

## ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی چرخان با وصله پیزوالکتریک با

## روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته

الهه رحمانفر

علی اصغر جعفری\*

دانشجوی کارشناسی ارشد

استاد دانشکده مکانیک

دانشکده مکانیک دانشگاه خواجه نصیرالدین

دانشکده مکانیک دانشگاه خواجه نصیرالدین

طوسی

طوسی

rahmanfar.elah@gmail.com

ajafari@kntu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۲۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۰۹

## چکیده

در این پژوهش به منظور بررسی تأثیر پیزوالکتریک که به عنوان سنسور و یا عملگر در سازه‌های انعطاف پذیر چرخانی مثل پره بالگرد مورد استفاده قرار می‌گیرد، ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی چرخان با و بدون پیزوالکتریک، ارائه گردیده است. به منظور صرفه جویی در هزینه از وصله پیزوالکتریک به جای لایه استفاده شده است. برای میدان جابه‌جایی ورق و پیزوالکتریک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول<sup>۱</sup> در نظر گرفته شده است. با در نظر گرفتن اثر شتاب کوریولیس<sup>۲</sup>، شتاب گریز از مرکز<sup>۳</sup> و نیروهای درون صفحه‌ای گریز از مرکز، معادلات حرکت از اصل همیلتون<sup>۴</sup> استخراج گردیده و معادله کوپل الکترومکانیکی از معادله ماکسول<sup>۵</sup> حاصل می‌گردد. برای پیزوالکتریک دو شرط الکتریکی مدار باز<sup>۶</sup> و مدار بسته<sup>۷</sup> که به ترتیب در سنسورها و عملگرها مورد استفاده قرار می‌گیرد، در نظر گرفته شده است. معادلات به کمک روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته<sup>۸</sup> که با وجود وصله چالش برانگیز است گسسته‌سازی شده و ماتریس‌های جرم اینرسی، گریز از مرکز و کوریولیس و ماتریس سفتی حاصل می‌شوند. مقادیر فرکانس طبیعی برای تیر و ورق چرخان در نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. همچنین مقادیر حاصل از حل عددی در متلب با مقالات و آباکوس صحت‌سنجی شده که از دقت بالایی برخوردار است. تأثیر پارامترهایی مثل شعاع هاب<sup>۹</sup>، سرعت چرخش، ضخامت ورق، نسبت منظری<sup>۱۰</sup>، ضخامت وصله پیزوالکتریک و ولتاژ اعمالی در فرکانس طبیعی سیستم نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

**واژگان کلیدی:** ارتعاشات آزاد، وصله پیزوالکتریک، سازه‌های انعطاف پذیر چرخان، ورق مستطیلی چرخان، کوریولیس،

گریز از مرکز، روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته، فرکانس طبیعی

## ۱. مقدمه

در مهندسی امروزی از سازه‌های چرخشی انعطاف‌پذیری مثل پره‌های موتور توربو و توربین‌ها، بالگردها و دیگر ساختارهای فضایی مانند آنتن‌های ماهواره‌ای و بادبان‌های خورشیدی<sup>۱۱</sup> استفاده می‌شود. به دلیل وجود پدیده‌های مخربی مثل تشدید<sup>۱۲</sup> و فلاتر<sup>۱۳</sup>، شناخت و بررسی فرکانس‌های طبیعی و خواص مودال اینگونه سازه‌ها دارای اهمیت ویژه‌ای است. حال آنکه چرخش و به دنبال آن ایجاد نیروی اینرسی دورانی، باعث تغییر قابل‌توجهی در خواص دینامیکی سازه می‌شود. نیروی اینرسی که به صورت نیروی درون صفحه‌ای ظاهر می‌شود، باعث کشیدگی سازه و افزایش سختی خمشی<sup>۱۴</sup> آن و در نتیجه افزایش فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌گردد. از این رو برای طراحی صحیح این سازه‌ها بایستی رفتارهای دینامیکی را مورد بررسی قرار داد. در بیشتر پژوهش‌های انجام شده تا کنون، از تیر به عنوان سازه انعطاف‌پذیر چرخان استفاده شده است. در نظر گرفتن مدل تیر برای سازه‌های باریک، دارای هندسه سطح مقطع ساده و سیستم‌هایی با سرعت دورانی پایین از دقت خوبی برخوردار است. اما در صورتی که سازه دارای نسبت منظری کمتر، هندسه پیچیده‌تر، سطح مقطع متغیر مثل ایرفویل<sup>۱۵</sup> و سرعت دورانی بیشتری باشد، فرکانس‌های طبیعی حاصل از تحلیل از فرکانس‌های طبیعی حاصل از آزمایش فاصله می‌گیرند. همچنین سرعت دورانی بالا یکی از عواملی است که می‌تواند مانع از پایداری سیستم شود که این نشان‌دهنده اهمیت موضوع چرخش در سازه‌های منعطف است. پس در سیستم‌هایی با موارد ذکر شده، مدل یک بعدی تیر از دقت کافی برخوردار نیست و بایستی از مدل دو بعدی

ورق برای انجام پژوهش‌های تحلیلی و عددی استفاده نمود. در سال ۱۹۸۶ وانگ و همکارانش [۱] به بررسی ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی یکسرگردار چرخان ایزوتروپیک و اورتوتروپیک پرداختند. تأثیر پارامترهای مثل شعاع هاب، سرعت چرخش در فرکانس‌های طبیعی سیستم به صورت تحلیلی بررسی شد که با نتایج آزمایشگاهی مطابقت قابل‌قبولی داشت. در سال ۲۰۰۲ یو و همکارانش [۲] با استخراج معادلات و روابط حاکم بر ورق مستطیلی چرخان یکسرگردار، به کمک روش ریلی ریتز<sup>۱۶</sup> به بررسی خواص دینامیکی و مودال ورق پرداختند. در سال ۲۰۱۵ ژانگ [۳] مشخصه‌های دینامیکی ورق چرخان یکسرگردار از جنس FGM<sup>۱۷</sup> را بررسی کرد. در این تحلیل از قانون توانی برای توزیع مواد در راستای ضخامت استفاده شده است. تأثیر پارامترهای بی بعدی مثل نسبت اضلاع، نسبت شعاع هاب و کسر حجمی بر فرکانس‌های طبیعی سیستم مورد بررسی قرار گرفت. در سال ۲۰۱۶ رستمی و همکاران [۴] پژوهشی با هدف بررسی ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق اورتوتروپیک یکسرگردار چرخان انجام دادند. معادلات به کمک اصل همپلتون استخراج شده و اثر کوریولیس نیز در نظر گرفته شده است. حل به روش کانتورویچ تعمیم‌یافته<sup>۱۸</sup> صورت گرفته و نتایج با روش گلرکین تعمیم‌یافته صحت‌سنجی شده و اثر پارامترهای بی بعد در فرکانس طبیعی و تشدید بررسی شده است. در سال ۲۰۱۹ ساکی و همکارانش [۵] ارتعاشات آزاد نانو ورق مستطیلی ایزوتروپیک چرخان، حل نیمه‌تحلیلی ریلی ریتز با توابع جابه‌جایی چندجمله‌ای جبری را ارائه کردند. برای این ورق نازک از تئوری کلاسیک و تئوری الاستیسیته غیرمحملی استفاده شده و تأثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس

طبیعی بررسی شده است. در سال ۲۰۲۲ هائو و همکارانش [۶] یک ورق یکسرگردار چرخان با پیچش و ضخامت متغیر در دو جهت طولی و عرضی را به عنوان پره در نظر گرفته و به تحلیل ارتعاشاتی آن پرداختند. از تئوری کلاسیک و ون کارمن برای استخراج انرژی استفاده شده و حل به کمک روش ریلی ریتز انجام شده است. در سال ۲۰۲۳ جورج و دیگر همکارانش [۷] رفتار دینامیکی یک ورق گرافن چرخان تقویت شده با CFRP<sup>۱۹</sup> به کمک المان محدود را تحلیل کردند. شرایط مرزی به صورت یکسرگردار و تئوری تغییر شکل مرتبه اول برشی در نظر گرفته شده و تأثیر پارامترهای مختلف بر فرکانسهای طبیعی مورد بررسی قرار گرفته است.

همانطور که گفته شد، ارتعاشات سازه‌های انعطاف پذیر مانند پره بالگرد می‌تواند مخرب باشد از این رو نیاز به پایش و کنترل مداوم دارند. یکی از مکانیزم‌های به صرفه جهت پایش این سازه‌ها، کاهش ارتعاشات و حتی برداشت انرژی، استفاده از مواد پیزوالکتریک است. این مواد دارای خاصیت پیزوالکتریک هستند بدین معنا که با اعمال تنش و ایجاد کرنش، درون آنها میدان الکتریکی و ولتاژ تولید می‌شود و بالعکس. در نتیجه از این مواد به عنوان حسگر (شتاب سنج)، ژيروسکوپ‌های لرزاننده<sup>۲۰</sup> که سنسوری برای محاسبه زاویه (تعیین جهت) و سرعت دورانی در سیستم‌های چرخشی است، عملگر به منظور کنترل ارتعاشات و مکانیزم برداشت انرژی استفاده می‌شود. از این رو مدل‌سازی ریاضی، رفتار و تأثیر این مواد در شرایط الکتریکی مختلف حائز اهمیت بوده و پژوهش‌های متعددی بر روی ارتعاشات سازه‌ها به همراه مواد پیزوالکتریک صورت گرفته است. ابتدا به خلاصه‌ای از پژوهش‌ها در رابطه با ارتعاشات

ورق غیرچرخان کوپل شده با پیزوالکتریک پرداخته و سپس ارتعاشات سازه‌های چرخان با مواد پیزوالکتریک مرور می‌شود. در سال ۲۰۱۷ عارفی و همکارانش [۸] به تحلیل ارتعاش آزاد یک نانو ورق سه لایه الاستیک با هسته گرافن به صورت نمایی و صفحات پیزومغناطیسی که بر یک بستر پاسترناک<sup>۲۱</sup> قرار گرفته پرداختند. معادلات به کمک تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول و پیزومغناطیس الاستیسیته غیرمحملی ارینگن<sup>۲۲</sup> و اصل همیلتون استخراج و با روش تحلیلی نویر<sup>۲۳</sup> حل شده است. در نهایت مقادیر فرکانس طبیعی به ازای پارامترهای مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. ایشان [۹] در همین سال به تحلیل ارتعاش آزاد یک نانو/میکرو ورق الاستیک سه لایه با شرایط مشابه ولی با تئوری تنش کوپل اصلاح شده پرداختند. این مدل شامل یک پارامتر مقیاس طول مواد جهت ثبت اثر اندازه است که تأثیر آن نیز در مقادیر فرکانس طبیعی بررسی شده است. در سال ۲۰۱۹ زور و همکارانش [۱۰] ارتعاش آزاد و پاسخ کماتش نانوصفحات هدفمند با کوپلینگ مگنتو-الکترو-الاستیک را مورد بررسی قرار دادند. برای اولین بار از تئوری تغییر شکل برشی سینوسی اصلاح شده غیرمحملی استفاده شده و معادلات به کمک اصل همیلتون اصلاح شده استخراج گردیده است. حل برای ورق با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و به روش تحلیلی نویر صورت گرفته است. در سال ۲۰۲۳ ساتلا و همکارانش [۱۱] روشی برای کنترل فعال ورق تابعی هدفمند با کمک حسگر و عملگرهای پیزوالکتریک ارائه کردند. به کمک تئوری کلاسیک ورق، معادلات حرکت استخراج و به فرم فضای حالت نوشته شده است.

