

تعویق فلاتر جسم آزاد در هواپیمای انعطاف‌پذیر با استفاده از کنترل‌کننده مربعی خطی

سلمان شفق*^{*}

پژوهشگر، مجتمع دانشگاهی هوافضا،

دانشگاه صنعتی مالک اشتر

s.shafeghat@mut.ac.ir

محمدعلی نوریان

استادیار، مهندسی هوافضا

دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

noorian@kntu.ac.ir

سعید ایرانی

دانشیار، مهندسی هوافضا

دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

irani@kntu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۳/۰۳

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۴/۲۰

چکیده

پدیده فلاتر جسم آزاد^۱ یکی از انواع ناپایداری‌های آیروالاستیک^۲ است که در اثر جفت شدن مود خمش آیروالاستیک بال با مود تناوب کوتاه در دینامیک پرواز هواپیما رخ می‌دهد. با استفاده از مدل آیروسروالاستیک^۳ و به کارگیری کنترل حلقه بسته می‌توان از وقوع این پدیده در شرایط کاری هواپیما جلوگیری کرد و سرعت این رخداد را افزایش داد. ساده‌ترین مدل هواپیمایی که قادر به نمایش ویژگی‌های ناپایداری فلاتر جسم آزاد باشد شامل بال انعطاف‌پذیر و مدل دینامیک پرواز صفحه‌ای است. در این راستا سازه بال با استفاده از مدل تیر اویلر- برنولی شبیه‌سازی شده است. در بخش آیرودینامیک روی بال از تئوری حداقل متغیر حالت برای مدل‌سازی آیرودینامیک ناپایا استفاده شده است تا شرایط برای مدل‌سازی سیستم در فضای حالت مناسب شود. در بخش کنترل، سطح کنترلی مورد استفاده الویتور^۴ می‌باشد و از تئوری کنترل‌کننده مربعی خطی^۵ با فیلتر کالمن^۶ برای تعویق فلاتر استفاده شده و اثر اضافه کردن کنترل حلقه بسته به سیستم در افزایش سرعت فلاتر جسم آزاد و محدودیت‌های این کار مورد مطالعه قرار گرفته است.

واژگان کلیدی: آیروسروالاستیسیت، مدل هواپیمای کامل، فلاتر جسم آزاد، تیر اویلر- برنولی، روش حداقل متغیر حالت، کنترل‌کننده مربعی خطی

۱. مقدمه

گرفتن هواپیما در ارتفاعات پایین احتمال رخداد این پدیده به علت چگالی بالای هوا وجود دارد، در حالی که در ارتفاع پروازی بالا، به علت پایین بودن چگالی هوا احتمال وقوع این پدیده کاهش می‌یابد. برای رفع این مشکل در حین طراحی هواپیما دو نوع راهکار

در دینامیک هواپیمای کامل امکان رخداد پدیده‌ای به نام فلاتر جسم آزاد وجود دارد. این پدیده از جفت شدن مود خمش آیروالاستیک بال با مود تناوب کوتاه^۷ دینامیک پرواز هواپیما بوجود می‌آید. در مسیر اوج

وجود دارد. در روش اول با استفاده از روش‌های غیرفعال مانند افزایش استحکام سازه می‌توان هواپیما را در تمام مسیر پروازی در ناحیه ایمن قرار داد، که البته این راه حل موجب بالا رفتن وزن هواپیما می‌شود که مطلوب طراحان نیست. راه حل دوم روش‌های فعال مانند استفاده از کنترل حلقه بسته برای جلوگیری از وقوع پدیده فلاتر جسم آزاد می‌باشد که در مسیر اوج گرفتن، سیستم را ایمن نگه می‌دارد تا هواپیما به ارتفاع پروازی مطلوب خود برسد.

با وجود اینکه پدیده فلاتر جسم آزاد از سال‌ها پیش شناسایی شده است، ولی در سال‌های اخیر با توجه به سبک شدن هواپیماها به علت استفاده از مواد جدید مانند کامپوزیت‌ها، و هم‌چنین به وجود آمدن هواپیماهایی با پیکره‌بندی جدید و به دنبال آنها امکان وقوع این پدیده در سرعت‌های پروازی عملیاتی، مطالعه بر روی این پدیده مورد توجه محققین قرار گرفته است.

در راستای مطالعه این پدیده، برخی از محققین به اساس شکل‌گیری این پدیده پرداخته‌اند [۱-۲] و برخی دیگر اثر پارامترهای مختلف مانند سفتی خمشی بال، وزن بالانس جرمی نوک بال، [۳] موقعیت موتور بر روی بال [۴-۵] و حاشیه استاتیکی [۶] در این پدیده را مورد مطالعه قرار دادند. شفقت و همکاران [۷] ناپایداری غیرخطی بوجود آمده در اثر این پدیده مانند نوسانات سیکل حد و اثر پارامترهای مختلف در دامنه این نوسانات را مورد رسیدگی قرار دادند. در نهایت تعدادی از محققین [۸-۹] به چگونگی برطرف کردن این مسئله به شکل غیرفعال پرداخته‌اند. ایانلی به بررسی تاثیر عدم قطعیت‌هایی مانند صلبیت خمشی و جرم بال و طول بدنه هواپیما در نمودارهای فلاتر و به

تبع آن در سرعت و فرکانس فلاتر جسم آزاد پرداخته است [۱۰].

بحث جلوگیری از وقوع و تاخیر فلاتر بال به کمک روش‌های کنترل آیروالاستیک فعال از دیرباز مورد توجه محققین بوده است. در نتیجه منابع زیادی در این حوزه در دسترس می‌باشد و روش‌های کنترلی متنوعی برای این کار استفاده شده است. ایکسیانگ و همکاران [۱۱] از یک کنترل LQR مقاوم استفاده کردند و بیان داشتند که این کنترل برای سیستم آیروسروالاستیک چند ورودی - چندخروجی^۱ مناسب می‌باشد. میروویچ و توزکو [۱۲-۱۳] در کنترل هواپیماهای کاملاً انعطاف‌پذیر از این کنترل‌کننده با افزودن یک فیلتر کالمن استفاده کردند. ماخوبادی [۱۴] از روش LQG^۲ برای تعویق فلاتر مود متقارن و نامتقارن در هواپیما استفاده کرد. او توانست سرعت فلاتر را تا ۲۳ درصد افزایش دهد. تیز [۱۵] یک کنترل‌کننده H_{∞} بهینه برای افزایش میرایی سازه‌ای و به تبع آن تعویق فلاتر توسعه داد.

