ نمودار تغییرات فرکانس طبیعی برحسب تغییرات زاویه‌ی تاخوردگی نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد که با کاهش زاویه‌ی تاخوردگی، به عبارت دیگر با فاصله گرفتن از حالت تخت، فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند و سپس تقریباً ثابت می‌ماند.



شکل ۴. نمودار تغییرات فرکانس برحسب زاویه تاخوردگی (β) در شکل ۵ نمودار تغییرات فرکانس طبیعی برحسب تغییرات عرض ورق در چهار شکل مود اول نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد که با افزایش عرض ورق فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

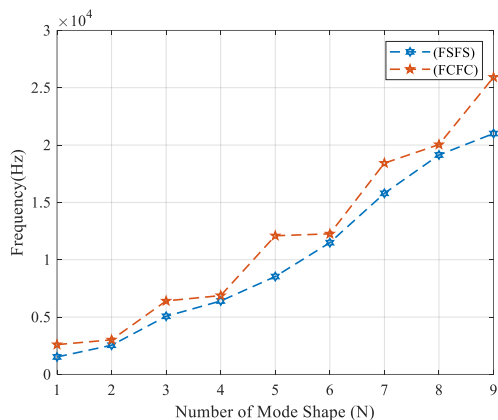
است که این امر خود باعث کندتر شدن نوسان‌ها و کاهش فرکانس می‌شود. دوم، همزمان با افزایش طول، ورق نرم‌تر و انعطاف‌پذیرتر گشته و مقاومت خمشی آن کاهش می‌یابد، در حالی که یک ورق کوتاه‌تر سفت‌تر بوده و نوسان‌های سریع‌تری دارد. ترکیب این دو اثر، یعنی افزایش اینرسی و کاهش سختی خمشی، سبب می‌شود که ورق بلندتر با فرکانس کم‌تری نوسان کرده و ارتعاشات آن به طور محسوسی آهسته‌تر گردد.

در شکل ۳ نمودار تغییرات فرکانس طبیعی برحسب تغییرات ضخامت ورق (h) نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد که با افزایش ضخامت ورق فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند که این افزایش در مودهای بالاتر با نرخ بیشتری همراه است.



شکل ۳. نمودار تغییرات فرکانس برحسب تغییرات ضخامت ورق (h)

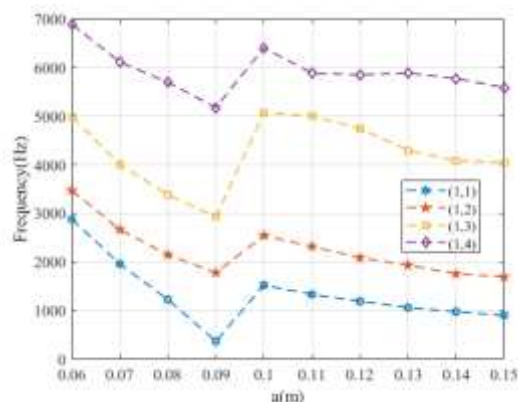
افزایش ضخامت ورق موجب افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌گردد، زیرا اگرچه جرم ورق به صورت خطی افزایش می‌یابد، اما سختی خمشی ورق با توان بالاتری نسبت به جرم رشد می‌کند و بر اثر اینرسی غلبه می‌نماید. این پدیده در مودهای بالاتر به مراتب پررنگ‌تر است، زیرا در مودهای بالا، شکل مود دارای انحنای شدیدتر و تعداد بیشتری نیم‌موج است. برای