همچنین مکان حسگر و عملگرهای پیزوالکتریک به‌منظور میرایی بهتر بهینه‌سازی شده است. با توجه به اهمیت پایش و کنترل ارتعاشات سازه‌های چرخان، پژوهش‌های تحلیلی، عددی و تجربی در رابطه با ارتعاشات تیر و ورق کوپل شده با پیزوالکتریک و ژيروسکوپ‌های پیزوالکتریک انجام شده است. در سال ۱۹۹۶ کاگاو و همکارش [۱۲]، به بررسی مشخصه‌های فرکانسی یک ژيروسکوپ لرزاننده که شامل یک ورق پیزوالکتریک نازک بود به روش المان محدود پرداختند. این ورق حول محوری در راستای ضخامت و در وسط آن دارای چرخش است و تأثیر نیروی کوریولیس نیز در نظر گرفته شده است. تأثیر چرخش در شکل موده‌ها، فرکانس تشدید و ویژگی‌های انتقال که نشان از قابلیت سنجش در برابر چرخش است، مورد بررسی قرار گرفت. در سال ۲۰۰۲ فانگ و دیگر همکارانش [۱۳]، مطالعه‌ای در خصوص اثر چرخش در مشخصه‌های امواج منتشر شده در یک ورق پیزوالکتریک با روابط خطی و در نظر گرفتن اثر کوریولیس و نیروهای گریز از مرکز، انجام دادند. در این پژوهش حساسیت چرخشی برای ورق سرامیکی قطبیده بررسی شده است. هدف این پژوهش، توسعه سنسورهای چرخشی و سایر سیستم‌های دارای پیزوالکتریک که عدم حساسیت به فرکانس چرخش اهمیت دارد، است. در سال ۲۰۰۴ یانگ [۱۴] مروری بر تحلیل‌های پیزوالکتریک‌های چرخان یا همان ژيروسکوپ‌های پیزوالکتریک انجام داد که در آن روابط یک بعدی و دو بعدی برای سازه‌های تیر، حلقه، ورق و پوسته بررسی شده است. در همین سال تاکار و همکارش [۱۵] به کنترل و کاهش ۴۳ درصدی ارتعاشات پره‌های بالگرد با عملگرهای پیزوالکتریک به‌صورت لایه پرداختند. در این پژوهش

از یک مدل آیرودینامیکی ناپایای زمانی برای به‌دست آوردن بارهای هوایی استفاده شده است. معادلات به کمک اصل همپلتون استخراج و به روش عددی المان محدود گسسته‌سازی شد. در سال ۲۰۰۷ لیو و همکاران [۱۶]، مشخصه‌های فرکانسی و کنترل فعال و غیرفعال ارتعاشات یک ورق یکسرگردار با لایه‌های عملگر پیزوالکتریک را بررسی کردند. برای ورق تئوری کلاسیک در نظر گرفته شده و گسسته‌سازی معادلات به کمک المان محدود صورت گرفته است. ژيروسکوپ مودال میکروماشین شده پیزوالکتریک (PMMG) [۲۴] یک نوع جدید از سنسورهای چرخشی است که براساس حالت ارتعاشی ضخامت-برشی با بدنه پیزوالکتریک است. از این‌رو در سال ۲۰۰۹ وو و همکاران [۱۷] در پژوهشی به توضیح عملکرد این سنسور و استخراج فرکانس تشدید به کمک المان محدود پرداختند. در سال ۲۰۱۱ جفری و همکاران [۱۸] به تحلیل و کنترل نیمه‌فعال ارتعاشات پره در توربو ماشین‌ها به کمک پیزوالکتریک پرداختند. در سال ۲۰۱۳ جیمز و دیگر همکارانش [۱۹]، به مطالعه کنترل ارتعاشات یک پره چرخان به کمک پیزوالکتریک پرداختند. این پژوهش با اهدافی از جمله توسعه روش عددی المان محدود با وجود مدار RLC، صحت‌سنجی با روش آزمایشگاهی برای پره در ابعاد کوچک و دستیابی به یک روش عددی مقرون‌به‌صرفه برای تحلیل دقیق کنترل ارتعاشات پره‌های دوار، صورت گرفت. در سال ۲۰۱۵ مالگااکا و همکاران [۲۰] کنترل ارتعاشات پره‌های دوار با مواد پیزوالکتریک در سمت گیردار پره را، با روش المان محدود و نرم‌افزار انسیس بررسی کردند. در سال ۲۰۱۹ عرب جمالویی و همکاران [۲۱] به بررسی ارتعاشات پره کامپوزیتی با وصله

پیزوالکتریک کوپل شده در یک محیط دارای گرما و رطوبت پرداختند. برای پره مدل تیر اویلر برنولی در نظر گرفته شده و معادله فرکانسی به کمک روش گلرکین استخراج شده است. تأثیرات سرعت دورانی، دما، رطوبت، جهت الیاف<sup>۲۵</sup>، ولتاژ و لایه‌های پیزوالکتریک در فرکانس‌های طبیعی سیستم بررسی شده است. همچنین در این سال سوریوگلو و همکارانش [۲۲] کاهش ارتعاشات یک پره با عملگر پیزوالکتریک با استفاده از کنترل مقاوم چند هدفه و با در نظر گرفتن عدم قطعیت بار حاصل از عملگر را بررسی کردند. فرکانس‌های طبیعی از تحلیل مودال حاصل شده و برای ایجاد ارتعاش پایدار از یک بار آیرودینامیکی به صورت تجربی استفاده شده و در نهایت معادلات به فرم فضای حالت به منظور حل سیستم، محاسبه گردیده است. در سال ۲۰۲۰ کلی و همکاران [۲۳]، در زمینه بهینه‌سازی مکان و اندازه وصله پیزوالکتریک روی پره برای کاهش بهینه ارتعاشات آن پژوهشی انجام دادند. به منظور مدل‌سازی پره از مدل ورق دوزنقه‌ای شکل با تئوری کلاسیک استفاده شده و حل به روش تحلیلی صورت گرفته است. مکان بهینه‌ی وصله در جایی از ورق با کرنش ماکزیمم است. در سال ۲۰۲۱ کنترل ارتعاش ورق چرخان دارای هاب به کمک لایه فعال میرایی توسط جیانگ و همکارانش [۲۴] انجام شد. هر دو اثر خمش و کشش درون صفحه‌ای در نظر گرفته شده است. لایه میراگر به صورت ترکیبی از ماده پیزوالکتریک و مواد ویسکوالاستیک به ورق کوپل شده و ارتعاشات آزاد و اجباری با روش المان محدود انجام شده است. اما در سال اخیر بیشتر از سال‌های دیگر در این موضوع پژوهش انجام شده است که به اختصار برخی از آنها ذکر شده‌اند. روسی و همکارانش [۲۵] یک

رویگرد جدید برای کاهش تنش‌های پره‌های فن در صورت تشدید ناشی از اعوجاج جریان ورودی با استفاده از محرک‌های پیزوالکتریک ارائه کردند. لی و چن [۲۶] به تنظیم تشدید پایه ارتعاشات تیر میکروژيروسکوپ بر اساس تحریک پیزوالکتریک، غیرخطی بودن و اینرسی پرداختند.

حسینی و همکارش [۲۷]، ارتعاشات آزاد میکروتیرهای پیزوالکتریک/فلکسوالکتریک<sup>۲۶</sup> دوار را با در نظر گرفتن تئوری اویلر برنولی و روش گلرکین تحلیل کردند. یو و همکارانش [۲۸] مروری بر کاربرد مواد پیزوالکتریک در میرا نمودن ارتعاشات پره موتورهای مورد استفاده در صنایع هوایی انجام دادند. لی و همکارانش [۲۹] به تحلیل ارتعاشات غیرخطی و پایداری میکروتیرهای تابعی هدفمند با پیزوالکتریک به روش عددی مربعات دیفرانسیلی پرداختند. ما و دیگر همکارانش [۳۰] پژوهشی در رابطه با دینامیک گذرا و مشخصه‌های فرکانسی تیر پیزوالکتریک چندلایه که حول محوری در سر آزاد در حال دوران است، انجام دادند. محمدی و همکاران [۳۱] تأثیر کوریولیس بر تحلیل ترمو- مکانیکی تیر نانو تیر چندلایه پیزوالکتریک چرخان به روش مربعات دیفرانسیلی، بررسی کردند.

