

بررسی عددی و تحلیلی رفتار کمانشی ایرفویل متقارن از جنس

پوسته کامپوزیتی لایه چینی شده

علیرضا ابراهیمی حصارى	امین دارانی گلدره	محمد خاکباز*
دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک	کارشناسی ارشد مهندسی هوافضا	کارشناسی ارشد مهندسی هوافضا
دانشکده مهندسی مکانیک،	دانشکده مهندسی مکانیک،	دانشکده مهندسی مکانیک،
دانشگاه علم و صنعت ایران	دانشگاه علم و صنعت ایران	دانشگاه علم و صنعت ایران
Ebrahimi_a@mecheng.iust.ac.ir	Amin.civilpilot2023@gmail.com	Mohammadkhakbaz.eng@gmail.com

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۴/۱۹

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۲/۲۰

چکیده

این مطالعه، به بررسی تحلیلی و عددی بارگذاری کمانشی و شکل‌مدهای کمانشی یک ایرفویل متقارن NACA0012 با پوسته کامپوزیتی لایه چینی شده پرداخته است. خصوصیات مکانیکی پوسته بال از نوع کامپوزیت با لایه چینی $[0/90/45/-45]_s$ و جنس AS4/3501-6 در نظر گرفته شده است. در این پژوهش، ابتدا تئوری کمانش صفحات نازک با استفاده از روش انرژی پتانسیل و معادلات حاکم بر کمانش پوسته‌های نازک تشریح شده و سپس مدل‌سازی عددی در نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس، با شبکه‌بندی انتخابی از نوع مربعی و المان پوسته S4R انجام گرفته است. نتایج حاصل از مودهای کمانشی نشان می‌دهد که با افزایش شماره مود، بار کمانشی بحرانی نیز افزایش می‌یابد. نتایج حاصل از حل تحلیلی و عددی بارگذاری کمانشی لایه‌ها با اختلاف کمتر از ۱۰ درصد نشان می‌دهد که، مقطع $[0]_s$ کم‌ترین بار کمانشی را متحمل می‌شود در حالی که، چیدمان $[90]_s$ حدود $27/6$ برابر مقاومت بیشتری را نشان می‌دهد. همچنین استفاده از تیغه تقویت کننده و بوم نگهدارنده^۱ باعث افزایش چشمگیر بار بحرانی به میزان حدود ۱۰ برابر نسبت به لایه چینی شبه ایزوتروپیک می‌شود که این امر اهمیت استفاده از تقویت کننده‌های درون سازه‌ای را نشان می‌دهد.

واژگان کلیدی: ایرفویل NACA0012، بارگذاری کمانشی، مودهای کمانشی، پوسته کامپوزیتی، تیغه تقویت کننده،

بوم نگهدارنده

۱. مقدمه

هیدرواستاتیکی قرار گیرد. در صورت وجود نقص، ناپایداری دینامیکی ایجاد شده منجر به کاهش ظرفیت حمل بار پوسته نسبت به بارگذاری شبه استاتیکی

یک سازه پوسته مانند یک کشتی زیردریایی، می‌تواند تحت فشار بیش از حد ناگهانی یا شوک‌های متوالی

* نویسنده مسنول

می‌شود. علاوه بر این، ارتعاشات دامنه بزرگ که قبل از رسیدن به فشار محدودکننده دینامیکی رخ می‌دهند، می‌توانند تأثیر مخربی بر ماده پوسته داشته باشند. بنابراین، بررسی ناپایداری دینامیکی پوسته‌های کامپوزیتی تقویت شده با حلقه‌های داخلی تحت فشار هیدرواستاتیکی می‌تواند، از اثرات مخرب ناپایداری دینامیکی سیستم بکاهد [۱]. در این پژوهش، از یک مدل اجزای محدود برای تحلیل هندسی غیرخطی سازه‌های پوسته‌ای استفاده شده است. این مدل بر اساس فرمول‌بندی لایه‌ای کم‌عمق مارگور^۲ [۲] توسعه یافته است. همانند نظریه‌ی صفحه‌ی میندلین-رایسنر^۳ [۳]، این فرمول‌بندی اثرات تغییر شکل برشی عرضی صفحه را در نظر می‌گیرد، که امکان تحلیل دقیق رفتار ناپایدار و گسیختگی پوسته‌های نازک و ضخیم را در یک چارچوب واحد فراهم می‌سازد، به شرطی که فرآیندهای انتگرال‌گیری مربوط به نسبت دهانه به ضخامت به درستی انجام شود. در این پژوهش، مسائل کمانش پوسته‌های کامپوزیتی با توجه به وجود نواقص اولیه تحت فشار هیدرواستاتیک مورد بررسی قرار گرفته است. در این راستا، مدلی نوین برای نواقص اولیه ارائه شده است. بر اساس روابط سینماتیکی نوع ساندرز^۴، حل‌های تحلیلی فشار کمانشی بحرانی برای پوسته‌های کامپوزیتی، هم در حالت با نواقص اولیه و هم بدون آن، استخراج شده است. نتایج تحلیلی به‌دست‌آمده با نتایج آزمایشگاهی منتشر شده و همچنین نتایج تحلیل اجزای محدود مقایسه شده و توافق خوبی نشان می‌دهند. نمونه‌های عددی مختلفی ارائه شده و تأثیر پارامترهای نواقص اولیه، زاویه‌ی لایه‌ها و ترتیب چینش لایه‌ها بر فشار کمانشی بحرانی این نوع پوسته‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. یافته‌ها

نشان می‌دهند که در صورت کنترل صحیح پارامترهای نواقص اولیه، می‌توان فشار کمانشی بحرانی را به‌طور چشمگیری افزایش داد. این نتایج می‌تواند در طراحی کاربردی کپسول‌های فشار استوانه‌ای کامپوزیتی برای زیردریایی‌ها مفید واقع شود و نقش مهمی در بهبود ایمنی و کارایی این نوع سازه‌ها ایفا کند [۴]. طی تحقیقاتی، لیو و همکاران [۵] تحلیل کمانش تیغه توربین بادی را با استفاده از روش‌های اجزای محدود و توزیع فشار محاسبه شده توسط دینامیک سیالات محاسباتی^۵ (CFD) بررسی کرده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که داده‌های فشار ناشی از تحلیل CFD به عنوان ورودی برای مدل‌سازی ساختاری و تحلیل کمانش به کار رفته و با نتایج تحلیل‌های قبلی مقایسه شده است. بر اساس یافته‌ها، استفاده از تکنیک CFD توانایی پیش‌بینی بار باد و توزیع فشار را دارد، اما این توزیع فشار، پدیده‌ی استال^۶ را نشان نمی‌دهد؛ زیرا فرضیاتی در نظر گرفته شده که طراحی توربین بادی را محدود می‌کند. همچنین، بیپین و همکاران [۶] روی مواد کامپوزیت فیبر کربن تقویت‌شده، که ویژگی‌های برتر در مدول و مقاومت نسبت به مواد فلزی دارند، مطالعه کرده‌اند. با استفاده از تیرهای چندلایه آنتروپیک^۷ در نرم‌افزار انسیس^۸، تحلیل کمانش انجام شده و نتایج با آزمایش‌های تجربی تأیید شده است. استفاده کارآمد و مؤثر از توربین‌های بادی هنوز یک فناوری جدید است و چالش‌های زیادی از جمله میزان تولید برق دارد. پره‌های توربین بادی تحت تأثیر نیروهای مختلفی مانند فشاری، آیرودینامیکی، گرانشی و غیره قرار می‌گیرند. پره‌ها باید به اندازه کافی پایدار باشند و برای مقاومت در برابر نیروها، ارزیابی توانایی ساختاری یک پره ضروری است. در این کار، پایداری