شکل ۷. نمودار تغییرات فرکانس برحسب شماره مودها در شرایط مرزی مختلف

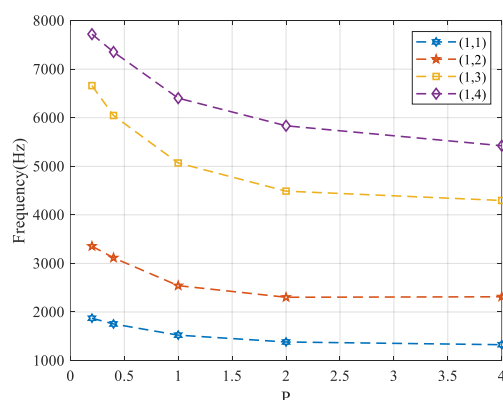
۶. نتیجه‌گیری

در این مطالعه ارتعاشات آزاد ورق تاخوردگی مواد مدرج تابعی بررسی شد. نخست معادلات حاکم بر ورق، بر اساس نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و با استفاده از اصل همیلتون بدست آمد. برای ورق تاخوردگی متشکل از دو ورق ساده در ناحیه‌ی تاخوردگی شرایط پیوستگی نوشته شد. معادلات دیفرانسیلی بدست آمده با استفاده از حل عددی لوی-مربعات دیفرانسیلی حل گردید و فرکانس‌های طبیعی بدست آمد. جهت صحت‌سنجی نتایج، ورق مواد مدرج تابعی در نرم‌افزار کامسول مدل‌سازی شد و فرکانس‌های طبیعی بدست آمد. نتایج حل لوی-مربعات دیفرانسیلی با حل اجزاء محدود در نرم‌افزار کامسول با یکدیگر مقایسه گردید و نشان داده شد که حل لوی-مربعات دیفرانسیلی از دقت مناسبی برای این مسئله برخوردار است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش طول و ضخامت ورق، فرکانس طبیعی ورق تاخوردگی مواد مدرج تابعی به ترتیب کاهش و افزایش پیدا می‌کند. با کاهش زاویه‌ی تاخوردگی و دور شدن از حالت تخت ابتدا فرکانس طبیعی افزایش یافته و



شکل ۵. نمودار تغییرات فرکانس برحسب عرض ورق (a)

از دیگر پارامترهایی که می‌تواند مورد توجه قرار گیرد ضریب توانی مواد مدرج تابعی است. در شکل ۶ نمودار فرکانس طبیعی برحسب ضریب توانی برای چهار مود نخست آورده شده است.



شکل ۶. نمودار تغییرات فرکانس طبیعی برحسب ضریب تابع توانی (P)

نوع شرایط مرزی در لبه‌های ورق تاخوردگی یکی از پارامترهای مهمی است که تأثیر مهمی بر فرکانس‌های طبیعی دارد. در شکل ۷ اثر شرایط مرزی FSFS و FCFC با یکدیگر مقایسه شده است.

تاخوردہ مدرج تابعی در کامسول و ارائه نتایج جدید از نوآوری‌های این تحقیق است.

سپس تقریباً ثابت باقی می‌ماند. استفاده از روش ترکیبی لوی-تفاضل مربعات و مدل‌سازی دقیق ورق

۷. منابع

- [1] M. Koizumi, concept of FGM, *Ceram. Trans.*, 34, 1993, 3–10.
- [2] hen HS, Xiang Y, Lin F. Nonlinear vibration of functionally graded graphene-reinforced composite laminated plates in thermal environments. *Comput Method Appl M* 2017; 319: 175-193
- [3] Fares ME, Elmarghany MK, Atta D. An efficient and simple refined theory for bending and vibration of functionally graded plates. *Compos Struct* 2009;91(3):296–305.
- [4] Roque CMC, Ferreira AJM, Reddy JN. Analysis of Mindlin micro plates with a modified couple stress theory and a meshless method. *Appl Math Model* 2013;37(7):4626–4633
- [5] Demirhan PA, Taskin V. Bending and free vibration analysis of Levy-type porous functionally graded plate using state space approach. *Compos B Eng* 2019; 160:661–676.
- [6] Baferani AH, Saidi AR, Ehteshami H. Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. *Compos Struct* 2011;93(7):1842–1853.
- [7] Hosseini-Hashemi S, Fadaee M, Atashipour SR. A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates. *Int J Mech Sci* 2011;53(1):11–22.
- [8] Pham, Q. H., Tran, V. K., Tran, T. T., & Zenkour, A. M. (2023). Nonlocal higher-order finite element modeling for vibration analysis of viscoelastic orthotropic nanoplates resting on variable viscoelastic foundation. *Composite Structures*, 318, 117067.
- [9] Pham, Q. H., Tran, V. K., & Nguyen, P. C. (2024). Dynamic response of magneto-electro-elastic composite plates lying on visco-Pasternak medium subjected to blast load. *Composite Structures*, 337, 118054.
- [10] Tran, T. V., Tran, T. D., Hoa Pham, Q., Nguyen-Thoi, T., & Tran, V. K. (2020). An ES-MITC3 Finite Element Method Based on Higher-Order Shear Deformation Theory for Static and Free Vibration Analyses of FG Porous Plates Reinforced by GPLs. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020(1), 7520209.
- [11] Pham, Q. H., Tran, V. K., & Nguyen, P. C. (2024). Exact solution for thermal vibration of multi-directional functionally graded porous plates submerged in fluid medium. *Defence Technology*, 35, 77-99.
- [12] Pham, Q. H., Nhan, H. T., Tran, V. K., & Zenkour, A. M. (2023). Hygro-thermo-mechanical vibration analysis of functionally graded porous curved nanobeams resting on elastic foundations. *Waves in Random and Complex Media*, 1-32.
- [13] Thakur, B. R., Verma, S., Singh, B. N., & Maiti, D. K. (2021). Dynamic analysis of flat and folded laminated composite plates under hygrothermal environment using a nonpolynomial shear deformation theory. *Composite Structures*, 274, 114327.
- [14] S.Y. Lee, S.C. Wooh, S.S. Yhim, Dynamic behavior of folded composite plates analyzed by the third order plate theory, *Int. J. Solids Struct.* 41 (2004) 1879-1892.