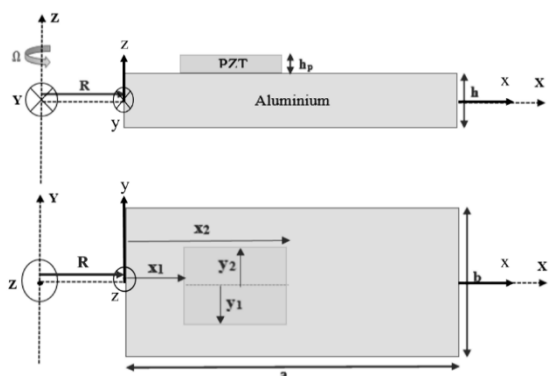
روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته یکی از روش‌های قدرتمند با سرعت محاسباتی بالاتر از روش‌های المان محدود و تفاضل محدود است که در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. این روش برای گستره وسیعی از مسائل مهندسی مکانیک جامدات و سیالات اعم از مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی در هر مرتبه‌ای قابل‌پیاده‌سازی است. یکی از چالش‌های این روش، پیاده‌سازی در سیستم‌های دارای وصله است.

برای محاسبه تنش‌های ورق، ابتدا بایستی جابه‌جایی‌های یک ورق و به دنبال آن کرنش‌ها را محاسبه نمود. با توجه به تئوری FSDT میدان جابه‌جایی هر نقطه از ورق به صورت زیر بیان می‌شود [۳۲]:

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{cases} = \begin{cases} u_0(x, y, t) + z\beta_x(x, y, t) \\ v_0(x, y, t) + z\beta_y(x, y, t) \\ w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (1)$$

که در این رابطه  $u_0$ ،  $v_0$  و  $w_0$  به ترتیب نشان‌دهنده تغییر مکان سطح میانی ورق در راستای طول، عرض و ضخامت و  $\beta_x$ ،  $\beta_y$  به ترتیب بیانگر دوران سطح عمود بر محورهای  $y$  و  $x$  حول محورهای  $x$  و  $y$  است. روابط کرنش-جابه‌جایی خطی براساس این تئوری به صورت زیر است:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{\kappa\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \quad (2)$$



همان‌طور که در پژوهش‌های مرور شده مشاهده گردید، این روش برای ورق پیزوالکتریک و یا سازه‌های کوپل شده با لایه پیزوالکتریک استفاده شده ولی با وجود وصله این روش بررسی نشده است. پس در این پژوهش با هدف بررسی ارتعاشات آزاد سازه‌های انعطاف‌پذیر چرخانی مثل پره بالگرد دارای سنسور و عملگر از نوع مواد پیزوالکتریک، ارتعاشات ورق مستطیلی چرخان با وصله پیزوالکتریک با شرط مرزی یکسرگیردار مورد بررسی قرار می‌گیرد که به منظور صرفه‌جویی در هزینه به جای لایه از وصله استفاده شده است. معادلات به کمک تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، اصل همیلتون و معادله ماکسول استخراج می‌گردد. در نهایت گسسته‌سازی به کمک روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته انجام می‌شود.

## ۲. مدل‌سازی ورق مستطیلی چرخان با وصله پیزوالکتریک

به منظور مدل‌سازی، یک ورق مستطیلی با وصله کوپل شده مطابق با شکل ۱ در ابعاد و مختصات مشخص شده، در نظر می‌گیریم. پیزوالکتریک به ورق کاملاً متصل است و این فرض تا پایان باقی می‌ماند. ورق حول محور  $Z$  دارای چرخش با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  بر حسب (rad/sec) و دارای هاب با شعاع  $R$  است. جنس ورق آلومینیوم و پیزوالکتریک انتخاب شده به دلیل کوپلینگ مناسب و ضریب پیزوالکتریک بالا، PZT-5H در نظر گرفته شده است. ضخامت ورق  $h$  و ضخامت پیزوالکتریک با  $h_p$  نشان داده شده‌اند.

شکل ۱. شماتیک ورق مستطیلی چرخان با وصله پیزوالکتریک

### ۲-۱. روابط حاکم بر ورق مستطیلی چرخان

ضخامت تنش‌ها حاصل می‌شوند به صورت روابط زیر بیان می‌گردند:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$+ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$+ \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (7)$$

که در این روابط  $N_i; i = x, y$  و  $M_i; i = x, y, xy$  و  $T_i; i = x, y$  و  $M_i; i = x, y, xy$  منتجه‌های گشتاور هستند. همچنین ماتریس‌های  $A, B$  و  $D$  به ترتیب سفتی کششی و برشی، کوپل کشش-خمشی و سفتی خمشی نامیده می‌شوند و از رابطه زیر قابل محاسبه هستند.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{\varepsilon^0\}$  بیانگر کرنش‌های غشایی و  $\{\kappa\}$  تغییرات انحنا هستند. در نهایت بردار کرنش نهایی شامل کرنش‌های طولی، عرضی، برشی طولی و برشی عرضی حاصل می‌شود. طبق قانون هوک روابط تنش-کرنش بدین صورت بیان می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (3)$$

که در این رابطه  $\sigma_i, i = x, y$  و  $\tau_j, j = xy, xz, yz$  تنش‌های نرمال و برشی هستند و ضرایب  $Q_{ij}$  برای ماده ایزوتروپیک به صورت رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2}; \quad Q_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad (4)$$

$$Q_{33} = G; \quad Q_{44} = Q_{55} = kG$$

در این رابطه  $E$  مدول الاستیک،  $G$  مدول برشی و  $\nu$  ضریب پواسون ورق ایزوتروپیک هستند و همچنین ضریب  $k$  فاکتور تصحیح برشی در تئوری FSDT است که معمولاً 5/6 در نظر گرفته می‌شود. همچنین منتجه‌های نیرو و ممان که از انتگرالگیری روی

$$T = \frac{1}{2} \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(\vec{V} \cdot \vec{V}) \, dx \, dy \, dz \quad (10)$$

در این رابطه  $\rho$  و  $\vec{V}$  به ترتیب چگالی ورق و بردار سرعت هر ذره از ورق است. ابتدا بایستی سرعت ورق را با توجه به هندسه و چرخان بودن آن محاسبه کنیم. بدین منظور بردار  $\vec{r}$  یعنی مکان ذره دلخواه از ورق بعد از جابه‌جایی و  $\vec{V}$  را با توجه به شکل ۲ و مختصات در نظر گرفته شده و با کمک رابطه ۱ به صورت رابطه‌های ۱۱ و ۱۲ تعریف می‌کنیم. در این شکل بردار جابه‌جایی ذره قبل از تغییر شکل است.

$$\vec{r} = (R + x + u)\vec{i} + (y + v)\vec{j} + (z + w)\vec{k} \\ = (R + x + u_0 + z\beta_x)\vec{i} + (y + v_0 + z\beta_y)\vec{j} + (z + w_0)\vec{k} \quad (11)$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[ \frac{\partial u_0}{\partial t} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial t} - \Omega(y + v_0 + z\beta_y) \right] \vec{i} \\ + \left[ \frac{\partial v_0}{\partial t} + z \frac{\partial \beta_y}{\partial t} - \Omega(R + x + u_0 + z\beta_x) \right] \vec{j} + \frac{\partial w_0}{\partial t} \vec{k} \quad (12)$$

با جای‌گذاری رابطه ۱۲ در ۱۰ انرژی جنبشی ورق چرخان محاسبه می‌شود. انرژی کرنشی و پتانسیل ناشی از نیروهای گریز از مرکز نیز به صورت روابط ۱۳ و ۱۴ قابل بیان است.

$$U_s \\ = \frac{1}{2} \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y \\ + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} \\ + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \, dx \, dy \, dz \quad (13)$$

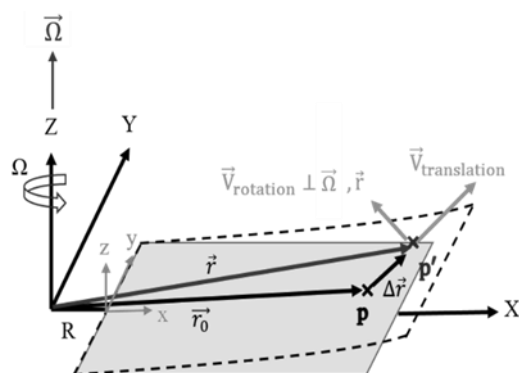
$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(1, z, z^2) \, dz, \\ i, j = 1, 2, 3 \quad (8)$$

$$A_{ii} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ii} \, dz, \quad i = 4, 5$$

معادلات ارتعاشی حاکم بر ورق مستطیلی چرخان با استفاده از اصل همیلتون بدین صورت قابل استخراج است [۳۳]:

$$\delta H = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta(U_s + U_{ct})) \, dt = 0 \quad (9)$$

ترم‌های  $T$ ،  $U_s$  و  $U_{ct}$  به ترتیب انرژی جنبشی، کرنشی و پتانسیل ناشی از نیروهای گریز از مرکز هستند. رابطه انرژی جنبشی برای یک جسم پیوسته مانند ورق و با در نظر گرفتن مختصات، بدین صورت تعریف می‌شود:



شکل ۲. بردار جابه‌جایی و سرعت هر ذره از ورق بعد از تغییر شکل

برای مواد پیزوالکتریک روابط تنش و جابه‌جایی الکتریکی بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$\{\sigma^p\} = [C]\{\varepsilon^p\} - [e]\{E^p\} \quad (18)$$

$$\{D^p\} = [e]^T\{\varepsilon^p\} + [\epsilon]\{E^p\} \quad (19)$$

[C] ماتریس سفتی الاستیک (N/m<sup>2</sup>)، [e] ماتریس ثوابت پیزو که عامل کوپل الکترومکانیکی سیستم هستند با واحد (c/m<sup>2</sup>) و [ε] ماتریس ضرایب دی‌الکتریک برحسب (Farad/m) هستند. همچنین {σ<sup>p</sup>}، {ε<sup>p</sup>}، {E<sup>p</sup>} و {D<sup>p</sup>} به ترتیب بردار تنش، کرنش، میدان الکتریکی و جابه‌جایی الکتریکی پیزوالکتریک هستند.