بارهای بحرانی کمانش و حالت‌های کمانش پره‌های کامپوزیتی مختلف مانند ترازبندی توپر، توخالی و مستطیلی با استفاده از ایرفویل NACA 63-415 تعیین می‌شود. پره‌ها با استفاده از تکنیک لایه‌گذاری دستی ساخته شده‌اند و پنج حالت کمانش با استفاده از نرم‌افزار اجزای محدود تعیین شده است. تنظیمات تجربی برای پره‌ها انجام شد تا بارهای بحرانی کمانش تعیین و با نتایج تحلیلی تأیید شوند [۷]. کمانش یک ایرفویل (بال) معمولاً در دسته کمانش صفحات و پوسته‌ها قرار می‌گیرد. این به این دلیل است که ایرفویل‌ها به عنوان ساختارهای دوبعدی با ضخامت کم در نظر گرفته می‌شوند و رفتار آن‌ها بیشتر شبیه به صفحات و پوسته‌ها است تا تیرها. اگر ایرفویل‌ها به عنوان یک صفحه نازک در نظر گرفته شود، کمانش می‌تواند ناشی از بارهای فشاری باشد که در جهت عمود بر صفحه اعمال می‌شود. اگر ایرفویل دارای انحنای مشخصی باشد، می‌توان آن را به عنوان یک پوسته در نظر گرفت. در این حالت، کمانش ممکن است، تحت تأثیر انحنای ساختار و بارهای خارجی باشد. به طور تجربی رفتار کمانش در صفحات و پانل‌های منحنی تحت موارد بار پیچیده مانند ترکیب برش و خمش در صفحه بسیار در صنایعی مانند هوافضا، مکانیک و عمران قابل بحث می‌باشد. روش‌هایی برای پیش‌بینی رفتار قبل و بعد از کمانش سازه جهت بالا بردن ضریب اطمینان سازه وجود دارد مانند روش تداخل سنجی که می‌تواند تغییرات داخل و خارج صفحه را با استفاده از کانتورهای جابجایی مشخص کند [۸-۱۲]. مشکل ناپایداری سازه یا کمانش یک مسئله طراحی رایج برای تقریباً همه انواع هندسه و شرایط بارگذاری است. در حالی که معمولاً برای مواردی که فشار وجود دارد در

نظر گرفته می‌شود. پیچش، فشار و حتی کشش به طور بالقوه می‌تواند منجر به ساختاری ناپایدار شود. مقادیر قدرت نیز ممکن است مشخص شوند، اما تنها در آن ناپایداری ممکن است به دنبال یک شکست اولیه باشد. به عنوان مثال، این می‌تواند در یک رویداد ضربه‌ای مهم باشد [۱۳]. زمانی که یک سازه به اندازه کافی ضعیف شود، امکان کمانش وجود خواهد داشت، مگر اینکه هندسه به اندازه کافی انعطاف‌پذیر باشد. [۱۴، ۱۵]. استفاده از مواد کامپوزیتی در مقایسه با مواد سنتی، اساساً در تمام حوزه‌های صنعتی که به سازه‌های قدرتمند، سبک و مقرون به صرفه نیاز می‌باشد، رو به افزایش است. نمونه‌ای از یک سازه سبک و چالش‌برانگیز ساخته شده از مواد کامپوزیتی، پره‌های توربین بادی هستند. در واقع، پره‌های توربین بادی مدرن به طور چشمگیری بزرگ‌تر می‌شوند و امروزه طول یک پره استاندارد بیش از ۶۰ متر است. پره‌های توربین بادی اغلب به دلیل شرایط محیطی که در آن کار می‌کنند، با بارهای بسیار پیچیده‌ای روبرو هستند. یکی از بارهای اصلی که بر روی بیل توربین بادی اعمال می‌شود، بار فشاری است که می‌تواند باعث خمش در جهت بال و لبه شود. از سوی دیگر، در نتیجه استراتژی طراحی بهینه، پره‌های توربین بادی به سازه‌های جدار نازک تبدیل می‌شوند که خطر پدیده کمانش را افزایش می‌دهد. بنابراین، درک رفتار پره توربین بادی تحت این نوع بار بسیار مهم است. در پژوهشی، رفتار کمانش کلاهدک اسپار^۹ یک پره توربین بادی با استفاده از روش اجزای محدود بررسی شده است. برای انجام این کار، یک مقطع ایرفویل عمومی NACA 634-421 در نظر گرفته شده است. کلاهدک اسپار به عنوان یک پوسته استوانه‌ای منحنی چند لایه در نظر گرفته شده است.

یک مطالعه پارامتری به منظور بررسی تأثیر انتخاب مواد، ترتیب چیدمان و تعداد لایه‌ها بر مقاومت کمانشی کلاهدک تیر انجام شده است. نتایج نشان داد که بار کمانش به پارامترهای مورد نظر بسیار حساس است. تحلیل استاتیکی سازه برای آزمایش پایداری آن تحت بارهای استاتیکی کافی نیست و تحلیل کمانش ضروری است [۱۶]. در پژوهشی دیگر، یک پره توربین بادی بهینه ساخته شده از رزین اپوکسی تقویت شده با الیاف کف/شیشه با استفاده از روش BEM^۱ طراحی شد. سپس با استفاده از روش اجزای محدود با نرم‌افزار Patran®/Nastran تحلیل شد و تحلیل کمانش تحت حالت بار نهایی مربوط به سرعت باد کلاس I (۷۰ متر بر ثانیه) انجام شد. نتایج نشان می‌دهد که ضریب بار کمانش برای حالت اول بزرگ‌تر از ۱ است که نشان می‌دهد سازه ایمن است و کمانش رخ نمی‌دهد [۱۷]. در تحقیقاتی که آقای زارعی و همکاران انجام دادند، از حسگر پیزوالکتریک برای نظارت بر بار و وقوع دوشاخه شدن تغییر شکل یک صفحه چندلایه نامتقارن استفاده شده است. نظارت بر شکل و بار یک سازه تغییر شکل‌پذیر برای اطمینان از استقرار صحیح سازه و عدم بارگذاری بیش از حد و در نتیجه جلوگیری از شکست سازه ضروری است. از یک عملگر پیزوسرامیکی برای تأمین بار فعال‌سازی و مجبور کردن سازه به تغییر حالت پایداری از یک حالت به حالت دیگر استفاده می‌شود. یک مدل اجزای محدود غیرخطی مبتنی بر تئوری جابجایی لایه‌ای با در نظر گرفتن اثرات کوپلینگ الکترومکانیکی عناصر پیزوالکتریک برای اهداف شبیه‌سازی توسعه داده شده است. یک مکانیزم کنترلی نیز برای کنترل فعال شکل سازه به کار گرفته شده است. مشاهده می‌شود که استفاده از کامپوزیت

چندپایدار برای طراحی یک سازه تغییر شکل‌پذیر می‌تواند انرژی مورد نیاز برای تغییر شکل را به میزان قابل توجهی کاهش دهد. کنترل بیشتر پدیده کمانش با استفاده از حسگر و عملگر پیزوالکتریک به همراه یک کنترل‌کننده روشن/خاموش می‌تواند به طور مؤثر و کارآمد عملکرد سازه تغییر شکل‌پذیر را در طول مانور افزایش دهد [۱۸].