با وجود انجام پژوهش‌های متنوع برای تعویق فلاتر بال، مطالعات کمی در زمینه تعویق فلاتر جسم آزاد به روش کنترل فعال، انجام شده است. اشمیت و همکاران [۱۶] عمل تعویق فلاتر جسم آزاد را با دو کنترل کلاسیک و چند متغیره مورد مطالعه قرار داده و با هر دو نوع کنترل‌کننده توانستند به هدف خود دست پیدا کنند. آنها اشاره دارند که استفاده از کنترل در حوزه فرکانس هم نسبتاً ساده بوده و هم برای مطالعه تحلیلی از وضوح خوبی برخوردار می‌باشد. آنها در کار خود از آیرودینامیک شبه پایا برای مدل‌سازی نیروهای روی بال و سطوح کنترل برآفزا^۱ برای تعویق فلاتر استفاده

کردند. زو و همکاران [۱۷] یک سیستم آیروسروالاستیک متغیر با زمان را با استفاده از یک کنترل کننده مقاوم مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از روش اجزای محدود برای به دست آوردن شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی سازه و برای انتقال نیروهای آیرودینامیکی از فضای فرکانس به زمان از تقریب توابع گویا استفاده کردند.

در پژوهش حاضر از مدل هواپیمای کامل با بال انعطاف پذیر با فرض دینامیک پرواز صفحه‌ای، برای پیاده‌سازی سیستم کنترلی که قادر به تعویق انداختن فلاتر جسم آزاد باشد، استفاده شده است. برای مدل-سازی سازه بال از مدل تیر اویلر-برنولی با درجات آزادی خمش و پیچش استفاده شده است. آیرودینامیک روی بال ناپایا و توسط روش حداقل متغیر حالت تقریب زده شده است که منجر به مدل با حداقل مرتبه می‌شود. مدل دینامیک پرواز صفحه‌ای قادر به نمایش مود تناوب کوتاه هواپیما می‌باشد که یکی از مودهای شرکت کننده در فلاتر جسم آزاد است. در بخش کنترل، از کنترل کننده LQR استفاده می‌شود که با استفاده از فیلتر کالمن، اثرات نویز سیستم و اندازه‌گیری را نیز در کنترل لحاظ می‌کند. لازم به ذکر است در کارهای مشابه برای رسیدگی به کنترل پدیده فلاتر جسم آزاد برای حل بخش سازه هواپیما از مدل-های اجزای محدود استفاده شده است، در صورتیکه در کار حاضر روش تحلیلی-تقریبی مودهای فرضی بکار رفته که می‌تواند با کاهش ابعاد ماتریس معادلات حرکت موجب کارآمدی سیستم کنترل گردد، همچنین در کار حاضر نمودارهای فرکانس و میرایی برای بررسی تأثیر اضافه نمودن کنترل به سیستم در

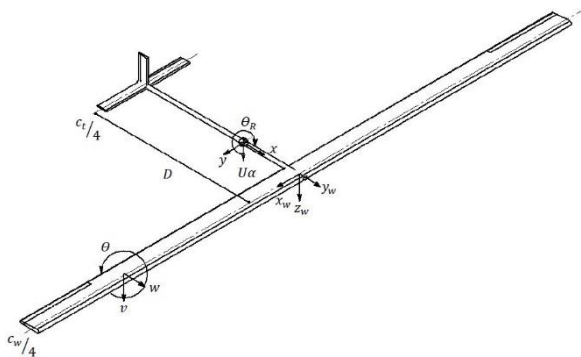
رفتار آیروالاستیک هواپیما استفاده شده است و در ادامه نشان داده می‌شود که قید نرخ دوران سطوح کنترل، به جای زاویه دوران در کارهای مشابه، باید برای اعمال محدودیت در به تاخیر انداختن فلاتر جسم آزاد مد نظر قرار گیرد.

۲. معادلات حاکم

پدیده فلاتر جسم آزاد از برهم‌کنش متقابل دینامیک پرواز هواپیما و آیروالاستیسیته بال به وجود می‌آید. از این رو، در این بخش معادلات به سه دسته معادلات دینامیک پرواز هواپیما، آیروالاستیسیته بال و برهم‌کنش بین این دو، تقسیم می‌شود، که به صورت جداگانه به هر کدام پرداخته خواهد شد.

۱.۲. معادلات دینامیک پرواز

برای به دست آوردن معادلات دینامیک پرواز مطابق شکل ۱. دستگاه مختصات هواپیما، بال و تغییرشکل‌ها فرض حرکت صفحه‌ای برای هواپیما در نظر گرفته شده است. در نتیجه این فرض، درجات آزادی مودهای جسم صلب هواپیما شامل حرکت انتقالی^{۱۱} و حرکت پیچشی^{۱۲} می‌شود که در نتیجه ترکیب این دو درجه آزادی، مود تناوب کوتاه برای هواپیما حاصل می‌شود.



شکل ۱. دستگاه مختصات هواپیما، بال و تغییرشکل‌ها

معادلات تعادل برای سیستم دو درجه آزادی به ترتیب زیر است [۱۸]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta}_R \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} (mU - Z_{\dot{\alpha}}) & -(Z_q + U) \\ -M_{\dot{\alpha}} & -M_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta}_R \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -Z_{\alpha} & 0 \\ -M_{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \theta_R \end{Bmatrix} = 0 \quad (1)$$

$i v$ و $''$ بترتیب مشتقات چهارم و دوم نسبت به متغیر مکان می‌باشند. EI_{ζ} ، J_{ξ} و GJ_{ξ} ممان اینرسی بر واحد طول، صلبیت خمشی خارج صفحه و صلبیت پیچشی می‌باشند. همان طور که در شکل ۱ دیده می‌شود، x_w ، y_w و z_w راستاهای دستگاه مختصات بال هستند، که به ترتیب در راستای دهانه، وتر و ضخامت بال می‌باشند. ξ ، η و ζ راستاهای دستگاه مختصات بال تغییرشکل یافته می‌باشند، که به ترتیب متناظر با راستاهای x_w ، y_w و z_w در بال تغییرشکل نیافته می‌باشند. همچنین، L_a و M_{ea} نیرو و ممان آیرودینامیکی بال را نشان می‌دهند.

۲.۲.۲. معادلات آیرودینامیک بال

در بال‌های با نسبت منظری بالا تئوری نواری برای مدل‌سازی نیروهای آیرودینامیکی منجر به نتایج قابل قبول در حل مسئله آیروالاستیسیته می‌شود. یکی از این مدل‌ها توسط تئودورسن^{۱۳} پیشنهاد شده که بر مبنای آن، برآ و ممان اعمال شده به بال به شکل زیر قابل بیان است [۱۹]:

جایی که α و θ_R زاویه حمله و زاویه پیچش هواپیما می‌باشند. U ، m و I_{yy} سرعت، جرم و ممان اینرسی هواپیما حول محور y بوده و Z_{α} ، M_{α} ، Z_q و M_q مشتقات پایداری آیرودینامیکی هستند که در مرجع [۱۶] معرفی شده‌اند.