با توجه به تئوری FSDT این روابط برحسب ثوابت کاهیده بدین شکل هستند:

$$U_{ct} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( N'_x \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + N'_y \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \quad (14)$$

که در رابطه ۱۴، N'<sub>x</sub> و N'<sub>y</sub> نیروهای درون صفحه‌ای گریز از مرکز هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$N'_x = \int_x^a I_0 \Omega^2 (R + x) dx \quad (15)$$

$$N'_y = \int_y^{\pm b/2} I_0 \Omega^2 y dy \quad (16)$$

که ممان اینرسی دورانی در این روابط نیز بدین صورت بیان می‌شود:

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (1, z, z^2) dz \quad (17)$$

## ۲-۲. روابط حاکم بر وصله پیزوالکتریک

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^p = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^p - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{32} \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{24} & 0 & 0 \\ 0 & e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^p \quad (20)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix}^p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^p + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\epsilon}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^p \quad (21)$$

$$\bar{C}_{33} = \frac{\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}}{2}$$

$$\bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{e_{33} C_{13}}{C_{33}}$$

$$\bar{e}_{32} = e_{32} - \frac{e_{33} C_{23}}{C_{33}}$$

(۲۳)

که ثوابت کاهیده چنین تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \\ \bar{C}_{22} &= C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} \\ \bar{C}_{12} &= C_{12} - \frac{C_{13} C_{23}}{C_{33}} \end{aligned} \quad (22)$$

$$E_i = -\nabla\phi ; i = x, y, z \quad (24)$$

پیزوالکتریکها با توجه به اینکه در حسگرها و یا عملگرها مورد استفاده قرار می‌گیرند، دارای تابع پتانسیل متفاوتی هستند:

$$\bar{\epsilon}_{33} = \epsilon_{33} + \frac{e_{33}^2}{C_{33}}$$

میدان الکتریکی در هر راستا از گرادیان تابع توزیع پتانسیل الکتریکی در آن راستا حاصل می‌شود. اگر  $\phi(x, y, z, t)$  تابع توزیع پتانسیل در پیزوالکتریک باشد، میدان الکتریکی چنین می‌شود:

مدار بسته:

$$@ z = \frac{h}{2} : \phi = 0$$

$$@ z = \frac{h}{2} + h_p : \phi = V_0 \quad (25)$$

$$@ z = \frac{h}{2} + h_p : D_z = 0$$

$$\phi(x, y, z, t) = \left[ 1 - \left( \frac{z - \frac{h}{2} - \frac{h_p}{2}}{\frac{h_p}{2}} \right)^2 + \frac{V_0}{h_p} \left( z - \frac{h}{2} \right) \right] \times \varphi(x, y, t) \Gamma(x, y) \quad (26)$$

مدار باز:

$$@ z = \frac{h}{2} : \phi = 0$$

$$@ z = \frac{h}{2} + h_p : D_z = 0 \quad (27)$$

$$\phi(x, y, z, t) = \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{z - \frac{h}{2} - \frac{h_p}{2}}{\frac{h_p}{2}} \right)^2 + \frac{2}{h_p} (2z - h) \right] \times \varphi(x, y, t) + \frac{z - \frac{h}{2}}{\epsilon_{33}} \times [e_{31} \frac{\partial u_0}{\partial x} + e_{32} \frac{\partial v_0}{\partial y}] \right\} \times \Gamma(x, y) \quad (28)$$

بالایی جابه‌جایی الکتریکی در راستای ضخامت برابر صفر است؛ در نتیجه در این سطح ولتاژ به‌عنوان سیگنال خروجی حسگر وجود دارد.

از طرفی به این دلیل که وصله از نظر اندازه با ورق یکی نیست و فقط در برخی نواحی که وصله وجود دارد روابط مکانیکی و الکتریکی وابسته به پیزوالکتریک

برای استفاده در عملگرها توزیع پتانسیل در صفحه پایین پیزوالکتریک که به ورق متصل است بایستی صفر باشد و صفحه بالایی به‌منظور اعمال ولتاژ دارای مقدار  $V_0$  و در حالت خاص دارای مقدار صفر است. به این حالت، مدار بسته یا اتصال کوتاه می‌گویند. در حسگرها، صفحه پایینی دارای توزیع پتانسیل صفر و در صفحه

صدق می‌کند. بایستی برای اعمال اصل برهم نهی، از تابع هویساید دو بعدی  $\Gamma(x, y)$  استفاده شود:

$$\Gamma(x, y) = [H(x - x_1) - H(x - x_2)] \times [H(y - y_1) - H(y - y_2)] \quad (29)$$

که  $H$  تابع هویساید یک بعدی و  $x_i, y_i ; i = 1, 2$  مختصات لبه‌های وصله مطابق شکل ۱ است. این تابع در توزیع پتانسیل، بردار کرنش‌ها و ممان اینرسی دورانی وصله ضرب شده تا اعمال اصل برهم نهی امکان‌پذیر گردد. به‌طور مشابه با انتگرال‌گیری از

تنش‌ها و چگالی وصله در راستای ضخامت آن یعنی از  $(h/2, h/2+h_p)$  منتجه‌های نیرو و ممان و ممان اینرسی دورانی برای پیزوالکتریک حاصل می‌شود. با محاسبه انرژی جنبشی، کرنشی و پتانسیل ناشی از نیروهای گریز از مرکز برای وصله طبق روابط ۱۰ تا ۱۷ و جمع آنها با انرژی‌های ورق، انرژی کل سیستم حاصل می‌شود که با قرارگیری در رابطه ۹ یعنی اصل همپلتون و اعمال اصل حساب تغییرات پنج معادله حرکت به‌دست می‌آید. این پنج معادله برای کل سیستم شامل ورق و وصله چنین می‌شود:

$$\frac{\partial N_x^{sys}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{sys}}{\partial y} + I_0^{sys} \times \left( \Omega^2(u_0 + R + x) + 2\Omega \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) + I_1^{sys} \left( \Omega^2 \beta_x - \Omega \frac{\partial \beta_y}{\partial t} - \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial N_y^{sys}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^{sys}}{\partial x} + I_0^{sys} \times \left( \Omega^2(v_0 + y) - 2\Omega \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) + I_1^{sys} \left( \Omega^2 \beta_y - 2\Omega \frac{\partial \beta_x}{\partial t} - \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial T_y^{sys}}{\partial y} + \frac{\partial T_x^{sys}}{\partial x} + N_x'^{sys} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{d}{dx} (N_x'^{sys}) \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_y'^{sys} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{d}{dy} (N_y'^{sys}) \frac{\partial w_0}{\partial y} + q(x, y, t) - I_0^{sys} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial M_x^{sys}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^{sys}}{\partial y} - T_x^{sys} + I_1^{sys} \times \left( \Omega^2(u_0 + R + x) + 2\Omega \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) + I_2^{sys} \left( \Omega^2 \beta_x + 2\Omega \frac{\partial \beta_y}{\partial t} - \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial M_y^{sys}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^{sys}}{\partial x} - T_y^{sys} + I_1^{sys} \times \left( \Omega^2(v_0 + y) - 2\Omega \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) + I_2^{sys} \left( \Omega^2 \beta_y - 2\Omega \frac{\partial \beta_x}{\partial t} - \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (34)$$

که در این روابط، بالا نویسی SYS مربوط به سیستم است و به صورت روابط زیر قابل بیان هستند:

$$X_i^{sys} = X_i^{plate} + X_i^{piezo} \Gamma(x, y) , \quad X = N, M , \quad i = x, y, xy \quad (35)$$

$$T_i^{sys} = T_i^{plate} + T_i^{piezo} \Gamma(x, y) , \quad i = x, y \quad (36)$$

$$I_i^{sys} = I_i^{plate} + I_i^{piezo} \Gamma(x, y) , \quad i = 0, 1, 2 \quad (37)$$

$$N_i'^{sys} = N_i'^{plate} + N_i'^{piezo} , \quad i = x, y \quad (38)$$

$x$  و  $y$  ظاهر می‌شود که همان تابع دلتای دیراک  $\delta$  است.

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = [\delta(x - x_1) - \delta(x - x_2)] \times \quad (40)$$

$$[H(y - y_1) - H(y - y_2)]$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial y} = [H(x - x_1) - H(x - x_2)] \times \quad (41)$$

$$[\delta(y - y_1) - \delta(y - y_2)]$$

### ۲-۳. شرایط مرزی یکسرگیردار

ورق به صورت یکسرگیردار در نظر گرفته شده که سرگیردار آن در سمت هاب قرار گرفته و سه لبه دیگر ورق آزاد است. شرط مرزی گیردار بدان معنی است که تمامی درجات آزادی آن لبه گرفته شده باشد و شرط مرزی آزاد یعنی هیچ نیرو و گشتاوری روی لبه وارد نشده و صفر است. پس به صورت ریاضی خواهیم داشت:

$$@ x = 0 : \quad (42)$$

$$u_0 = v_0 = w_0 = \beta_x = \beta_y = 0$$

$$@ x = a :$$

$$N_x^{sys} = 0, N_{xy}^{sys} = 0 \quad (43)$$

$$T_x^{sys} + N_x'^{sys} \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$$

$$M_x^{sys} = 0, M_{xy}^{sys} = 0$$

$$@ y = \pm \frac{b}{2} : \quad (44)$$

$$N_y^{sys} = 0, N_{xy}^{sys} = 0$$

لازم به ذکر است که در اثر چرخش و کشش در وصله، کرنش حاصل می‌شود که نتیجه آن ایجاد ولتاژ یا پیش بار الکتریکی در وصله است. با توجه به ابعاد کم وصله و فرض اتصال کامل وصله به ورق، کشش در وصله توسط نیروهای درون صفحه‌ای گریز از مرکز کم و در نتیجه کرنش و به دنبال آن ولتاژ بسیار کمی ایجاد شده که از آن صرف نظر می‌شود.