تمایز اساسی این پژوهش با کارهای پیشین در رویکرد چندمقیاسه آن است که از سطح میکرومکانیک فیبر-ماتریس تا رفتار کلی سازه را با مقاومت درون ساختاری مانند تیغه تقویت‌کننده و بوم نگهدارنده پوشش داده و حل تحلیلی بواسطه معادلات تعادل و تئوری کلاسیک پوسته‌های چندلایه را در جهت تخمین بار بحرانی کمانشی با توجه به جنس و لایه چینی سازه برای هندسه ایرفویل تعمیم داده است. همچنین، استفاده از تکنیک‌های CFD پیشرفته برای تحلیل توزیع تنش در مناطق بحرانی و بهره‌گیری از روش اجزای محدود با المان‌های خاص برای کامپوزیت‌های با لایه‌چینی متفاوت، امکان پیش‌بینی دقیق نقاط آغاز کمانش محلی و تخمین بار بحرانی کمانش را فراهم آورده است.

۲. معادلات و حل تحلیلی

برای یک پوسته کامپوزیتی چندلایه، معادلات تعادل در حالت کمانش بر اساس تئوری کلاسیک لایه‌ای، به شرح معادلات ۱-۳ می‌باشد.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^n (Q^*)_K (z_K^2 - z_{K-1}^2) \quad (6)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{K=1}^n (Q^*)_K (z_K^3 - z_{K-1}^3) \quad (7)$$

که در آن Q^* ماتریس سفتی کامپوزیت در مختصات کلی سیستم است. برای یک پوسته کامپوزیتی، با توجه به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، معادلات حاکم به صورت روابط ۸-۱۲ تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (12)$$

که در آن Q_x و Q_y نیروهای برشی عرضی تعریف می‌شوند. برای این تئوری، روابط ساختاری به فرم معادله ۱۳ اثبات می‌شود.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \\ & + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ & + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن N_x ، N_y و N_{xy} نیروهای غشایی در صفحه، M_x ، M_y و M_{xy} ممان‌های خمشی و w ، تغییر شکل عمودی پوسته می‌باشد. به صورت کلی، روابط ساختاری نیرو-کرنش، برای پوسته‌های دارای کامپوزیت چندلایه، به صورت ماتریسی و با توجه به رابطه ۴، بیان می‌شود.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (4)$$

جایی که A_{ij} ماتریس سفتی غشایی، B_{ij} ماتریس کوپلینگ خمشی-غشایی، D_{ij} ماتریس سفتی خمشی، ε^0 کرنش لایه‌ای میانی و k انحنای خمشی می‌باشد. ماتریس سفتی برای یک کامپوزیت چندلایه به صورت معادلات ۵-۷ محاسبه می‌گردد.

$$A_{ij} = \sum_{K=1}^n (Q^*)_K (z_K - z_{K-1}) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \Delta q_j = 0 \quad (17)$$

جایی که q_i و q_j درجات آزادی هستند. برای یک پوسته کامپوزیتی تحت بارگذاری محوری، معادله مشخصه بار بحرانی به صورت معادله ۱۸ و برای یک پوسته استوانه‌ای بار بحرانی کمانش محوری به صورت معادله ۱۹ تقریب زده می‌شود.

$$|k_0 + \lambda k_G| = 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} N_{xCR} &= \frac{x^2}{L^2} (D_{11} \\ &+ \frac{2(D_{12} + 2D_{66})n^2 \pi^2 R^2}{m^2 L^2} \\ &+ \frac{D_{22} n^4 \pi^4 R^4}{m^4 L^4} \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن k_0 ماتریس سفتی اولیه سازه، k_G ماتریس سفتی هندسی، λ ضریب بار بحرانی کمانش، L طول استوانه، R شعاع استوانه، m تعداد نیم موج طولی و n تعداد نیم موج محیطی است.

۳. حل عددی اجزای محدود

مسئله برای یک بال هواپیما با مقطع ایرفویل NACA0012 به طول ۷ متر و عرض یکنواخت ۱ متر به گونه‌ای تعریف می‌شود که پوسته بال از نوع کامپوزیتی با لایه‌چینی $[0/90/45/-45]_s$ و جنس AS4/3501-6 در نرم افزار اجزای محدود آباکوس در نظر گرفته شده است. خواص مکانیکی کامپوزیت به عنوان ورودی مسئله، در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱. خواص مکانیکی کامپوزیت AS4/3501-6

مقدار	خواص
147(GPa)	E_{xx}

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (13)$$

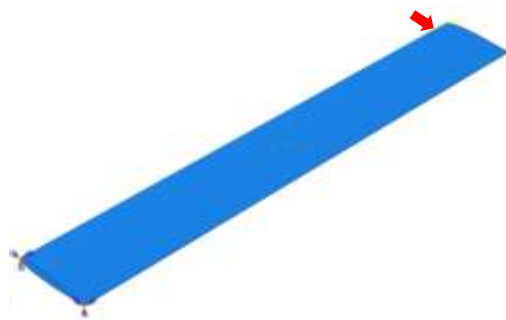
که در آن مقادیر A_{ij} ضرایب سفتی برشی، عرضی هستند. انرژی پتانسیل کل برای یک پوسته کامپوزیتی، به صورت معادلات ۱۴-۱۶ می‌باشد. جایی که، U انرژی کرنشی کامپوزیتی و V پتانسیل نیروهای کمانشی هستند.

$$\Pi = U + V \quad (14)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left[\begin{pmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{54} & A_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \right] dA \quad (15)$$

$$V = -\frac{1}{2} \int_A \left[N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + N_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dA \quad (16)$$

که در نهایت با توجه به اصل انرژی پتانسیل کمینه در رابطه ۱۷، معادله مشخصه کمانش بدست می‌آید.



شکل ۲. ایجاد شرایط مرزی و بارگذاری مقطع



شکل ۳. ایجاد مقاومت درون ساختاری بال



شکل ۴. شبکه‌بندی نهایی سیستم

۴. نتایج حاصل از حل تحلیلی

پس از محاسبه ماتریس سختی Q با توجه به خواص مهندسی کامپوزیت، لایه چینی ۸ لایه‌ای و ماتریس خمشی D با توجه به زاویه و موقعیت هر لایه مشخص می‌شود. با جایگذاری در معادله نهایی، بار کمانشی بحرانی برای هر حالت محاسبه می‌شود که نتایج نهایی حاصل از حل تحلیلی، به شرح جدول ۲ می‌باشد. جایی که لایه $[0]_s$ ، با تحمل کم‌ترین بار کمانشی معادل ۸۷۵۸ نیوتن، ضعیف‌ترین مقاومت ساختاری را ثبت

$E_{yy} = E_{zz}$	9(GPa)
$G_{xy} = G_{xz}$	5(GPa)
G_{yz}	3(GPa)
$\nu_{xy} = \nu_{xz}$	0.3
ν_{yz}	0.42
Ply-thickness	0.148(mm)
ρ	1.5g/cm ³

پس از ایجاد هندسه اولیه، تعریف مشخصات ایرفویل و وارد کردن خواص مکانیکی پوسته، لایه‌چینی کامپوزیت صورت می‌گیرد. برای تعریف شرایط مرزی، انتهای بال به صورت گیردار در نظر گرفته شده و بارگذاری بحرانی در لبه آزاد آن ایجاد می‌شود. برای افزایش مقاومت سازه‌ای درون ساختار بال، از تیغه تقویت کننده و بوم نگهدارنده استفاده شده و شبکه‌بندی نهایی بال از نوع المان مربعی انتخاب می‌شود. اشکال ۱-۴، خلاصه‌ای از روند شبیه‌سازی مسئله را نشان می‌دهند.



شکل ۱. تعریف هندسه اولیه مقطع ایرفویل

کرده است. از طرفی دیگر ساختار دارای تیغه تقویت کننده و بوم نگهدارنده به عنوان تقویت کننده‌های سازه‌ای در مقابل بارگذاری‌های بحرانی، بیشترین بار کمانشی معادل $2498130/58$ نیوتن را متحمل می‌شود.