۲.۲. معادلات آیروالاستیسیته بال

در این بخش معادلات آیروالاستیک بال با فرض تیر اوپلر- برنولی برای سازه و آیرودینامیک ناپایای حداقل متغیر حالت به دست می‌آید.

۱.۲.۲. معادلات دینامیک سازه

بال سازه‌ای است که تحت بارهای آیرودینامیکی قرار دارد. از آن جایی که بال در کار حاضر از نسبت منظری بالایی برخوردار است می‌توان آن را با دقت قابل قبولی با فرض تیر اوپلر- برنولی مدل کرد، که دارای درجات آزادی خمش خارج صفحه و پیچش می‌باشد. با این تفاسیر معادلات دینامیک سازه به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} m_w \ddot{w} - m_w e_y \ddot{\theta} + EI_{\zeta} v^{iv} &= L_a \\ J_{\xi} \ddot{\theta} - m_w e_y \ddot{w} - GJ_{\xi} \theta'' &= M_{ea} \end{aligned} \quad (2)$$

جایی که m_w و e_y جرم بر واحد طول بال و فاصله محور الاستیک از مرکز جرم بال می‌باشند، بالانویس

$$L_a = 2\pi\rho_\infty U b C(k) \times \left[U\theta - \frac{\partial w}{\partial t} + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] + \pi\rho_\infty U b^2 \left[U \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} b a \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] \quad (3)$$

$$M_{ea} = b \left(\frac{1}{2} + a \right) L - \pi\rho_\infty U b^3 \times \left[U \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + b \left(\frac{1}{8} - \frac{a}{2} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right]$$

۳-۲. معادلات برهم‌کنش دینامیک پرواز و آیروالاستیسیته

زاویه حمله کل در هواپیما از جمع زاویه حمله ناشی از دینامیک پرواز و آیروالاستیسیته بال به وجود می‌آید و این منجر به عبارات برهم‌کنش بین معادلات دینامیک پرواز و آیروالاستیسیته بال می‌گردد. زاویه حمله بال با فرض آیرودینامیک شبه پایا به شکل زیر قابل بیان است:

$$\alpha_t = \alpha_R + \alpha_E \quad (4)$$

که در آن α_R و α_E به ترتیب زاویه حمله صلب و زاویه حمله الاستیک می‌باشند که به ترتیب از روابط ۵ و ۶ به دست می‌آیند:

$$\alpha_R = \alpha + \frac{d\theta_R}{U} \quad (5)$$

$$\alpha_E = \theta + \frac{\dot{v}}{U} \quad (6)$$

که در آن d فاصله بین مرکز آیرودینامیکی بال با مرکز ثقل هواپیما است. زاویه حمله کل، α_t ، در معادلات آیروالاستیک بال باید جایگزین زاویه حمله الاستیک و در معادلات دینامیک پرواز جایگزین زاویه حمله صلب شود و به این ترتیب عبارات‌های جفت شده شکل می‌گیرند که به فرم ماتریسی زیر بیان می‌شوند:

همان طور که در معادله ۳ مشخص است این معادلات وابسته به ترم فرکانس کاسته ($k = b\omega/U$)، می‌باشند که این مسئله استفاده از این معادلات را برای فرمول-بندی کنترل در فضای حالت دچار مشکل می‌کند. برای برطرف کردن این مشکل، عبارات آیرودینامیکی توسط توابع گویا تقریب زده شده‌اند. برخی از روش‌ها برای این کار، عبارت از تقریب پد^{۱۴}، راجر^{۱۵} و روش حداقل متغیر حالت^{۱۶} می‌باشند. کارپل [۲۰] روش حداقل متغیر حالت را در یک روند بهینه‌سازی که مرتبه سیستم فضای حالت را حداقل می‌کند، توسعه داد و بستر را برای یک تحلیل آیروسروالاستیک موثر مهیا کرد. به این صورت که از طرفی با جایگزینی عبارات فرکانس کاسته با عبارات گویا حاوی چند متغیر حالت جدید، مدل را برای نمایش به شکل ماتریسی سازگار کرد تا مدل برای استفاده در فضای حالت، که برای تحلیل کنترل سیستم‌های چند ورودی - چند خروجی لازم است، مهیا شود. از طرفی دیگر با استفاده از یک روش بهینه‌سازی، حداقل متغیرهای حالت را برای تخمین عبارات آیرودینامیکی استفاده کرد تا با کم کردن ابعاد مدل، سیستم کنترل را کارآمدتر کند. در کار حاضر نیز از روش حداقل متغیر حالت استفاده شده است که جزئیات این روش در مرجع [۲۰] قابل دسترسی است.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{RR} & \mathbf{M}_{RE} \\ \mathbf{M}_{ER} & \mathbf{M}_{EE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_R \\ \ddot{\mathbf{x}}_E \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{RR} & \mathbf{C}_{RE} \\ \mathbf{C}_{ER} & \mathbf{C}_{EE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_R \\ \dot{\mathbf{x}}_E \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RE} \\ \mathbf{K}_{ER} & \mathbf{K}_{EE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{x}_E \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (7)$$

چنین سیستم‌هایی باید معادله حرکت را در فضای حالت نوشت. در نتیجه معادله ۷ بصورت زیر قابل بیان است:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{B}'u \quad (9)$$

جایی که

$$\mathbf{x} = \{\alpha \quad \theta_R \quad \dot{\theta}_R \quad \eta_{E_1} \quad \eta_{E_2} \quad \eta_M\} \quad (10)$$

که در آن $\eta_{E_2} = \{\dot{\eta}_{wi} \quad \dot{\eta}_{\theta i}\}$ ، $\eta_{E_1} = \{\eta_{wi} \quad \eta_{\theta i}\}$ متغیرهای حالت ترم‌های الاستیک بال و η_M بردار متغیرهای حالت روش حداقل متغیر حالت می‌باشند. u بردار متغیرهای ورودی است که در اینجا اسکالر و برابر زاویه الویتور است:

$$u = \delta \quad (11)$$

و \mathbf{B}' ماتریس ضرایب متغیرهای ورودی و به شکل زیر می‌باشد.

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} Z_e \\ 0 \\ M_e \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (12)$$

که در آن

$$\begin{aligned} Z_e &= \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right) C_{L\delta_e} S_e q_\infty \\ M_e &= \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right) (X_{\text{Ref}} - X_{AC_H}) C_{L\delta_e} S_e q_\infty \end{aligned} \quad (13)$$

عبارات $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$ ، X_{Ref} و X_{AC_H} به ترتیب گرادیان فروریزش^{۱۷}، موقعیت مرکز جرم هواپیما و مرکز

جایی که R و E اشاره به بخش صلب و الاستیک دارند و همچنین متغیرهای حالت سیستم $\mathbf{x}_R = \{\alpha \quad \theta_R\}^T$ و $\mathbf{x}_E = \{w \quad \theta\}^T$ می‌باشند.