از طرفی تمامی متغیرها در معادلات حرکت، بایستی معادله ماکسول را ارضا نماید. پس دیورژانس چگالی شار الکتریکی در هر نقطه‌ای از وصله باید برابر با صفر باشد [۳۴]:

$$\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \left( \frac{\partial}{\partial x} (D_x \Gamma(x, y)) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} (D_y \Gamma(x, y)) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} (D_z \Gamma(x, y)) \right) dz = 0 \quad (39)$$

پس سیستم دارای شش معادله کوپل الکترومکانیکی است که بایستی به طور هم‌زمان حل شوند. لازم به ذکر است با توجه به روابط ۳۰ الی ۳۴ و رابطه ۳۹ در معادلات فوق مشتق تابع هویساید نسبت به دو راستای

که  $\begin{cases} i = 1: N_x \\ j = 1: N_y \end{cases}$  در نظر گرفته شده است. در این روابط ضرایب وزنی  $Hx$  و  $Hy$  و همچنین توزیع نقاط از اهمیت بالایی برخوردار است. برای محاسبه ضرایب وزنی مرتبه اول در هر راستا، از توابع لاگرانژی، مراتب بالاتر از رابطه بازگشتی و برای توزیع نقاط شبکه از رابطه چبیشف-گوس-لوباتو<sup>۲۷</sup> استفاده می‌شود. برای ضریب وزنی  $Hx$  و توزیع نقاط، روابط به صورت زیر است، ضریب وزنی  $Hy$  نیز به طور مشابه قابل محاسبه است:

$$Hx_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^{N_x} (x_i - x_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^{N_x} (x_j - x_k)} & i \neq j \\ 1 & i, j = 1: N_x \end{cases} \quad (48)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1, k \neq i}^{N_x} \frac{1}{x_i - x_k} & i = j \\ i, j = 1: N_x \end{cases} \quad (49)$$

$$[Hx^{(r)}] = [Hx^{(1)}][Hx^{(r-1)}] \quad (49)$$

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N_x-1} \pi \right) \right) \\ y = \frac{b}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{j-1}{N_y-1} \pi \right) \right) - \frac{b}{2} \end{cases} \quad (50)$$

#### ۴. پیاده سازی روش عددی

به منظور گسسته سازی با اعمال روش GDQ بر معادلات حاکم، ابتدا بایستی ترم‌های حاوی زمان را از معادلات حذف کرد. بدین منظور ابتدا پاسخ‌ها را به صورت تابعی از  $x$  و  $y$  در تابعی از زمان به صورت هارمونیک در نظر گرفته و با جای گذاری در معادلات ترم‌های زمانی حذف می‌شوند.

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= U(x, y)e^{i\omega t} \\ v_0(x, y, t) &= V(x, y)e^{i\omega t} \\ w_0(x, y, t) &= W(x, y)e^{i\omega t} \\ \beta_x(x, y, t) &= Bx(x, y)e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} T_y^{sys} + N_y^{sys} \frac{\partial w_0}{\partial y} &= 0 \\ M_y^{sys} &= 0, M_{xy}^{sys} = 0 \end{aligned}$$

#### ۳. روش حل عددی

روش مربعات دیفرانسیلی یک روش حل عددی ساده، سریع و دقیق است که برای مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی در مهندسی مطرح شده است. این روش می‌تواند جایگزین مناسبی برای روش‌های عددی المان محدود و تفاضل محدود باشد و قابلیت حل معادلات دیفرانسیل با درجات بالاتر را نیز دارد. در این روش ناحیه حل شبکه بندی شده و مقدار مشتق تابع در هر گره از شبکه، نسبت به یک راستای مشخص، به صورت مجموع خطی وزن دار از مقادیر تابع در نقاط آن راستا، بیان می‌شود. برای بیان مطلب به صورت ریاضی تابع  $\psi = \psi(x, y)$  را در نظر بگیرید که در ناحیه مستطیل شکلی قرار گرفته است. اگر  $N_x$  و  $N_y$  به ترتیب تعداد گره در راستای  $x$  و  $y$  باشند، مشتق جزئی از مرتبه  $r$  تابع نسبت به  $x$  و مرتبه  $s$  نسبت به  $y$ ، در هر نقطه  $x = x_i$  و  $y = y_j$  بدین صورت می‌نویسیم [۳۵]:

$$\frac{\partial^r \psi}{\partial x^r} (x_i) = \sum_{k=1}^{N_x} Hx_{ik}^{(r)} \psi(x_k, y_j) \quad (45)$$

$$\frac{\partial^s \psi}{\partial y^s} (y_j) = \sum_{l=1}^{N_y} Hy_{jl}^{(s)} \psi(x_i, y_l) \quad (46)$$

همچنین برای مشتق ترکیبی از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial^{(r+s)} \psi}{\partial x^r \partial y^s} (x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{N_x} Hx_{ik}^{(r)} \sum_{l=1}^{N_y} Hy_{jl}^{(s)} \psi(x_k, y_l) \quad (47)$$

به گریز از مرکز، کوریولیس و اینرسی و  $\omega$  فرکانس طبیعی زاویه‌ای سیستم است که با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب حاصل می‌شود. به دلیل درنظر گرفتن توزیع نقاط چبیشف-گوس-لوباتو و غیریکنواختی فاصله گره‌ها، تابع دلتا در نرم‌افزار متلب قادر به شناسایی مکان وصله نخواهد بود و پیاده‌سازی روش GDQ نیز امکان‌پذیر نیست. از این رو بایستی از تقریب تابع دلتا استفاده کرد [۳۶]. توابع متعددی برای تقریب تابع دلتا بیان شده است. تابع پیشنهادی بدین صورت است:

$$\delta(x - x_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4n}} \quad (55)$$

$n \rightarrow 0$

که به‌طور مشابه می‌توان تابع دلتای دیراک در راستای  $y$  را نیز نوشت.

## ۵. نتایج عددی

### ۵-۱. جنس ورق و وصله

جنس ورق آلومینیوم و پیزوالکتریک PZT-5H درنظر گرفته شده است. خواص مکانیکی آلومینیوم در جدول ۱ و خواص مکانیکی-الکتریکی وصله در روابط ۴۷ و ۴۸ ارائه شده است [۳۷].

جدول ۱. جنس و خواص مکانیکی ورق

| ضریب         | مدول یانگ | چگالی             | ماده      |
|--------------|-----------|-------------------|-----------|
| پواسون $\nu$ | $E$       | $\rho$            |           |
| -            | GPa       | kg/m <sup>3</sup> |           |
| ۰/۳۳         | ۶۹        | ۲۷۰۰              | آلومینیوم |

خواص مکانیکی-الکتریکی کاهش یافته PZT-5H:

$$\rho_p = 7500 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$$

$$\beta_y(x, y, t) = B y(x, y) e^{i\omega t}$$

$$\varphi(x, y, t) = \Phi(x, y) e^{i\omega t}$$

با درنظر گرفتن  $N_x = N_y = N$ ، و اعمال روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته ماتریس‌های جرم اینرسی، گریز از مرکز و ژيروسکوپ و ماتریس سفتی کل محاسبه می‌شوند که در پیوست قابل‌مشاهده هستند. بعد از ساخت ماتریس‌های کل بایستی شرایط مرزی هم اعمال شود. معادلات بر روی گره‌های داخلی یعنی  $i, j = 2, \dots, N-1$  و روی گره‌های مرزی، شرایط مرزی مسئله اعمال می‌شود. به‌منظور دستیابی به مقادیر ویژه سیستم یا همان فرکانس‌های طبیعی، کل دامنه محاسباتی به دو قسمت تقسیم می‌شود. بخش اول شامل درجات آزادی مربوط به گره‌های مرزی که با اندیس  $b$  و بخش دوم درجات آزادی مربوط به گره‌های داخلی دامنه محاسباتی که با اندیس  $d$  نمایش داده می‌شوند.

$$\{b\} \quad (52)$$

$$= \{ \{U_b\} \{V_b\} \{W_b\} \{Bx_b\} \{By_b\} \}^T$$

$$\{d\} \quad (53)$$

$$= \{ \{U_d\} \{V_d\} \{W_d\} \{Bx_d\} \{By_d\} \{ \phi \} \}^T$$

معادله فرکانسی برای شش معادله به فرم ماتریسی زیر خواهد بود:

$$\left( [K_{dd} - K_{db} K_{bb}^{-1} K_{bd}] \right. \\ \left. + [M_{centrifugal_{dd}}] \right. \\ \left. + i\omega [M_{coriolis_{dd}}] \right. \\ \left. - \omega^2 [M_{inertia_{dd}}] \right) \{d\} = \{0\} \quad (54)$$

در این رابطه  $K_{dd} - K_{db} K_{bb}^{-1} K_{bd}$  ماتریس سفتی سیستم با اعمال شرایط مرزی،  $M_{centrifugal_{dd}}$ ،  $M_{coriolis_{dd}}$  و  $M_{inertia_{dd}}$  ماتریس‌های جرم مربوط

که ارجحیت تئوری‌های ورق را نسبت به تئوری تیر بیان می‌کنند.

برای بررسی این موضوع هندسه شکل ۱ بدون وصله پیزوالکتریک را در نظر گرفته که مشخصات هندسی در جدول ۲ همگی برحسب متر مشخص شده است. این مقادیر برای بیشترین مشابهت به ابعاد پره بالگرد یک تا دو نفره در نظر گرفته شده‌اند.

مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس به صورت المان‌های Beam، Shell و Solid صورت گرفته است. به منظور دقت بیشتر، برای المان تیر از B32 استفاده شده که براساس تئوری تیر تیموشنکو و با در نظر گرفتن تغییر شکل برشی فرمول‌بندی شده و یک المان سه‌بعدی مرتبه دو است. المان Shell نیز به صورت SR8 در نظر گرفته شده که طبق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مناسب ورق‌های ضخیم فرمول‌بندی شده و یک المان مرتبه دو هشت گره‌ای است. برای المان Solid نیز C3D20 که یک المان مکعبی مرتبه دوم 20 گره‌ای است انتخاب شد.

جدول ۲. مشخصات هندسی مدل بدون وصله در ابعاد پره بالگرد

| $h$ | $R$ | $b$ | $a$ |
|-----|-----|-----|-----|
| ۰/۱ | ۰/۲ | ۰/۳ | ۳   |

به منظور بررسی هم‌گرایی حل در نرم‌افزار آباکوس، هندسه مذکور برای هر سه المان در نظر گرفته شده که دارای سرعت چرخش ۲۰ رادیان بر ثانیه است.