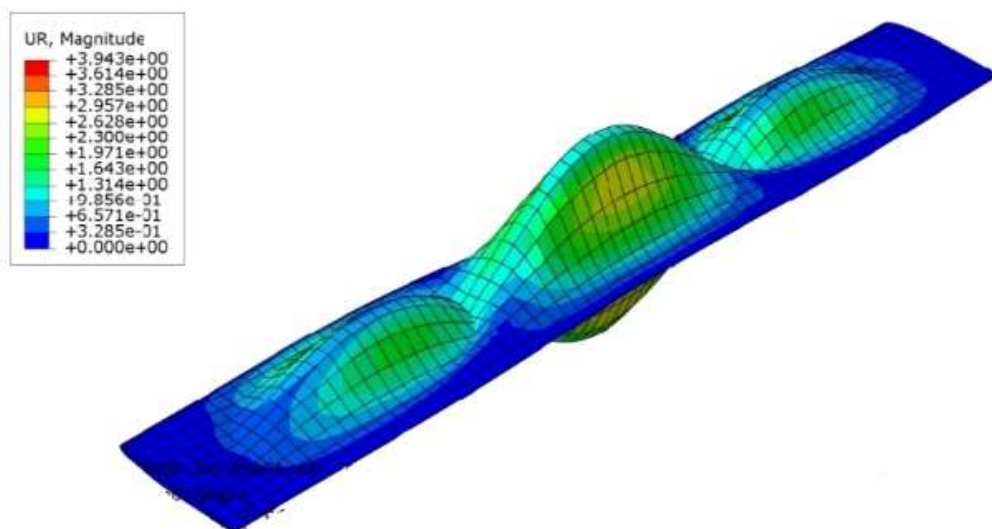
جدول ۲. نتایج حل تحلیلی بارگذاری کمانشی در مقاطع

جنس مقطع	بار کمانشی (N)
$[0/90/45/-45]_s$	106660
$[0]_s$	8758
$[90]_s$	241709
Ribs and Stringers	2498130.58

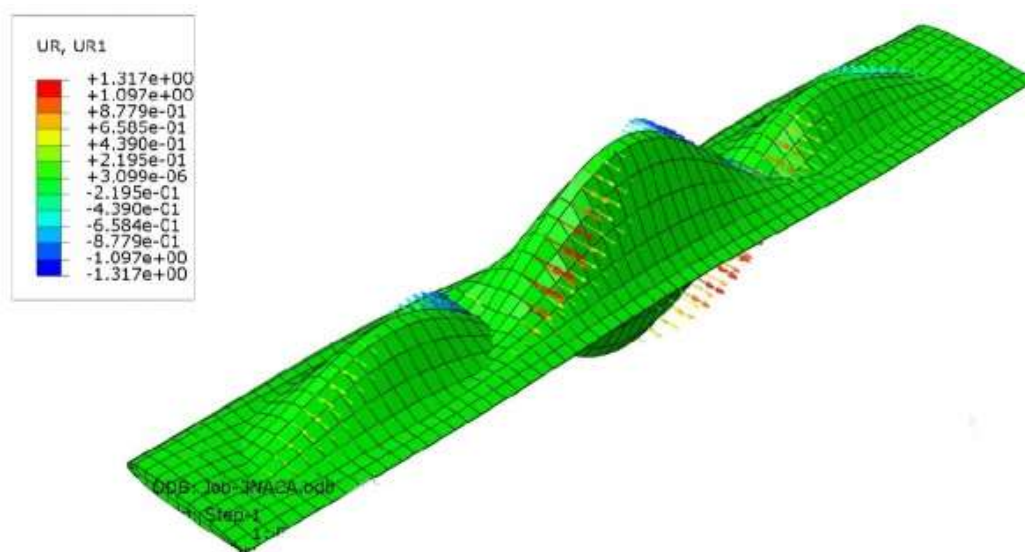
۵. نتایج حاصل از حل عددی

در این بخش نتایج جابجایی و تغییر شکل ایرفویل طراحی شده تحت بارگذاری کمانشی بررسی می‌شود. تصاویر ۵-۹، میزان جابجایی و تغییر شکل برآیند کلی، در راستای محور طولی و جابجایی‌های جهتی را نشان می‌دهد. در شکل ۵، جابجایی دورانی (U_R) (Magnitude) نمایش داده شده که محدوده تغییرات آن از صفر تا حداکثر $3/943$ رادیان است. توزیع رنگی نشان می‌دهد که بیشترین جابجایی در نواحی میانی سه برآمدگی اصلی سازه رخ داده است. این الگوی تغییر شکل به صورت سه موج متوالی (سه نیم‌موج کمانشی) در طول ایرفویل نمایان است که نشان‌دهنده مودهای کمانشی اوپلری در سازه طویل تحت بارگذاری محوری می‌باشد. براساس تئوری کمانش ستون‌های طویل، با افزایش طول، تعداد مودهای کمانشی افزایش می‌یابد و

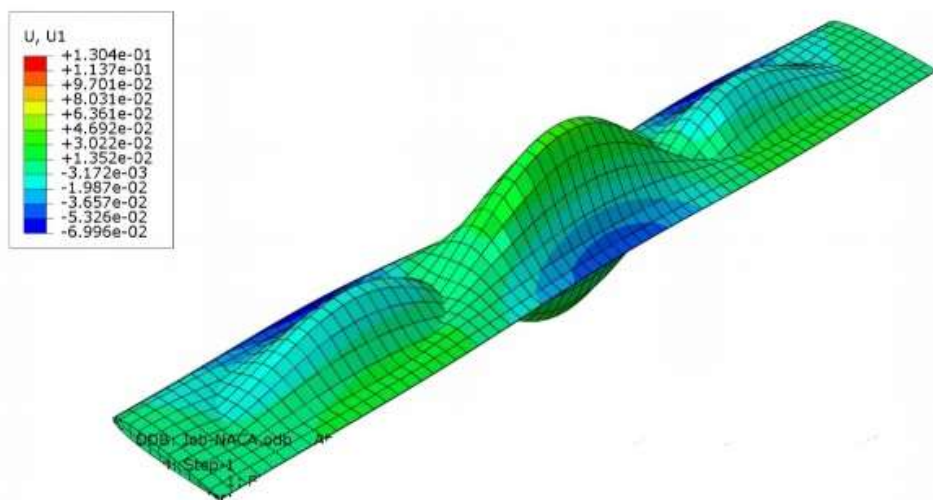
در اینجا سه مود قابل مشاهده است که با مشخصات هندسی و مکانیکی سازه مرتبط است. دوران حول محور طولی (U_{R1}) ، در شکل ۶، آمده است. محدوده جابجایی از $+1/317$ تا $-1/317$ رادیان متغیر بوده و این تقارن در مقادیر مثبت و منفی نشان‌دهنده تغییر شکل خمشی متعادل در طول سازه است. بردارهای قرمز رنگ مشاهده شده در میانه مدل نشان‌دهنده نقاط اعمال نیرو یا شرایط مرزی هستند. الگوی توزیع رنگ به صورت نواحی متناوب قرمز و آبی، نشان‌دهنده نواحی تحت کشش و فشار در دو طرف محور خنثی است. این الگو دقیقاً با تئوری خمش تیرها مطابقت دارد که در آن فیبرهای بالای محور خنثی تحت فشار و فیبرهای پایین تحت کشش قرار می‌گیرند. شکل ۷، جابجایی خطی در راستای محور طولی (U_1) با محدوده $0/1304$ تا $-0/06996$ متر را نشان می‌دهد. این جابجایی‌ها حدود یک دهم جابجایی‌های کلی هستند نشان‌دهنده حرکت جانبی مقطع ایرفویل است که می‌تواند ناشی از ناهمسانگردی خواص مکانیکی کامپوزیت باشد. در نواحی لبه‌ها، رنگ آبی غالب است که نشان‌دهنده جابجایی منفی در راستای محور اول است. شکل ۸، جابجایی دورانی برآیند با محدوده $0/004725$ تا $-0/00473$ رادیان را نشان می‌دهد. این مقدار کوچک‌ترین مؤلفه جابجایی است اما از نظر آیرودینامیکی اهمیت ویژه‌ای دارد، زیرا به طور مستقیم بر شکل مقطع ایرفویل تأثیر می‌گذارد. توزیع این جابجایی‌ها به صورت نواحی متقارن مثبت و منفی نشان‌دهنده تغییر شکل عرضی سازه است.