۴.۲. کنترل

هدف از کنترل در کار حاضر به تعویق انداختن فلاتر جسم آزاد در هواپیما می‌باشد. بدین منظور، از روش‌های کنترل متنوعی از قبیل LQR، LQG، H_∞ و انواع دیگر می‌توان استفاده کرد. در کار حاضر از کنترل LQR استفاده می‌شود که در عین سادگی قابلیت لحاظ کردن اثرات نویز را داشته و می‌تواند همزمان با افزایش سرعت فلاتر اثر اغتشاشات و نویز را نیز خنثی کند. در پیاده‌سازی سیستم کنترلی برای تعویق فلاتر جسم آزاد از سطوح کنترلی دم افقی یعنی الویتور استفاده می‌شود. دلیل انتخاب الویتور این است که دم افقی، به علت فاصله زیاد دم با مرکز ثقل هواپیما در مقایسه با بال، نقش بزرگی در مود تناوب کوتاه هواپیما دارد. به دلیل این که آیرودینامیک بر روی دم به صورت پایا فرض شده، نیروی برای ناشی از الویتور به شکل زیر قابل بیان است:

$$L_e = q S_e C_{L\delta_e} \delta_e \quad (8)$$

که در آن q ، S_e ، $C_{L\delta_e}$ و δ_e به ترتیب فشار دینامیکی، مساحت الویتور، ضریب برآ و زاویه حمله الویتور می‌باشند.

سیستم کنترل هواپیما یک سیستم تک ورودی - چند خروجی بوده و برای پیاده‌سازی روش‌های کنترلی در

آبرودینامیک دم افقی در دستگاه مختصات هواپیما می‌باشند [۱۵].

در نهایت معادله حرکت به فرم کنترلی زیر قابل ارائه است:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (۱۴)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}' \end{aligned} \quad (۱۵)$$

در کنترل هدف پیدا کردن یک بردار کنترلی \mathbf{u} است که بردار حالت \mathbf{x} را به صفر برساند، که این بردار حالت می‌تواند در اثر اغتشاشات بوجود آید. به این منظور از یک کنترل کننده مربعی خطی استفاده می‌شود که در آن ماتریس \mathbf{K} بردار کنترل بهینه زیر را بدست می‌دهد:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{Kx}(t) \quad (۱۶)$$

به نحوی که شاخص عملکرد زیر مینیمم شود:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^* \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^* \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (۱۷)$$

که در آن \mathbf{Q} ماتریس‌های نیمه معین مثبت متقارن حقیقی و \mathbf{R} یک ماتریس معین مثبت متقارن حقیقی می‌باشد. با اعمال شرط بهینه سازی ماتریس \mathbf{K} بصورت زیر بدست می‌آید [۱۲]:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P} \quad (۱۸)$$

که ماتریس \mathbf{P} از حل معادله ریکاتی^{۱۸} زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (۱۹)$$

برای به کار بردن معادله ۱۴ باید از بردار حالت اطلاع داشت که با اندازه‌گیری بدست می‌آید. رابطه بین بردار خروجی و بردار حالت به ترتیب زیر می‌باشد.

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad (۲۰)$$

اما مشکلی که در اینجا پیش می‌آید این است که تمام متغیرهای حالت با اندازه‌گیری قابل حصول نمی‌باشند و تنها بخشی از آنها در دسترس می‌باشند، در نتیجه باید بردار حالت تخمین زده شود، که معادله آن به شکل زیر است:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} + \mathbf{K}_0[\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}] \quad (۲۱)$$

که در آن $\hat{\mathbf{x}}$ بردار حالت تخمین زده شده و \mathbf{K}_0 ماتریس بهره مشاهده‌گر می‌باشد. با جایگذاری معادله ۲۱ در معادله ۱۴ داریم:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{K}_0 \mathbf{C}]\mathbf{e}(t) \quad (۲۲)$$

جایی که

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (۲۳)$$

بردار خطا می‌باشد.

هدف کنترل در معادله ۲۲ این است که در یک زمان مشخص خطا را به صفر برساند. هنگامی که از کنترل فیدبک استفاده می‌شود باید از بردار تخمین حالت استفاده شود زیرا بردار حالت در دسترس نیست. در نتیجه معادله ۱۶ با معادله زیر جایگزین می‌گردد:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (۲۴)$$

با استفاده از معادله ۲۳ و ۲۴، معادله ۱۴ به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{BK}]\mathbf{x}(t) + \mathbf{BK}\mathbf{e}(t) \quad (۲۵)$$

با تجمیع معادله‌های ۲۲ و ۲۵ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ 0 & \mathbf{A} - \mathbf{K}_0\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \quad (26)$$

به علت بالامثلثی بودن ماتریس معادله ۲۶، قطب‌های مشاهده‌گر می‌تواند مستقل از قطب‌های کنترل‌کننده انتخاب شود.

سیستم کنترلی تحت تاثیر دو دسته نویز قرار دارد، دسته اول شامل نویزهای خود سیستم می‌باشد که می‌تواند ناشی از خطاهای بوجود آمده در اثر ساده-سازی مدل باشد و دسته دوم نویزهای خروجی سیستم است که در اثر نویز موجود در سنسورها بوجود می‌آید. نویزها باید در فرآیند کنترل لحاظ شوند تا از کارکرد مطلوب سیستم کنترلی اطمینان حاصل گردد. بدین منظور در اینجا برای به دست آوردن ماتریس بهره مشاهده‌گر از یک روش اتفاقی که منتهی به فیلتر کالمن-بوسی^{۱۹} می‌شود، استفاده می‌شود. بدین منظور معادلات (۱۴) و ۲۰ به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (27)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (28)$$

جایی که $\mathbf{v}(t)$ نویز سیستم و $\mathbf{w}(t)$ نویز اندازه‌گیری مربوط به سنسورها می‌باشد. و این نویزها به طور معمول نویز سفید می‌باشند. در نهایت ماتریس بهره مشاهده‌گر بدست می‌آید:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}'\mathbf{C}'\mathbf{W}^{-1} \quad (29)$$

که ماتریس \mathbf{Q}' از حل معادله ریکاتی زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{AQ}' + \mathbf{Q}'\mathbf{A}' + \mathbf{V} - \mathbf{Q}'\mathbf{C}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{CQ}' = \mathbf{0} \quad (30)$$

حال باید ماتریس \mathbf{C} تعیین گردد، به این منظور فرض می‌شود از سه سنسور استفاده شده است. سنسور اول در مرکز ثقل هواپیما، سنسور دوم در محل اتصال بال به بدنه و سنسور سوم در لبه حمله و نوک دهانه بال قرار دارد. رابطه بین سرعتی که سنسور ثبت می‌کند و متغیرهای حالت به ترتیب زیر است:

سرعت در مرکز ثقل هواپیما:

$$v_f = U\alpha \quad (31)$$

سرعت در محل اتصال بال به بدنه:

$$v_{fw} = U\alpha + d_w\dot{\theta}_R \quad (32)$$

که d_w فاصله محل اتصال بال به بدنه تا مرکز ثقل هواپیما می‌باشد.