جدول ۳. بررسی هم‌گرایی سه فرکانس طبیعی اول برای المان تیر در نرم‌افزار آباکوس

| المان تیر |
|-----------|
|-----------|

$$C = \begin{bmatrix} 126 & 79.5 & 84 & 0 & 0 & 0 \\ 79.5 & 126 & 84 & 0 & 0 & 0 \\ 84 & 84 & 117 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 23.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ -6.5 & -6.5 & 23.3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 15.03 & 0 & 0 \\ 0 & 15.03 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} \times 10^{-9}$$

## ۵-۲. مقایسه تیر و ورق در بحث چرخان

حل مسائل گوناگون دینامیکی در نرم‌افزار آباکوس از دقت و تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی برخوردار است از این رو در این پژوهش از نتایج این نرم‌افزار به منظور صحت‌سنجی معادلات و روش عددی، استفاده می‌شود. انتخاب المان مناسب با توجه به هندسه مسئله و سائز شبکه، به منظور دستیابی به کم‌ترین میزان اختلاف با داده‌های آزمایشگاهی نکته مهمی است که بایستی به آن توجه کرد. برای مدل‌سازی پره در بهترین و کامل‌ترین حالت المان solid که برای اجسام پیوسته کاربرد دارد، استفاده می‌شود.

برای ساده‌سازی و کاهش زمان حل می‌توان از دو المان Beam و Shell نیز استفاده کرد که به ترتیب از معادلات و تئوری‌های تیر و ورق تبعیت می‌کنند. همان‌طور که در بخش مقدمه گفته شد، افزایش سرعت چرخش، پیچیده شدن هندسه سطح مقطع مثل ایرفویل و کاهش نسبت منظری از جمله دلایلی هستند

| شماره<br>مود | تعداد المان‌ها |         | تفاضل<br>% |
|--------------|----------------|---------|------------|
|              | ۲۷             | ۲۹      |            |
| $f_1$ (Hz)   | ۹/۲۲۸۲۳        | ۹/۲۲۸۲۳ | ۰          |
| $f_2$ (Hz)   | ۲۷/۲۴۴۱        | ۲۷/۲۴۴۱ | ۰          |
| $f_3$ (Hz)   | ۵۷/۰۴۷۵        | ۵۷/۰۴۷۵ | ۰          |

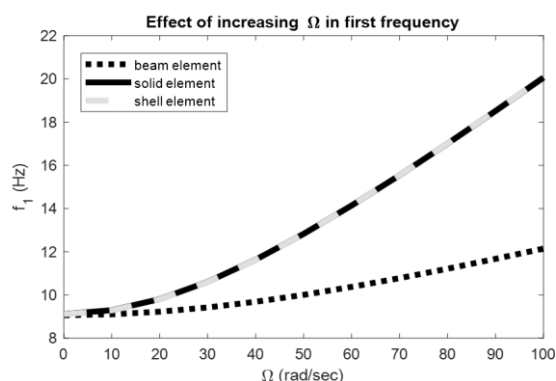
جدول ۴. بررسی هم‌گرایی سه فرکانس طبیعی اول برای المان پوسته در نرم‌افزار آباکوس

| شماره<br>مود | المان پوسته |         | تفاضل<br>% |
|--------------|-------------|---------|------------|
|              | سایز مش     | ۰/۰۰۸   |            |
| $f_1$ (Hz)   | ۹/۸۰۴۳۶     | ۹/۸۰۴۳۵ | ۰/۰۰۰۱     |
| $f_2$ (Hz)   | ۲۷/۰۹۱۳     | ۲۷/۰۹۱۱ | ۰/۰۰۰۷     |
| $f_3$ (Hz)   | ۵۷/۴۰۰۲     | ۵۷/۴۰۰۱ | ۰/۰۰۰۱     |

جدول ۵. بررسی هم‌گرایی سه فرکانس طبیعی اول برای المان solid در نرم‌افزار آباکوس

| شماره<br>مود | المان solid |         | تفاضل<br>% |
|--------------|-------------|---------|------------|
|              | سایز مش     | ۰/۰۳    |            |
| $f_1$ (Hz)   | ۹/۸۰۴۷۲     | ۹/۸۰۴۵۳ | ۰/۰۰۱۹     |
| $f_2$ (Hz)   | ۲۷/۰۹۶۵     | ۲۷/۰۹۳۹ | ۰/۰۰۹۵     |
| $f_3$ (Hz)   | ۵۷/۴۰۲۳     | ۵۷/۴۰۱۲ | ۰/۰۰۱۹     |

سرعت ۵۰ رادیان بر ثانیه مقدار فرکانس پایه به ترتیب ۰/۰۰۸۳، ۱۲/۸۲۷۳ و ۱۲/۸۲۹۴ برحسب هرتز است



شکل ۳. نمودار تأثیر سرعت چرخش در فرکانس طبیعی پایه برای سه المان Beam، Shell، و Solid در نرم‌افزار آباکوس

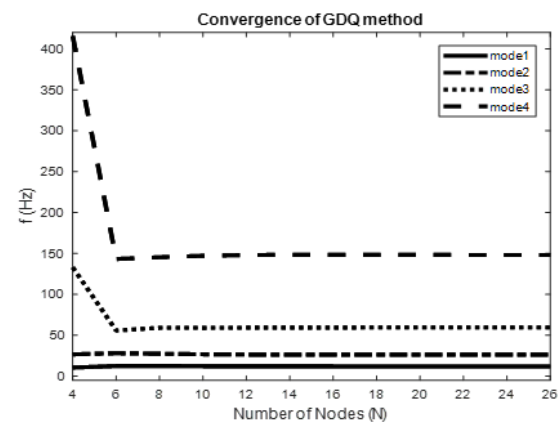
که به دنبال آن جابه‌جایی عرضی  $w_0$  در ارتعاشات اجباری را تحت تأثیر قرار می‌دهد. با توجه به تفاوت در هندسه مدل تیر و ورق، دلیل این امر در نظر گرفته نشدن نیروی درون صفحه‌ای گریز از مرکز در راستای  $y$  و اثر کوریولیس، در مدل تیر است. در نتیجه استفاده

هم‌گرایی برای المان تیر که هندسه به صورت یک بعدی مدل می‌شود، راحت‌تر صورت گرفته و در تعداد المان ۲۷ مقادیر کاملاً هم‌گرا هستند. در مورد المان‌های پوسته و Solid، چون به ترتیب به صورت هندسه‌های دو و سه بعدی مدل می‌شوند، حجم محاسباتی بالاتری دارند. با این حال مقادیر سه فرکانس طبیعی اول در این المان‌ها به ترتیب در سایز مش ۰/۰۰۹ و ۰/۰۲ با تفاضلهایی در مرتبه ده هزارم و هزارم درصد هم‌گرا هستند. نمودار فرکانس طبیعی پایه با افزایش سرعت چرخش برای هر سه المان، در شکل ۳ رسم شده است. در سرعت چرخش صفر مقدار فرکانس پایه برای المان‌های Beam، Shell، و Solid به ترتیب ۹/۰۶۵۵۷، ۹/۱۰۹۲۸، و ۹/۱۱۸۷۶ برحسب هرتز است که دارای اختلاف کمی با یکدیگر هستند و مدل تیر می‌تواند گزینه مناسبی برای مدل‌سازی باشد. ولی با افزایش سرعت چرخش شاهد فاصله مقدار فرکانس پایه در مدل تیر با دو مدل دیگر هستیم. به عنوان مثال در

از مدل ورق به جای تیر برای این سازه‌ها منطقی‌تر است.

### ۳-۵. ارتعاش آزاد ورق بدون وصله

هم‌گرایی تعداد گره‌ها در حل GDQ برای ورق یکسرگیردار چرخان با ابعاد جدول ۲ و با سرعت دورانی ۴۰۰ دور در دقیقه انجام شده که مقادیر چهار فرکانس طبیعی اول برحسب هر تیز برحسب تعداد گره‌ها در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل ۴. نمودار هم‌گرایی GDQ برای چهار فرکانس طبیعی اول در ورق چرخان بدون وصله

مقادیر فرکانس طبیعی از تعداد گره ۲۲ به بعد با اختلاف صدم درصد هم‌گرا هستند. به‌منظور بررسی

جدول ۶. مقایسه پنج فرکانس طبیعی بی‌بعد با آباکوس با مقادیر  $\delta = 1, \eta = 0.01, \mu = 0$

| شماره مود | آباکوس   | پژوهش حاضر | تفاضل % |
|-----------|----------|------------|---------|
| ۱         | ۳/۶۳۰۷۳  | ۳/۶۳۰۶     | ۰/۰۰۴۲  |
| ۲         | ۸/۴۶۹۶   | ۸/۵۴۰۶     | ۰/۸۳۷۶  |
| ۱         | ۲۱/۲۴۰۸۲ | ۲۱/۲۵۴۶    | ۰/۰۶۴۸  |
| ۴         | ۲۷/۱۰۸۷  | ۲۷/۲۰۱۲    | ۰/۳۴۱۱  |
| ۵         | ۳۰/۶۱۷۸  | ۳۰/۶۱۳۷    | ۰/۰۱۳۴  |
| ۲         | ۴/۰۹۳۷   | ۴/۰۹۴۲     | ۰/۰۱۰۳  |

صحت روش و معادلات، در جدول ۶، پنج فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق مستطیلی یکسرگیردار با نرم‌افزار آباکوس و در جدول ۷ همین مقادیر با مقالات مقایسه و صحت‌سنجی شده است. پارامترهای بی‌بعدی که مورد استفاده قرار گرفته‌اند عبارتند از:

$$\delta = \frac{a}{b}; \mu = \frac{R}{a}; \eta = \frac{h}{a} \quad (58)$$

$$\lambda = \Omega \left( \frac{\rho h a^4}{D_p} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (59)$$

$$D_p = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (60)$$

$$\bar{\omega} = \omega \left( \frac{\rho h a^4}{D_p} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (61)$$

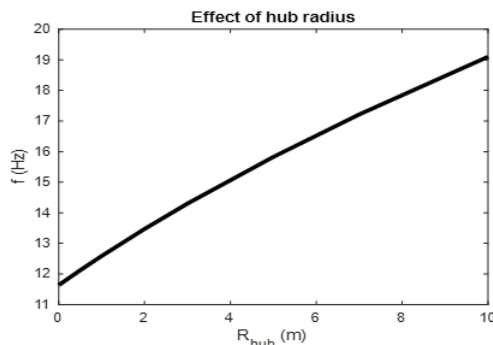
$\delta$  نسبت منظری،  $\mu$  نسبت هاب،  $\lambda$  سرعت دورانی بی‌بعد و  $\bar{\omega}$  فرکانس زاویه‌ای بی‌بعد است. مقدار تفاضل فرکانس‌های پژوهش حاضر با نرم‌افزار آباکوس و دیگر مقالات برحسب درصد بیان شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود اختلاف داده‌ها با آباکوس که به‌صورت المان Solid مدل شده، از مرتبه دهم درصد هستند و از دقت خوبی برخوردار است. داده‌های حاصل از مقالات به‌دلیل استفاده از تئوری‌های ساده‌تر ورق و فرضیات ساده‌سازی بیشتر، دارای اختلاف بیشتری هستند.