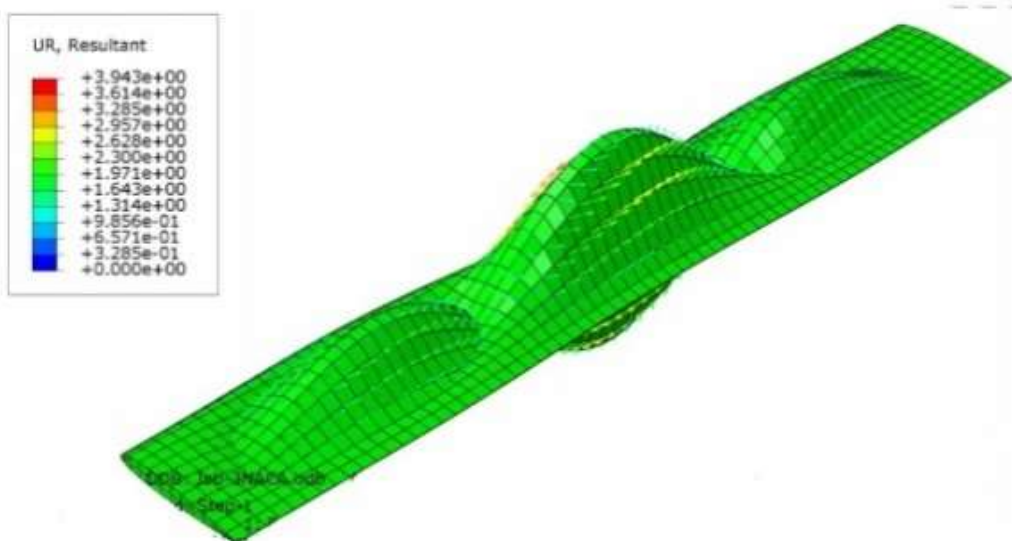
شکل ۵. جابجایی دورانی مقطع بال بر حسب رادیان



شکل ۶. دوران حول محور طولی بر حسب رادیان



شکل ۷. جابجایی خطی در جهت محور طولی U_1 بر حسب متر



شکل ۸. مقدار برابند جابجایی دورانی بر حسب رادیان

یکنواخت از انتهای ثابت به سمت نوک آزاد خم می‌شود. مقدار ویژه^{۱۲} برای این مود برابر با ۸۱۲۱.۰ است که نشان‌دهنده بار بحرانی کمانش در این حالت می‌باشد.
در این مود:

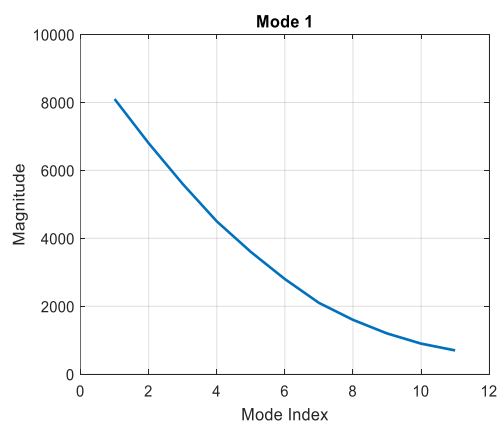
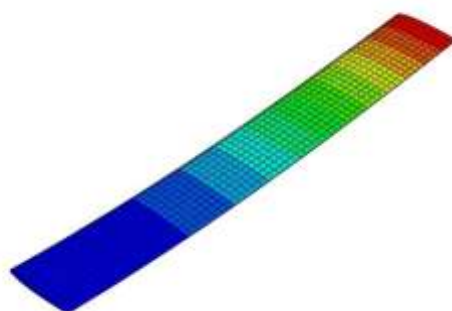
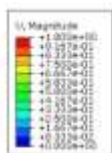
نتایجی که در شکل ۹، (الف-د) آمده‌است، نشان‌دهنده چهار مود اول کمانشی سازه تحت بارگذاری بحرانی است در سراسر مقطع بال است. مود اول کمانشی که در تصویر ۹-الف، نشان داده شده، یک مود خمشی ساده است که در آن ایرفویل به صورت

۱. توزیع جابجایی (U , Magnitude) از رنگ آبی (حداقل جابجایی در ریشه ایرفویل) تا رنگ قرمز (حداکثر جابجایی در نوک ایرفویل) متغیر است.
۲. حداکثر مقدار جابجایی در نوک ایرفویل به ۱.۰ (نرمال سازی شده) می‌رسد.
۳. الگوی تغییر شکل نشان می‌دهد که این مود اساساً یک خمش ساده در راستای طولی است.
۴. ضریب مقیاس تغییر شکل، $7.005e-0.1$ تنظیم شده که برای نمایش بهتر الگوی تغییر شکل استفاده شده است.

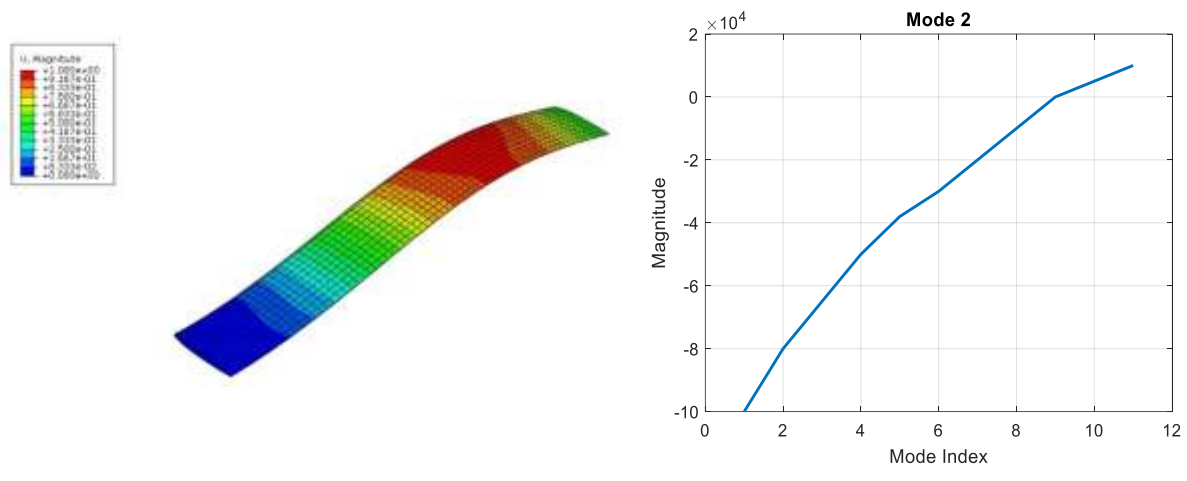
مود دوم کمناشی که در شکل ۹-ب نشان داده شده، نیز یک مود خمشی است اما با تفاوت‌هایی نسبت به مود اول. مقدار ویژه برای این مود 6670.4 است که بسیار بزرگ‌تر از مود اول است، نشان‌دهنده این است که انرژی بیشتری برای رسیدن به این حالت کمناشی لازم است.