- [15] Feri, M., Krommer, M., & Alibeigloo, A. (2025). Elasticity solution of functionally graded viscoelastic sandwich plates with piezoelectric layers under electrothermomechanical loading using DQM. *Journal of Thermal Stresses*, 48(1), 82-111.
- [۱۶] معتضدیان، م.، جعفری، ا.، " ارتعاشات آزاد پنل و پوسته متصل کرووی استوانه‌ای به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته دو بعدی "، نشریه علمی صوت و ارتعاش، ۱۴۰۲، شماره ۲۳، دوره ۱۲، صفحه ۱۵۶-۱۷۶
- [۱۷] شکوری، م.، خادمی کوهی، م.، " تحلیل و بررسی اثر خواص مکانیکی الاستیک بر رفتار ارتعاشاتی پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد با خواص گرادیانی با شرایط مرزی مختلف "، نشریه علمی صوت و ارتعاش، ۱۴۰۱، شماره ۲۱، دوره ۱۱، صفحه ۱۱۰-۱۱۸
- [۱۸] رحمانفر، ا.، جعفری، ا.، " ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی چرخان با وصله پیزوالکتریک با روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته "، نشریه علمی صوت و ارتعاش، ۱۴۰۳، شماره ۲۵، دوره ۱۳، صفحه ۳-۳۲
- [19] Guha Niyogi A, Laha MK, Sinha PK (1999) Finite element vibration analysis of laminated composite folded plate structures. *Shock Vib* 6:273–283.
- [20] Mohandesi, N., Talebitooti, M., & Fadaee, M. (2024). Free vibration analysis of a folded auxetic plate using the Levy-differential quadrature method. *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, 14(5), 155-165.
- [21] Peng, L.X., Kitipornchai, S. & Liew, K.M. Free Vibration Analysis of Folded Plate Structures by the FSDT Mesh-free Method. *Comput Mech* 39, 799–814 (2007). <https://doi.org/10.1007/s00466-006-0070-9>
- [22] Das S, Guha Niyogi A (2020) Free-vibration analysis of epoxy-based cross-ply laminated composite folded plates subjected to hygrothermal loading. *J Inst Eng India Ser C*.
- [23] Javani M, Kiani Y, Eslami MR (2022) On the free vibrations of FG-GPLRC folded plates using GDQE procedure. *Compos Struct*.
- [24] Mohammadi, H., & Setoodeh, A. R. (2021). Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite skew folded plates using the isogeometric approach. *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 53(4), 2239-2260.
- [25] Heidari-Soureshjani, A., Asadi, E., & Talebitooti, R. (2024). CNT-woven glass fiber laminated composite for folded plate application: 2D-GDQ and experimental study. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 24(3), 163.
- [26] Salehipour, H., Shahmohammadi, M. A., & Civalek, Ö. (2024). Natural frequencies and modal shapes of folded sandwich plates made of porous core and FG-CNTRC coating layers resting on two parameters elastic foundation. *Aerospace science and technology*, 148, 109077.

-
- ¹ Functionally Graded Materials, (FGM)
 - ² Hamilton Principle
 - ³ Levy-deference of squares
 - ⁴ COMSOL
 - ⁵ Koizumi
 - ⁶ Mindlin
 - ⁷ Reddy
 - ⁸ Visco-Pasternak
 - ⁹ Rayleigh Ritz
 - ¹⁰ First order shear deformation
 - ¹¹ Auxeticity
 - ¹² mesh-free Galerkin method
 - ¹³ Generalized differential quadratic element method
 - ¹⁴ Isogeometric
 - ¹⁵ hexahedral quadratic
 - ¹⁶ Swept