جدول ۷. اختلاف مقادیر پنج فرکانس طبیعی بی‌بعد پژوهش حاضر در جدول ۶ با مقالات

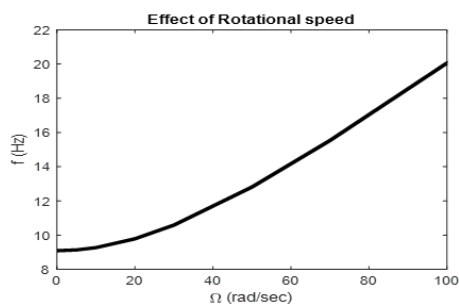
| شماره مود | Yoo and Kim [1] | تفاضل % | Ramu et al. [2] | تفاضل % |
|-----------|-----------------|---------|-----------------|---------|
| ۱         | ۳/۶۵۲۸۰         | ۰/۶۰۸   | ۳/۵۵۶۷          | ۲/۰۷۸   |
| ۲         | ۸/۶۴۵۹۰         | ۱/۲۱۸   | ۸/۶۲۰۵          | ۰/۹۲۷   |
| ۱         | ۲۱/۵۳۳۷۲        | ۱/۲۹۶   | ۲۱/۴۳۶۰         | ۰/۸۴۶   |
| ۴         | ۲۷/۳۸۴۷۸        | ۰/۶۷۰   | ۲۷/۲۷۱۸         | ۰/۲۹۵   |
| ۵         | ۳۱/۲۱۸۵۳        | ۱/۹۳۷   | ۳۱/۰۴۸۹         | ۱/۴۰۲   |
| ۲         | ۴/۱۱۳۱۲         | ۰/۴۵۹   | ۴/۱۱۹۰          | ۰/۶۰۲   |

|   |          |       |         |       |
|---|----------|-------|---------|-------|
| ۲ | ۹/۰۳۱۷   | ۰/۷۳۴ | ۹/۴۰۱۰  | ۳/۵۲۸ |
| ۳ | ۲۱/۹۶۶۵۴ | ۱/۱۶۹ | ۲۲/۱۹۱۳ | ۲/۱۷۱ |
| ۴ | ۲۷/۶۲۳۱۲ | ۰/۱۰۴ | ۲۸/۱۳۰۰ | ۱/۹۰۴ |
| ۵ | ۳۱/۵۸۵۴۴ | ۱/۷۳۸ | ۳۱/۶۷۴۶ | ۲/۰۱۴ |

|   |         |         |         |
|---|---------|---------|---------|
| ۲ | ۸/۸۲۴۹  | ۹/۰۶۹۳  | ۲/۷۶۹۷  |
| ۳ | ۲۱/۶۶۳۷ | ۲۱/۷۰۹۶ | ۰/۲۱۱۴۸ |
| ۴ | ۲۷/۳۵۳۶ | ۲۷/۵۹۴۳ | ۰/۸۷۹۶  |
| ۵ | ۳۰/۹۷۶۴ | ۳۱/۰۴۶۵ | ۰/۱۹۴۰  |



شکل ۷. نمودار تغییرات فرکانس پایه با شعاع هاب



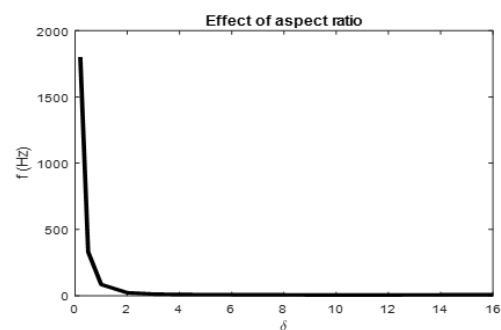
شکل ۸. نمودار تغییرات فرکانس پایه با سرعت چرخش

همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش نسبت منظری باعث کاهش سفتی و کاهش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود. افزایش ضخامت ورق نیز سفتی خمشی ورق را افزایش داده که در نتیجه آن فرکانس طبیعی نیز افزایش پیدا می‌کند. افزایش سرعت چرخش و شعاع هاب نیز به دلیل افزایش در نیروهای گریز از مرکز، کشیدگی و سفت شدن ورق، باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود.

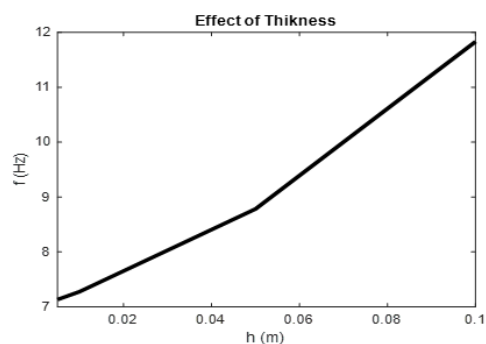
۴-۵. ارتعاشات آزاد ورق چرخان با وصله

پیزوالکتریک

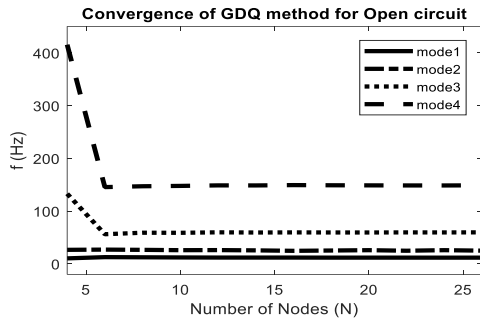
حال تأثیر چهار پارامتر نسبت منظری، ضخامت ورق، شعاع هاب و سرعت چرخش در فرکانس‌های طبیعی ورق برای ابعاد جدول ۲ و سرعت ۴۰۰ دور در دقیقه بررسی می‌شود. نمودار تغییر فرکانس پایه برحسب پارامترهای مذکور در شکل‌های ۵ تا ۸ نشان داده شده است.



شکل ۵. نمودار تغییرات فرکانس پایه با نسبت منظری



شکل ۶. نمودار تغییرات فرکانس پایه با ضخامت ورق



شکل ۱۰. نمودار هم‌گرایی چهار فرکانس اول ورق چرخان با وصله پیزوالکتریک در شرایط مدار باز

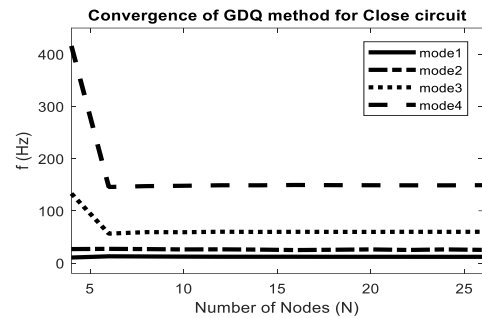
مقادیر فرکانس طبیعی در هر دو شرط الکتریکی مدار باز و بسته با  $V_0 = 0$  که به آن اتصال کوتاه گفته می‌شود، در تعداد گره ۲۴ با اختلاف دهم درصد هم‌گرا هستند.

صحت‌سنجی با نرم‌افزار آباکوس با مشخصات مذکور نیز در هر دو حالت در جدول‌های ۸ و ۹ گزارش شده است.

جدول ۹. صحت‌سنجی ده فرکانس طبیعی اول برحسب هرتز برای ورق با وصله در شرایط مدار باز

| شماره مود     | آباکوس  | پژوهش حاضر | تفاضل % |
|---------------|---------|------------|---------|
| $f_1$ (Hz)    | ۱۱/۸۷۲۸ | ۱۱/۸۹۴     | ۰/۱۷    |
| $f_2$ (Hz)    | ۲۷/۳۱۱۱ | ۲۷/۱۴۴     | ۰/۶۱    |
| $f_3$ (Hz)    | ۵۹/۶۱۰۳ | ۵۹/۸۳۷     | ۰/۳۸    |
| $f_4$ (Hz)    | ۱۴۸/۱۱۲ | ۱۴۹/۲۲۹    | ۰/۷۵    |
| $f_5$ (Hz)    | ۱۶۰/۷۹۵ | ۱۶۱/۴۰۲    | ۰/۳۷    |
| $f_6$ (Hz)    | ۱۶۳/۰۸۵ | ۱۶۱/۹۷۸    | ۰/۶۷    |
| $f_7$ (Hz)    | ۳۰۹/۱۵۶ | ۳۱۱/۰۰۹    | ۰/۵۹    |
| $f_8$ (Hz)    | ۴۲۲/۱۹۴ | ۴۲۲/۳۲۷    | ۰/۰۳    |
| $f_9$ (Hz)    | ۴۲۷/۹۶۵ | ۴۲۶/۵۲۸    | ۰/۳۳    |
| $f_{10}$ (Hz) | ۴۴۵/۲۲۱ | ۴۴۸/۱۱۸    | ۰/۶۵    |

ابتدا هم‌گرایی چهار فرکانس اول ورق برحسب هرتز در ابعاد جدول ۲ که یک وصله مربعی با ابعاد  $20 \times 20$  با ضخامت ۱ و همگی برحسب سانتی‌متر به آن کوپل شده، بررسی می‌شود. مختصات مرکز وصله در (۰/۱ و ۰) قرار دارد و سرعت چرخش ۴۰۰ دور در دقیقه در نظر گرفته شده است. نمودار هم‌گرایی در دو شرایط مدار بسته و باز در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان داده شده است.