در این مود:

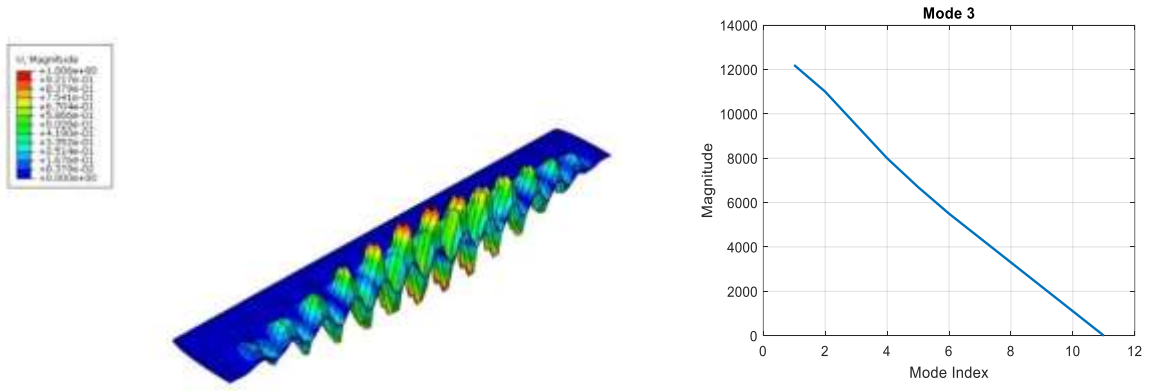
۱. الگوی توزیع جابجایی مشابه مود اول است اما میزان انحنای در ناحیه میانی ایرفویل متفاوت است.
۲. مود دوم نشان‌دهنده تغییر شکل پیچیده‌تری است که در آن ممکن است پیچش جزئی همراه با خمش اصلی وجود داشته باشد.



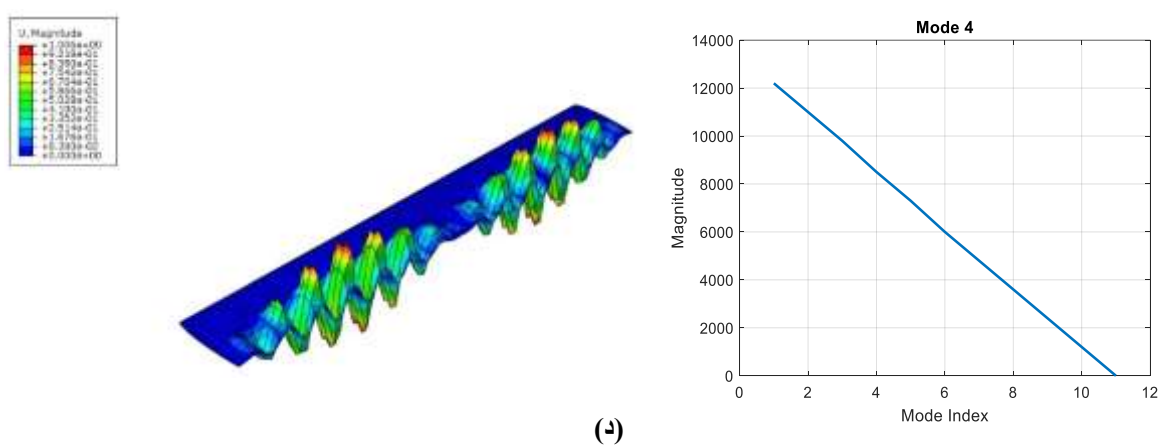
(الف)



(ا)



(ب)



(ج)

شکل ۹. شکل مودهای کمانشی اول تا چهارم ناشی از بارگذاری کمانشی سراسر بال در نرم افزار آباکوس

۳. نسبت مقدار ویژه مود دوم به مود اول، نشان می‌دهد که مود دوم بسیار سخت‌تر از مود اول فعال می‌شود.

مود سوم کمانشی که در تصویر ۹-ج نشان داده شده، یک تغییر اساسی در الگوی کمانش نشان می‌دهد. در این مود، مقدار ویژه منفی ($-1.00555E+05$) است که نشان‌دهنده یک مود ناپایدار است.

در این مود:

۱. الگوی موج‌دار^۲ در سطح ایرفویل مشاهده می‌شود که نشان‌دهنده کمانش موضعی پوسته است.

۲. چندین قله و دره در راستای طولی و عرضی ایرفویل دیده می‌شود.

۳. در این مود، مناطق با بیشترین جابجایی (نقاط قرمز) به صورت منظم در سطح ایرفویل توزیع شده‌اند.

۴. این الگو می‌تواند نشان‌دهنده کمانش صفحه‌ای^۳ در پوسته کامپوزیتی باشد.

۵. منفی بودن مقدار ویژه احتمالاً نشان‌دهنده حالتی است که در آن بار فشاری موجب ناپایداری در جهت مخالف می‌شود.

مود چهارم کمانشی در تصویر ۹-د نشان داده شده است. این مود نیز مانند مود سوم دارای مقدار ویژه منفی ($-1.0104E+05$) بوده و الگوی موج‌دار مشابهی را نشان می‌دهد.

در این مود:

۱. الگوی موج‌دار مشابه مود سوم است، اما با فرکانس و توزیع متفاوت قله‌ها و دره‌ها.

۲. تعداد و توزیع نقاط با جابجایی حداکثر (نقاط قرمز) نسبت به مود سوم تغییر کرده است.

۳. مقدار ویژه منفی و نزدیک به مود سوم نشان می‌دهد که این دو مود احتمالاً به یکدیگر نزدیک هستند و در شرایط مشابهی رخ می‌دهند.

۴. در این مود نیز کمانش صفحه‌ای در پوسته کامپوزیتی مشاهده می‌شود.

جدول ۳، نتایج حل عددی میزان بارگذاری کمانشی در مقاطع مختلف یک ایرفویل با پوسته کامپوزیتی لایه‌چینی شده را نشان می‌دهد که با تیغه تقویت کننده و بوم نگهدارنده تقویت شده است. این تحلیل نشان می‌دهد که مقاومت کمانشی در مقاطع مختلف به طور قابل توجهی متفاوت است. مقطع نوع [0] با بار کمانشی ۸۱۲۱ نیوتن، کم‌ترین مقاومت را در برابر کمانش نشان می‌دهد که احتمالاً به دلیل چیدمان الیاف در جهت صفر درجه است که مقاومت خمشی کم‌تری در جهات دیگر ایجاد می‌کند مقطع [0/90/45/-45]_s با بار کمانشی ۱۰۱۵۲۳ نیوتن، مقاومت متوسطی را نشان می‌دهد که می‌تواند ناشی از چیدمان متقارن و چند جهته الیاف باشد که توزیع بهتر تنش را فراهم می‌کند. مقطع [90] با بار کمانشی ۲۲۸۲۴۳ نیوتن، مقاومت بسیار بالاتری نسبت به مقطع [0] نشان می‌دهد که این امر می‌تواند به دلیل جهت‌گیری الیاف در راستای عمود بر محور اصلی باشد که برای بارهای کمانشی خاص مناسب‌تر است. نکته قابل توجه این است که ساختار تقویت شده با تیغه تقویت کننده و بوم نگهدارنده با بار کمانشی ۲۲۸۲۴۴۰ نیوتن، حدود ۱۰ برابر مقاومت بیشتری نسبت به مقطع [0/90/45/-45]_s دارد. این افزایش چشمگیر مقاومت کمانشی، نشان‌دهنده اهمیت

استفاده از تقویت‌کننده‌های ساختاری مانند تیغه تقویت‌کننده و بوم نگهدارنده در طراحی ایرفویل‌های کامپوزیتی است. تیغه تقویت‌کننده‌ها و بوم‌های نگهدارنده با افزایش سختی خمشی و پیچشی، توزیع بهتر تنش و جلوگیری از تغییر شکل‌های موضعی، به طور قابل توجهی مقاومت کمانشی را افزایش می‌دهند.