سرعت لبه حمله در نوک بال:

سرعتی که سنسور در نوک بال ثبت می‌کند برآیند سرعت حرکت پلانچ هواپیما ($U\alpha$)، حرکت پیچش هواپیما

$(d_w + y_w)\dot{\theta}_R$ ، سرعت ناشی از جابجایی خمشی بال (\dot{w}) و سرعت ناشی از پیچش بال حول محور الاستیک ($y_w\dot{\theta}$) می‌باشد، در نتیجه خواهیم داشت:

$$v_w = U\alpha(t) + (d_w + y_w)\dot{\theta}_R(t) + \Phi_w(x_s)\dot{\eta}_w + y_w\Phi_\theta(x_s)\dot{\eta}_\theta \quad (33)$$

که در آن Φ_w ، Φ_θ و x_s به ترتیب شکل مودهای تیر و شفت یکسر درگیر و موقعیت قرارگیری سنسور بر روی دهانه بال می‌باشند.

در نهایت این سه رابطه سرعت به شکل ماتریسی زیر قابل بیان است:

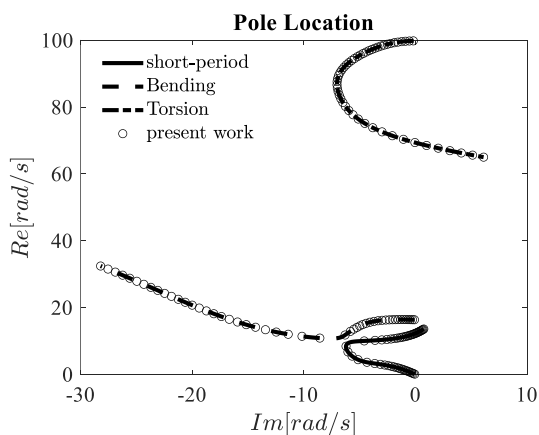
$$\begin{Bmatrix} v_f \\ v_{fw} \\ v_w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \{\mathbf{0}\}_{1 \times n} \\ U & 0 & d_w & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \{\mathbf{0}\}_{1 \times n} \\ U & 0 & d_w + y_w & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \{\Phi_w(x_s)\}_{1 \times i} & \{y_w \Phi_\theta(x_s)\}_{1 \times i} & \{\mathbf{0}\}_{1 \times n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \theta_R \\ \dot{\theta}_R \\ \eta_{wi} \\ \eta_{\theta i} \\ \dot{\eta}_{wi} \\ \dot{\eta}_{\theta i} \\ \eta_M \end{Bmatrix}$$

(۳۴)

آیرودینامیک ناپایا در روش حداقل متغیر حالت می- باشد. قابل ذکر است که معادله ۳۴ همان معادله ۲۰ است، در نتیجه ماتریس **C** به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} U & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \{\mathbf{0}\}_{1 \times n} \\ U & 0 & d_w & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \{\mathbf{0}\}_{1 \times n} \\ U & 0 & d_w + y_w & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \{\Phi_w(x_s)\}_{1 \times i} & \{y_w \Phi_\theta(x_s)\}_{1 \times i} & \{\mathbf{0}\}_{1 \times n} \end{bmatrix} \quad (۳۵)$$

هواپیما و مودهای خمش و پیچش بال در مقایسه با مرجع [۱۰] رسم شده است. مشخصات هواپیمای مورد مقایسه در جدول ۱ آمده است، که مورد مطالعاتی در کار حاضر نیز می‌باشد. با توجه به یکسان بودن تئوری آیرودینامیکی، می‌توان دید که نتایج در شکل ۲ تطابق بسیار خوبی با یکدیگر دارند.



جایی که اندیس i مربوط به تعداد مود انتخابی برای خمش یا پیچش و اندیس n تعداد جمله برای تقریب

۳. نتایج

در بخش نتایج ابتدا به اعتبارسنجی معادلات جفت شده دینامیک پرواز و آیروالاستیسیته پرداخته می‌شود، در ادامه با رسم پاسخ‌های زمانی به اثر کنترل‌کننده در رفتار دینامیکی و ارتعاشی هواپیما پرداخته می‌شود و در آخر با رسم نمودارهای فلاتر اثر اضافه کردن کنترل حلقه بسته به سیستم در مودهای جفت شونده در فلاتر جسم آزاد مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۱.۳. اعتبارسنجی

در این بخش به اعتبارسنجی معادلات برهم‌کنش آیروالاستیک با معادلات دینامیک پرواز پرداخته می‌شود. برای این کار نمودار موقعیت قطب‌ها به عنوان تابعی از سرعت جریان برای سه مود تناوب کوتاه

شکل ۲. مقایسه نمودار موقعیت قطب‌های مود تناوب کوتاه،

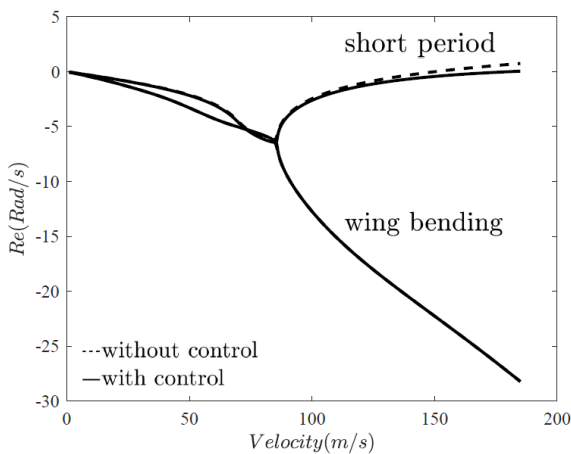
خمش و پیچش بال کار حاضر با مرجع [۱۰]

جدول ۱. مشخصات هواپیما

پارامتر	نماد	واحد	مقدار
وتر بال	c	m	۱/۸۲۹
وتر دم	c_t	m	۰/۳
دهانه بال	L	m	۶/۰۹۶
دهانه دم	L_t	m	۲/۲
موقعیت مرکز الاستیک بال	$x_{e.a.}$	m	۰/۶۰۹۶۷
موقعیت مرکز جرم بال	$x_{c.g.}$	m	۰/۷۹۲۵۷
جرم بر واحد طول بال	m_w	kg/m	۳۵/۷۱۸۷
جرم کل هواپیما	m	kg	۱۳۵۱
ممان اینرسی بال (حول مرکز الاستیک)	I_ξ	kg.m	۳۵/۶۹۵
ممان اینرسی هواپیما (حول مرکز جرم)	I_{yy}	kg.m ²	۱۴۰۰
صلبیت پیچشی بال	GJ_ξ	N.m ²	۹۸۹۰۰۰
صلبیت خمشی بال	EI_η	N.m ²	۹۷۶۵۰۰۰
فاصله مرکز آیرودینامیکی بال از مرکز آیرودینامیکی دم	D	m	۵
ضریب برای الویتور	$C_{L\delta_e}$		2π

که در سرعتی بالاتر از سرعت فلاتر جسم آزاد، پایدار است.