جدول ۳. نتایج حل عددی بارگذاری کمانشی در مقاطع

جنس مقطع	بار کمانشی (N)
$[0/90/45/-45]_s$	101523
$[0]_s$	8121
$[90]_s$	228243
Ribs and Stringers	2282440

۶. جمع‌بندی و اعتبارسنجی نتایج

این پژوهش به بررسی تحلیلی و عددی بارگذاری کمانشی یک پوسته از مقطع بال به صورت لایه‌های کامپوزیتی با لایه‌چینی متفاوتی پرداخته‌است. بررسی دقیق نتایج حل تحلیلی و مقایسه آن با حل عددی (آباکوس) برای بارگذاری کمانشی پوسته کامپوزیتی ایرفویل ناکا ۰۰۱۲، می‌توان به تحلیل جامعی دست یافت. جدول ۴ و نمودار شکل ۱۰، نشان می‌دهد که مقادیر تحلیلی در تمامی چیدمان‌ها بیش‌تر از مقادیر عددی است، که این امر ممکن است ناشی از ایده‌آل‌سازی‌های موجود در فرمول‌های تحلیلی باشد که برخی عوامل واقعی مانند نقص‌های هندسی و عدم همگنی مواد را در نظر نمی‌گیرند. میانگین درصد خطای بین دو روش ۶/۵۷ درصد است که برای محاسبات مهندسی قابل قبول بوده و نشان‌دهنده دقت مناسب هر دو روش است. بیش‌ترین خطا در ساختار با تیغه تقویت‌کننده و بوم نگهدارنده (۸/۶۳ درصد)

مشاهده می‌شود که احتمالاً به دلیل پیچیدگی هندسی این ساختار و تعاملات پیچیده بین اجزای آن است. کم‌ترین خطا مربوط به چیدمان $[0/90/45/-45]_s$ با ۴/۸۲ درصد است که نشان می‌دهد روش‌های تحلیلی برای لایه‌چینی‌های متعارف دقت بالاتری دارند. نکته قابل توجه در این تحلیل، تفاوت چشمگیر در مقاومت کمانشی چیدمان‌های مختلف است. مقطع $[0]_s$ با کم‌ترین بار کمانشی (۸۷۵۸ نیوتن در حل تحلیلی) نقطه ضعف محسوب می‌شود، در حالی که چیدمان $[90]_s$ با ۲۴۱۷۰۹ نیوتن، حدود ۲۷/۶ برابر مقاومت بیشتری نشان می‌دهد. این تفاوت به روشنی اهمیت جهت‌گیری الیاف نسبت به راستای بارگذاری را نشان می‌دهد. چیدمان متداول $[0/90/45/-45]_s$ با ۱۰۶۶۶۰ نیوتن، مقاومت متوسطی را ارائه می‌دهد که حدود ۱۲/۱۸ برابر حالت $[0]_s$ است، اما همچنان از چیدمان $[90]_s$ ضعیف‌تر است. این موضوع نشان می‌دهد که در طراحی ایرفویل‌ها، اگر بارگذاری کمانشی اصلی در راستای عرضی باشد، استفاده از لایه‌های ۹۰ درجه می‌تواند بسیار مؤثرتر از لایه‌های چند جهته باشد.

برجسته‌ترین یافته این تحلیل، افزایش خارق‌العاده مقاومت کمانشی با استفاده از تیغه تقویت‌کننده و بوم نگهدارنده است. بار کمانشی تحلیلی در این حالت $2498130/5$ نیوتن است که $285/24$ برابر حالت پایه $[0]_s$ و $10/34$ برابر حالت $[90]_s$ است. این افزایش چشمگیر نشان می‌دهد که استفاده از تقویت‌کننده‌های ساختاری در طراحی ایرفویل‌ها چقدر می‌تواند مؤثر باشد، به طوری که تنها در این حالت، سازه قادر به تحمل بار بحرانی کمانشی معادل $2498130/5$ نیوتن می‌شود. این نتایج به طراحان سازه‌های هوافضایی کمک می‌کند تا با انتخاب مناسب

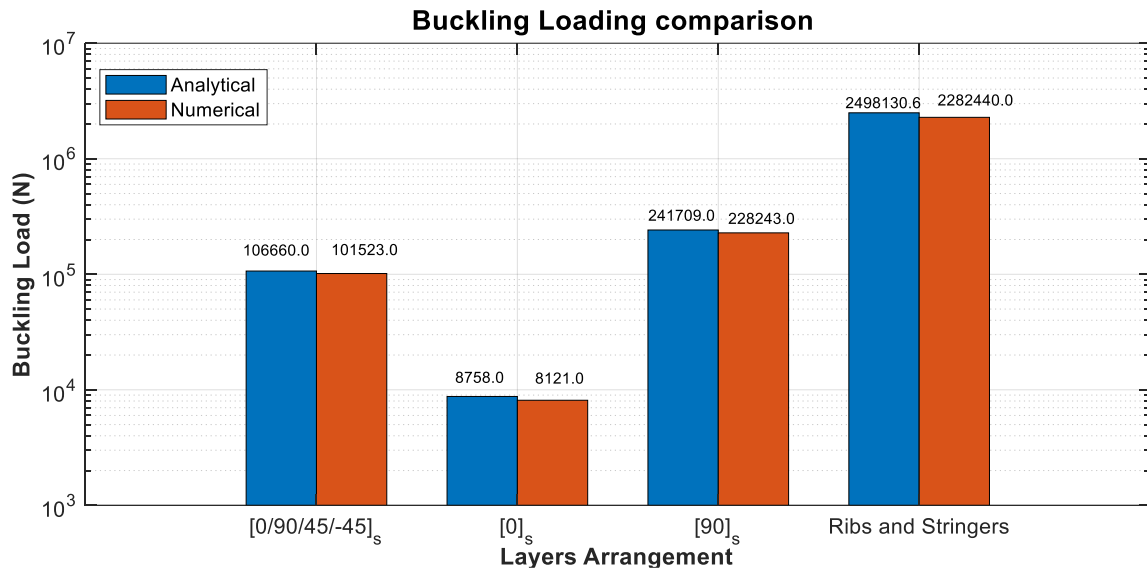
چیدمان لایه‌ها و استفاده بهینه از تقویت‌کننده‌های ساختاری، به طراحی‌های سبک‌تر با مقاومت کمانشی بالاتر دست یابند که در صنعت هوافضا بسیار ارزشمند است. همچنین، تطابق نسبتاً خوب بین نتایج تحلیلی و عددی با خطای متوسط ۶/۵۷ درصد، اعتبار هر دو روش را تأیید می‌کند و نشان می‌دهد که روش‌های تحلیلی می‌توانند در مراحل اولیه طراحی به عنوان ابزاری سریع و قابل اعتماد مورد استفاده قرار گیرند.

جدول ۴. اعتبار ستجی حل عددی و تحلیلی ناشی از بارگذاری کمانشی ایرفویل

جنس مقطع	بار کمانشی (عددی)	بار کمانشی (تحلیلی)	اختلاف (%)
[0/90/45/-45] _s	101523 N	106660 N	4.8162
[0] _s	8121 N	8758 N	7.2734
[90] _s	228243 N	241709 N	5.5712
Ribs and Stringers	2282440 N	2498130.5 N	8.6341

نتایج ارائه شده در شکل ۱۰، نشان‌دهنده دقت بسیار بالای روش‌شناسی توسعه یافته در این پژوهش است و معیار طلایی برای اعتبارسنجی تحلیل‌های کمانشی پوسته‌های کامپوزیتی پیچیده محسوب می‌شود.

همگرایی قابل توجه نتایج تحلیلی و عددی با میانگین خطای نسبی ۶/۵۷ درصد، بیانگر صحت فرمولاسیون ریاضی و دقت مدل‌سازی اجزای محدود است که در مطالعات کمانشی سازه‌های کامپوزیتی به‌ندرت مشاهده می‌شود. از منظر تخصصی، تطابق نزدیک مقادیر تحلیلی-عددی در تمامی پیکربندی‌های لایه‌چینی نشان می‌دهد که معادلات تعادل ون کارمن تعمیم‌یافته برای هندسه ایرفویل به‌درستی مشتق شده و اثرات غیرخطی هندسی، ارتوتروپی مواد و تقویت‌کننده‌های ساختاری در مدل ریاضی به‌طور کامل لحاظ شده است. پیکربندی ریب‌ها و بوم‌های نگهدارنده‌ها بار کمانشی بحرانی ۲/۴۹۸ مگانیوتن، حداکثر مقاومت را نشان می‌دهد که تأییدی بر اهمیت تقویت‌کننده‌های ساختاری در بهبود پایداری کمانشی است. نکته حائز اهمیت این است که الگوی [0/90/45/-45]_s با ۲/۴۱۷ مگانیوتن نسبت به [90]_s با ۲/۲۸۲ مگانیوتن برتری ۵/۹ درصدی دارد، که مبین تأثیر بهینه‌سازی زاویه الیاف در توزیع بار و تأخیر در آغاز کمانش است. دقت خطای ۴/۸-۸/۶ درصدی در محدوده استانداردهای مهندسی هوافضا قرار دارد و قابلیت اتکای بالای روش را برای طراحی‌های صنعتی تضمین می‌کند.



شکل ۱۰. مقایسه نتایج حاصل از حل عددی و تحلیلی بارگذاری کمانشی مقطع ایرفویل

نمادها و علائم

پارامتر	توضیحات
N_x	نیروی داخلی محوری در جهت محور x
N_y	نیروی داخلی محوری در جهت محور y
N_{xy}	نیروی داخلی برشی در صفحه xy
M_x	ممان خمشی حول محور x
M_y	ممان خمشی حول محور y
M_{xy}	ممان پیچشی در صفحه xy
Q_x	نیروی برشی عرضی در جهت x
Q_y	نیروی برشی عرضی در جهت y
A_{ij}	ماتریس سختی درون صفحه‌ای
B_{ij}	ماتریس کوپلینگ خمشی-غشایی
D_{ij}	ماتریس سختی خمشی
ε^0	کرنش غشایی
K	شماره لایه
n	تعداد کل لایه‌ها
k_x	انحنای خمشی در جهت x

k_y	انحنای خمشی در جهت y
k_{xy}	انحنای پیچشی
Z_K	موقعیت سطح بالایی لایه k
Z_{K-1}	موقعیت سطح پایینی لایه k

منابع

- [1] Schokker, A., S. Sridharan, and A. Kasagi. "Dynamic buckling of composite shells." *Computers & Structures* 59, no. 1 (1996): 43-53.
- [2] Pica, A., R. D. Wood, and E. Hinton. "Finite element analysis of geometrically nonlinear plate behaviour using a mindlin formulation." *Computers & Structures* 11, no. 3 (1980): 203-215.
- [3] Pica, A., and R. D. Wogd. "Postbuckling behaviour of plates and shells using a Mindlin shallow shell formulation." *Computers & Structures* 12, no. 5 (1980): 759-768.
- [4] Zhang, Xihu, Zhun Li, Zhaoqi Yang, Leilei Jiang, and Guang Pan. "Buckling of composite shells with a novel initial imperfection model subjected to hydrostatic pressure." *Composite Structures* 297 (2022): 115949.
- [5] Liu, Wei, Yuli Ma, Xianyue Su, and Kefu Huang. "Buckling analysis of wind turbine blade using pressure distributions obtained from CFD." In *2009 Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference*, pp. 1-4. IEEE, 2009.
- [6] Bipin, P. B., K. Senthikumar, and K. P. Deepak. "Buckling Analysis of Laminated carbon fiber composite beam using ANSYS." *International Journal of Engineering Research and Technology* 5, no. 7 (2016): 399-404.
- [7] Veludurthi, Ajay, and Venkateshwarlu Bolleddu. "Experimental buckling analysis of NACA 63415 aerofoil wind turbine blade." *Materials Today: Proceedings* 46 (2021): 205-211.
- [8] Batdorf, S. B. *A simplified method of elastic-stability analysis for thin cylindrical shells I: Donnell's equation*. No. NACA-TN-1341. 1947.
- [9] Redshaw, S. C. "The elastic stability of a curved plate under Axial Thrusts." *The Aeronautical Journal* 42, no. 330 (1938): 536-553.
- [10] Batdorf, S. B., Stein, M., and Schildcrout, M. *Critical Shear Stresses of Long Plates with Transverse Curvature*. No. NACA-TN-1346. 1947.
- [11] Batdorf, S. B., Stein, M., and Schildcrout, M. *Critical Shear Stress of Curved Rectangular Sections*. No. NACA-TN-1348. 1947.

- [12] Featherston, C. "Buckling of thin walled Structures." PhD Dissertation, 1997.
- [13] Zhang, Hengming, and Feng Li. "A review of prediction methods for global buckling critical loads of pultruded FRP struts." *Composite Structures* 329 (2024): 117752.
- [14] Gerard, George, and Herbert Becker. *Handbook of structural stability: part I, buckling of flat plates*, NACA Tech. No. 3781. Note, 1957.
- [15] Young, F., Cheng, M. K., Weng, S. M., and Lee, K. L. "Nonlinear Vibration Analysis of a FGM Plate with Viscoelastic Core." In *Proceedings of the 10th International Conference on Vibration Problems*, Prague, Czech Republic, September 5–8, 2011.
- [16] Ounis, Houdayfa, and Asma Balehouane. "Buckling behavior of wind turbine blade." *Journal of Renewable Energies* 19, no. 4 (2016): 509-516.
- [17] Amzil, Lahcen, Tarik Raffak, and Taoufiq Mouhib. "Numerical Buckling Analysis of Hemp Fiber-Reinforced Hybrid Composites in Wind Turbine Blades." In *2025 5th International Conference on Innovative Research in Applied Science, Engineering and Technology (IRASET)*, pp. 1-4. IEEE, 2025.
- [18] Zareie, Shahin, Abolghassem Zabihollah, and Aydin Azizi. "Buckling control of morphing composite airfoil structure using multi-stable laminate by piezoelectric sensors/actuators." In *Behavior and Mechanics of Multifunctional Materials and Composites 2011*, vol. 7978, pp. 495-500. SPIE, 2011.

پی نوشت

-
- ¹ Ribs and Stringers
² Margor's shallow layer formulation
³ Mindlin-Reisner plane theory
⁴ Sanders equations
⁵ Computational Fluid Dynamics
⁶ Stall
⁷ Entropic multilayer beams
⁸ ANSYS
⁹ Spar cap
¹⁰ Boundary Element Method
¹¹ Rotation Displacement
¹² Eigen value problem
-