برای نمایش چگونگی اثرگذاری کنترل حلقه بسته بر روی ویژگی‌های سیستم، رفتار مودهای موثر در پدیده فلاتر جسم آزاد مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بدین منظور تغییرات بخش حقیقی مقادیر ویژه نسبت به سرعت، شکل ۳، فرکانس نسبت به سرعت، شکل ۴ و همچنین نمودار موقعیت قطب‌ها، شکل ۵، برای دو سیستم بدون و با کنترل نشان داده شده است. با توجه به شکل ۳ می‌توان دریافت که سرعت فلاتر جسم آزاد از ۱۵۰ m/s به ۱۸۰ m/s افزایش یافته است با مقایسه نمودارهای شکل‌های ۳ و ۴ مشخص می‌شود که کنترل حلقه بسته بیشتر بر روی بخش حقیقی مقادیر ویژه مودها اثر گذار می‌باشد تا بر روی فرکانس آنها.



شکل ۳. نمودار بخش حقیقی مقادیر ویژه بر حسب سرعت برای دو حالت بدون کنترل و با کنترل (ماتریس بهره بدست آمده در سرعت ۱۶۰ m/s)

۲.۳. تعویق فلاتر جسم آزاد و چگونگی رفتار

مودها در سیستم کنترل حلقه بسته

برای به تعویق انداختن فلاتر جسم آزاد در کار حاضر از کنترل کننده LQR استفاده شده است. نحوه عملکرد به این صورت است که در یک سرعت مشخص بالاتر از سرعت فلاتر حلقه باز، ماتریس بهره سیستم کنترلی به دست می‌آید، سپس با اضافه کردن این ماتریس بهره به معادلات حرکت، یک سیستم جدید به دست می‌آید

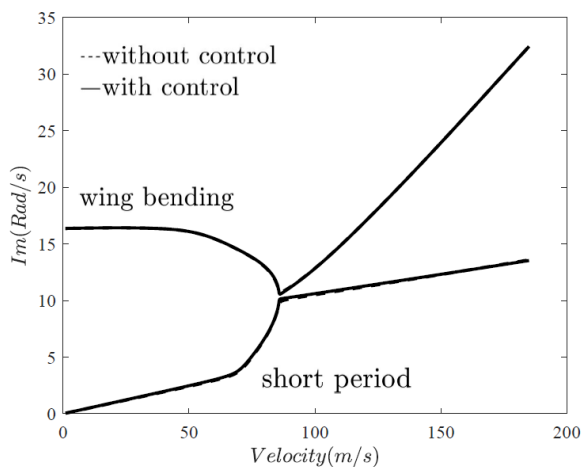
هوایما بدون کنترل	۱۲.۳۳۹	۲۴.۴۶۸۰	۰	-۲۲.۲۸۸۸
هوایما با کنترل	۱۲.۳۵۸	۲۴.۴۶۷۳	-۰.۴۳۱	-۲۲.۲۸۸۲
درصد تغییر	۰.۱۵%	۰.۰۰۰۲۸۶%	-	۰.۰۰۲۶۹%
میزان تغییر	۰.۰۱۹	۰.۰۰۰۰۷	۰.۴۳۱	۰.۰۰۰۶

جدول ۲ مقادیر فرکانس و میرایی مودهای شرکت کننده در پدیده فلاتر جسم آزاد را در سرعت 150 m/s (سرعت فلاتر جسم آزاد در حالت بدون کنترل) در دو حالت با و بدون سیستم کنترل ارائه داده است. نتایج این جدول به نوعی به صورت کمی مؤید این حقیقت است که سیستم زدودن فلاتر به علت استفاده از سطوح کنترل دم افقی، که نیروی آیرودینامیک روی آن یکی از پارامترهای موثر در مود تناوب کوتاه می باشد، تاثیر اصلی را بر روی مود تناوب کوتاه (چه میرایی و چه فرکانس) که همان مود ناپایدار شونده در پدیده فلاتر جسم آزاد می باشد می گذارد، و این نیز به نوعی صحت انتخاب سطوح کنترل دم افقی در مقایسه با سطوح کنترل بال برای کنترل این پدیده را نشان می دهد.

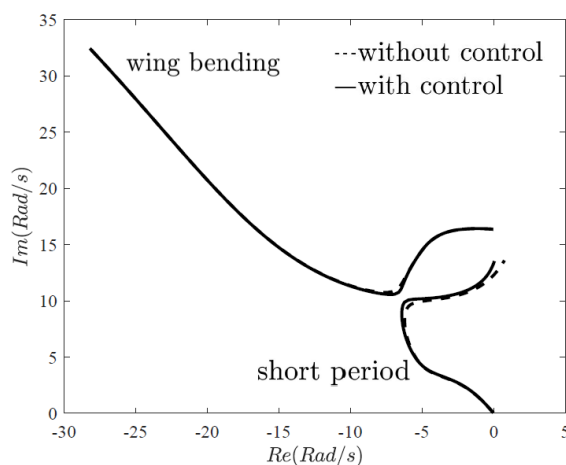
۳.۳. مطالعه افزودن کنترل حلقه بسته بر روی

پاسخ زمانی سیستم

برای نشان دادن اثر اضافه کردن کنترل، در شکل های ۶ تا ۸ به ترتیب پاسخ زمانی زاویه حمله هوایما، خمش نوک بال و پیچش نوک بال در دو حالت با و بدون کنترل در سرعت 160 m/s نمایش داده شده است. (در حالی که سرعت فلاتر جسم آزاد حلقه باز سیستم m/s 150 است.) این شکل ها همان طور که انتظار می رود



شکل ۴. نمودار فرکانس بر حسب سرعت برای دو حالت بدون کنترل و با کنترل (ماتریس بهره بدست آمده در سرعت m/s 160)



شکل ۵. نمودار فرکانس بر حسب بخش حقیقی مقادیر ویژه برای دو حالت بدون کنترل و با کنترل (ماتریس بهره بدست آمده در سرعت m/s 160)

جدول ۲. مقایسه فرکانس ها و میرایی های موثر در فلاتر جسم آزاد در حالت عدم حضور و حضور کنترل در سرعت m/s 150

مدل/کمیت	فرکانس تناوب کوتاه	فرکانس اول بال	بخش حقیقی مقادیر ویژه مود خمش اول	بخش حقیقی مقادیر ویژه مود تناوب کوتاه
	(rad/s)	(rad/s)	(rad/s)	(rad/s)

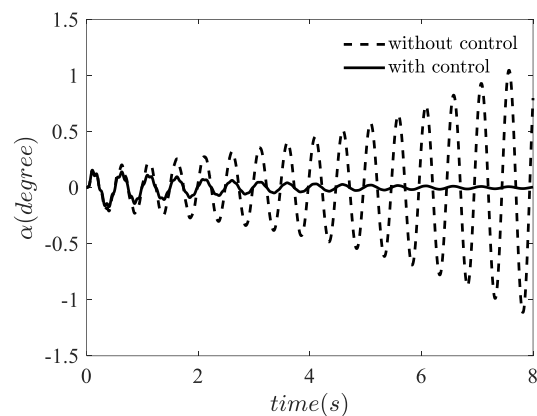
شکل ۸. پاسخ زمانی پیچش نوک بال با و بدون کنترل در سرعت ۱۶۰ m/s

۴.۳. محدودیت‌های کنترل

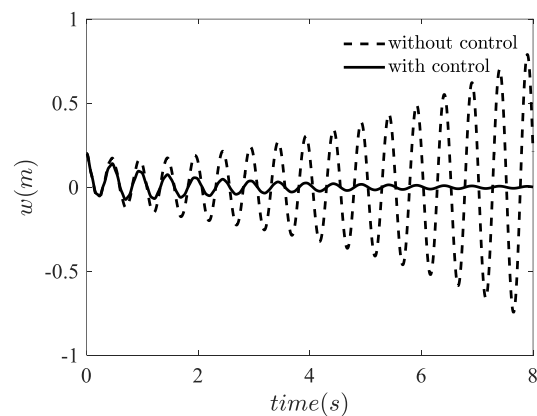
از نظر تئوری، کنترل‌کننده LQR می‌تواند بطور نامحدود مرز ناپایداری فلاتر را افزایش دهد. اما در واقعیت محدودیتی برای این عمل وجود دارد. این محدودیت در عملگر به کار رفته است. در انتخاب محدودیت عملگر، باید دقت کرد که عملگر باید یک پدیده دینامیکی را میرا کند و در نتیجه باید به دنبال قید دینامیکی در آن بود نه قید استاتیکی مانند زاویه الویتور. این قید همان سرعت زاویه‌ای الویتور می‌باشد. در کار حاضر، سرعت کاری عملگر حداکثر ۸/۴ deg/s در نظر گرفته شده است. با اعمال این قید این نتیجه حاصل می‌شود سرعتی که در آن ماتریس بهره سیستم کنترلی بدست می‌آید تا سرعت فلاتر جسم آزاد را به تعویق بیندازد ۱۶۰ m/s می‌باشد و سرعت‌های بیشتر، خارج از محدوده عملیاتی عملگر می‌باشند. شکل ۹ پاسخ زمانی زاویه و نرخ زاویه الویتور را در سرعت ۱۶۰ m/s نشان می‌دهد، با توجه به این شکل نکته ذکر شده در مورد انتخاب نوع قید (استاتیکی یا دینامیکی) در بالا به نوعی تأیید می‌گردد. با این توضیح که نرخ زاویه الویتور به حد عملیاتی خود رسیده است ولی زاویه الویتور تا نقطه کاری خود که همان واماندگی^{۲۰} می‌باشد و برای مثال برای ایرفویل NACA 0012 تقریباً برابر ۱۱ درجه است، فاصله زیادی دارد.

شکل ۱۰ میزان تغییرات سرعت الویتور با سرعت جریان را نشان می‌دهد، با دقت در این نمودار این نتیجه حاصل می‌گردد که برای دستیابی به سرعت‌های

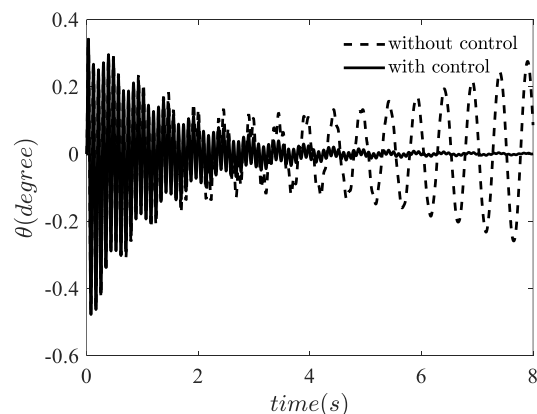
پایداری در متغیرهای حالت را با وجود کنترل‌کننده در ناحیه ناپایدار برای سیستم حلقه باز، نشان می‌دهد.



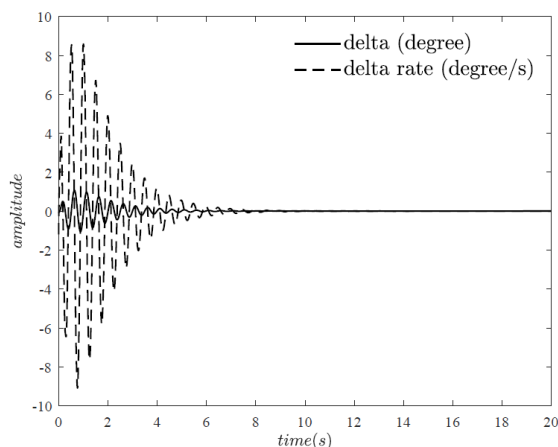
شکل ۵. پاسخ زمانی زاویه حمله هواپیما با و بدون کنترل در سرعت ۱۶۰ m/s



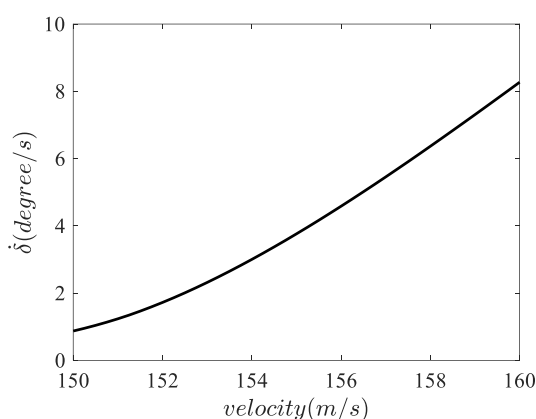
شکل ۶. پاسخ زمانی خمش نوک بال با و بدون کنترل در سرعت ۱۶۰ m/s



فلاتر جسم آزاد بالاتر به ناچار باید از عملگرهایی سریع‌تر استفاده شود.



شکل ۹. پاسخ زمانی زاویه و نرخ زاویه الویتور در سرعت m/s ۱۶۰ در کنترل حلقه بسته



۵. منابع

- [1] Niblett, LL T. "The fundamentals of body-freedom flutter." *The Aeronautical Journal* 90, no. 899 (1986): 373-377.
- [2] Shi, Pengtao, Jihai Liu, Yingsong Gu, Zhichun Yang, and Pier Marzocca. "Full-span flying wing wind tunnel test: a body freedom flutter study." *Fluids* 5, no. 1 (2020): 34.
- [3] Richards, Phillip W., Yuan Yao, Robert A. Herd, Dewey H. Hodges, and Pezhman Mardanpour. "Effect of inertial and constitutive properties on body-freedom flutter for flying wings." *Journal of Aircraft* 53, no. 3 (2016): 756-767.
- [4] Mardanpour, Pezhman, Dewey H. Hodges, Ryan Neuhart, and Nathan Graybeal. "Engine placement effect on nonlinear trim and stability of flying wing aircraft." *Journal of Aircraft* 50, no. 6 (2013): 1716-1725.

شکل ۱۰. تغییرات سرعت زاویه‌ای عملگر با سرعت جریان

۴. نتیجه‌گیری

در کار حاضر مدلی از هواپیمای کامل ارائه شد که قابلیت مدل‌سازی همزمان مود تناوب کوتاه هواپیما و آیروالاستیسیته بال را دارد. نتایج بدست آمده برای مقادیر ویژه مودها بر حسب سرعت با نتایج موجود در مراجع مقایسه شد که دقت بسیار خوب مدل را نشان می‌داد. سپس یک کنترل‌کننده LQR با فیلتر کالمن برای به تاخیر انداختن پدیده فلاتر جسم آزاد طراحی شد. افزودن کنترل حلقه بسته، با توجه به اینکه ماتریس بهره در سرعت m/s ۱۶۰ بدست آمد، موجب افزایش سرعت فلاتر جسم آزاد از m/s ۱۵۰ به m/s ۱۸۰ شد. نتایج نشان داد که مدل کنترل‌کننده حاضر بدون محدودیت می‌تواند فلاتر را به تاخیر بیاندازد و در نتیجه باید یک عامل محدود کننده که در اینجا سرعت عملگر یا نرخ سرعت زاویه‌ای الویتور است جستجو شود. این قید در سرعت جریان m/s ۱۶۰ به حد مرزی خود یعنی $8/4 \text{ deg/s}$ رسید و در نتیجه این همان سرعتی است که باید ماتریس بهره کنترل‌کننده در آن بدست آید.

- [5] Mardanpour, Pezhman, Phillip W. Richards, Omid Nabipour, and Dewey H. Hodges. "Effect of multiple engine placement on aeroelastic trim and stability of flying wing aircraft." *Journal of Fluids and Structures* 44 (2014): 67-86.
- [6] Love, Michael, P. Zink, Paul Wieselmann, and Harold Youngren. "Body freedom flutter of high aspect ratio flying wings." In *46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, p. 1947. 2005.
- [7] Shafaghat, Salman, Mohammadali Noorian, and Saeid Irani. "Nonlinear body-freedom flutter analysis in aircraft with the flexible wing." *Aerospace Knowledge and Technology Journal* 11, no. 1 (2022): 191-204.
- [8] Li, Yuan Dong, Xin Ping Zhang, Ying Song Gu, and Zhi Chun Yang. "Body freedom flutter study and passive flutter suppression for a high aspect ratio flying wing model." *Applied Mechanics and Materials* 608 (2014): 708-712.
- [9] Huang, Chao, Y. A. N. G. Chao, W. U. Zhigang, and T. A. N. G. Changhong. "Variations of flutter mechanism of a span-morphing wing involving rigid-body motions." *Chinese Journal of Aeronautics* 31, no. 3 (2018): 490-497.
- [10] Iannelli, Andrea, Andrés Marcos, and Mark Lowenberg. "Study of flexible aircraft body freedom flutter with robustness tools." *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 41, no. 5 (2018): 1083-1094.
- [11] Xiong, Gang, and Chao Yang. "Synthesis on flutter suppression control law for active aeroelastic wing." In *19th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, p. 1463. 2001.
- [12] Meirovitch, Leonard, and Ilhan Tuzcu. "Integrated Approach to Flight Dynamics and Aeroservoelasticity of Whole Flexible Aircraft-Part I: System Modeling." In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, p. 4747. 2002.
- [13] Meirovitch, L., and I. Tuzcu. "Integrated Approach to Flight Dynamics and Aeroservoelasticity of Whole Flexible Aircraft-Part II: Control Design." In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, p. 5055.
- [14] MUKHOPADHYAY, V. *Flutter suppression digital control law design and testing for the AFW wind-tunnel model: AIAA-1992-2095*. Reston: AIAA, 1992.
- [15] Theis, Julian, Harald Pfifer, and Peter J. Seiler. "Robust control design for active flutter suppression." In *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, p. 1751. 2016.
- [16] Schmidt, David K., Brian P. Danowsky, Aditya Kotikalpudi, Julian Theis, Christopher D. Regan, Peter J. Seiler, and Rakesh K. Kapania. "Modeling, design, and flight testing of three flutter controllers for a flying-wing drone." *Journal of Aircraft* 57, no. 4 (2020): 615-634.
- [17] Zou, Qitong, Xusheng Mu, Hongkun Li, Rui Huang, and Haiyan Hu. "Robust active suppression for body-freedom flutter of a flying-wing unmanned aerial vehicle." *Journal of the Franklin Institute* 358, no. 5 (2021): 2642-2660.
- [18] Schmidt, David K. *Modern flight dynamics*. New York: McGraw-Hill, 2012.
- [19] Hodges, Dewey H., and G. Alvin Pierce. *Introduction to structural dynamics and aeroelasticity*. Vol. 15. Cambridge University Press, 2011.
- [20] Karpel, Mordechai. *Design for active and passive flutter suppression and gust alleviation*. Stanford University, 1980.

-
- ¹ Body Freedom Flutter (BFF)
 - ² Aeroelastic
 - ³ Aeroservoelastic
 - ⁴ Elevator
 - ⁵ Linear-Quadratic Regulator (LQR)
 - ⁶ Kalman filter
 - ⁷ Short period
 - ⁸ Multi Input Multi Output (MIMO)
 - ⁹ Linear Quadratic Gaussian (LQG)
 - ¹⁰ Flap
 - ¹¹ Plunge
 - ¹² Pitch
 - ¹³ Theodorsen
 - ¹⁴ Pade
 - ¹⁵ Roger
 - ¹⁶ Minimum-State Method
 - ¹⁷ Downwash
 - ¹⁸ Riccati
 - ¹⁹ Kalman-Bucy filter
 - ²⁰ Stall