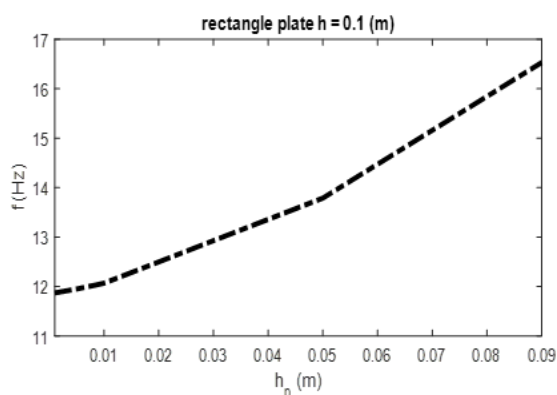


شکل ۹. نمودار هم‌گرایی چهار فرکانس اول ورق چرخان با وصله پیزوالکتریک در شرایط اتصال کوتاه

جدول ۸. صحت‌سنجی ده فرکانس طبیعی اول برحسب هرتز برای ورق با وصله در شرایط اتصال کوتاه

| شماره مود     | آباکوس  | پژوهش حاضر | تفاضل % |
|---------------|---------|------------|---------|
| $f_1$ (Hz)    | ۱۱/۸۶۷۸ | ۱۱/۸۸۳     | ۰/۱۲    |
| $f_2$ (Hz)    | ۲۷/۳۱۱۱ | ۲۷/۱۰۷     | ۰/۷۴    |
| $f_3$ (Hz)    | ۵۹/۵۸۳۱ | ۵۹/۷۶۹     | ۰/۳۱    |
| $f_4$ (Hz)    | ۱۴۸/۱۱۲ | ۱۴۸/۹۴۵    | ۰/۵۶    |
| $f_5$ (Hz)    | ۱۶۰/۷۳۳ | ۱۶۱/۲۱۶    | ۰/۳۰    |
| $f_6$ (Hz)    | ۱۶۳/۰۸۵ | ۱۶۱/۹۴۷    | ۰/۶۹    |
| $f_7$ (Hz)    | ۳۰۹/۰۶۳ | ۳۱۰/۱۵۶    | ۰/۳۵    |
| $f_8$ (Hz)    | ۴۲۲/۱۵۵ | ۴۲۲/۱۰۷    | ۰/۰۱    |
| $f_9$ (Hz)    | ۴۲۷/۹۶۵ | ۴۲۶/۴۱۲    | ۰/۳۶    |
| $f_{10}$ (Hz) | ۴۴۵/۲۲  | ۴۴۷/۲۵۸    | ۰/۴۵    |

گزارش شده که به دلیل ابعاد کم وصله این تأثیر بسیار ناچیز است. اما پارامتر تأثیرگذار وصله در فرکانس‌های طبیعی سیستم، ضخامت آن است. در شکل ۱۱ نمودار تغییرات فرکانس پایه برحسب ضخامت وصله نشان داده شده است. افزایش ضخامت وصله مانند ضخامت ورق، باعث افزایش سفتی خمشی کل و در نتیجه افزایش فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌شود.



شکل ۱۱. نمودار تغییرات فرکانس پایه ورق و وصله با ضخامت وصله

به منظور شناخت بیشتر ورق چرخان با وصله پیزوالکتریک کوپل شده، ورق و وصله با ابعاد ذکر شده برحسب متر در نظر گرفته و پنج فرکانس طبیعی اول به‌ازاء متغیرهای ضخامت ورق، وصله و سرعت چرخش در دو حالت اتصال کوتاه و مدار باز استخراج گردیده است.

جدول ۱۲. پنج فرکانس طبیعی اول ورق با وصله در شرایط مدار باز و در سرعت صفر

| شماره<br>مود | $h = 0.05 \text{ m}$ |              | $h = 0.1 \text{ m}$ |              |
|--------------|----------------------|--------------|---------------------|--------------|
|              | $h_p = 0.001$        | $h_p = 0.01$ | $h_p = 0.001$       | $h_p = 0.01$ |
|              | m                    | m            | m                   | m            |
| $f_1$ (Hz)   | ۴/۵۸۱                | ۴/۶۲۴        | ۹/۱۲۸               | ۹/۱۶۱        |

همان‌طور که مشاهده می‌شود روابط وصله پیزوالکتریک از صحت و دقت قابل‌قبولی برخوردار است. در مورد تفاوت کم مقدار فرکانس در دو حالت مدار باز که در حسگرها و اتصال کوتاه در عملگرها مورد استفاده قرار می‌گیرد می‌توان گفت، در شرایط الکتریکی مدار باز سطح بالایی لایه پیزوالکتریک دارای جابه‌جایی الکتریکی صفر است تا کرنش‌های حاصل از ارتعاش به انرژی الکتریکی تبدیل شوند. از این‌رو انرژی حاصل از ارتعاش از سطح بالایی توانایی خارج شدن ندارد پس رفتاری مشابه با بستن درجات آزادی سیستم دارد که نتیجه آن افزایش فرکانس‌های طبیعی نسبت به حالت مدار بسته است. برای بررسی تأثیر وصله در مقدار فرکانس طبیعی سیستم، مقادیر سه فرکانس طبیعی در حالت مدار باز با ورق بدون وصله در جدول ۱۰

جدول ۱۰. مقادیر سه فرکانس طبیعی ورق چرخان با و بدون وصله برحسب هرترز

| شماره<br>مود | بدون وصله            |                     | با وصله              |                     |
|--------------|----------------------|---------------------|----------------------|---------------------|
|              | $h = 0.05 \text{ m}$ | $h = 0.1 \text{ m}$ | $h = 0.05 \text{ m}$ | $h = 0.1 \text{ m}$ |
| $f_1$ (Hz)   | ۸/۸۱۷۶               | ۱/۸۵۸۹<br>۱         | ۸/۸۵۹                | ۱۱/۸۹۴              |
| $f_2$ (Hz)   | ۲۶/۱۴۲۹              | ۲/۱۴۲۹<br>۶         | ۲۶/۴۳۷               | ۲۶/۵۲۷              |
| $f_3$ (Hz)   | ۳۳/۵۸۳۵              | ۵/۴۵۰۵<br>۹         | ۳۳/۹۸۸               | ۵۹/۸۳۷              |

جدول ۱۱. پنج فرکانس طبیعی اول ورق با وصله در شرایط اتصال کوتاه و در سرعت صفر

| شماره<br>مود | $h = 0.05 \text{ m}$ |              | $h = 0.1 \text{ m}$ |              |
|--------------|----------------------|--------------|---------------------|--------------|
|              | $h_p = 0.001$        | $h_p = 0.01$ | $h_p = 0.001$       | $h_p = 0.01$ |
|              | m                    | m            | m                   | m            |
| $f_1$ (Hz)   | ۴/۵۷۶                | ۴/۶۱۸        | ۹/۱۱۶               | ۹/۱۴۸        |

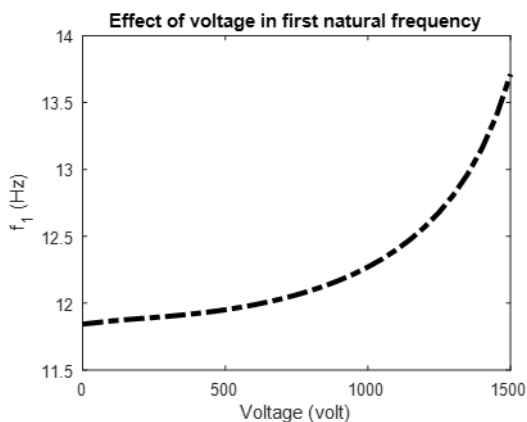
|            |        |        |         |         |
|------------|--------|--------|---------|---------|
| $f_2$ (Hz) | ۲۶/۹۶۷ | ۲۷/۰۰۶ | ۲۷/۰۱۵  | ۲۷/۱۰۱  |
| $f_3$ (Hz) | ۲۸/۵۹۹ | ۲۸/۸۳۴ | ۵۶/۸۲۱  | ۵۷/۱۵۲  |
| $f_4$ (Hz) | ۷۹/۹۹۵ | ۸۰/۶۹۸ | ۱۴۷/۷۶۹ | ۱۴۸/۸۱۷ |
| $f_5$ (Hz) | ۸۲/۴۲۱ | ۸۳/۶۲۸ | ۱۵۷/۸۴۵ | ۱۵۸/۷۷۸ |

جدول ۱۴. پنج فرکانس طبیعی اول ورق با وصله در شرایط مدار باز و در سرعت ۴۰۰ دور در دقیقه

| شماره<br>مود | $h = ۰/۰۵$ m       |                   | $h = ۰/۱$ m        |                   |
|--------------|--------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
|              | $h_p = ۰/۰۰۱$<br>m | $h_p = ۰/۰۱$<br>m | $h_p = ۰/۰۰۱$<br>m | $h_p = ۰/۰۱$<br>m |
| $f_1$ (Hz)   | ۸/۸۲۴              | ۸/۸۵۹             | ۱۱/۸۶۶             | ۱۱/۸۹۴            |
| $f_2$ (Hz)   | ۲۷/۰۰۷             | ۲۷/۰۳۱            | ۲۷/۱۳۲             | ۲۷/۱۴۴            |
| $f_3$ (Hz)   | ۳۳/۶۴۳             | ۳۳/۹۸۸            | ۵۹/۵۰۸             | ۵۹/۸۳۷            |
| $f_4$ (Hz)   | ۸۳/۲۴۷             | ۸۴/۳۵۳            | ۱۴۸/۱۸۵            | ۱۴۹/۲۲۹           |
| $f_5$ (Hz)   | ۸۵/۲۲۳             | ۸۶/۰۱۶            | ۱۶۰/۵۴۵            | ۱۶۱/۴۰۲           |

جدول ۱۶. پنج فرکانس طبیعی اول ورق با وصله در شرایط مدار باز و در سرعت ۵۰۰ دور در دقیقه

| شماره<br>مود | $h = ۰/۰۵$ m       |                   | $h = ۰/۱$ m        |                   |
|--------------|--------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
|              | $h_p = ۰/۰۰۱$<br>m | $h_p = ۰/۰۱$<br>m | $h_p = ۰/۰۰۱$<br>m | $h_p = ۰/۰۱$<br>m |
| $f_1$ (Hz)   | ۱۰/۴۳۲             | ۱۰/۴۵۶            | ۱۳/۱۳۷             | ۱۳/۱۷۳            |
| $f_2$ (Hz)   | ۲۷/۱۰۱             | ۲۷/۱۶۶            | ۲۷/۲۴۵             | ۲۷/۳۰۰            |
| $f_3$ (Hz)   | ۳۶/۱۶۹             | ۳۶/۴۵۰            | ۶۰/۹۶۷             | ۶۱/۲۹۵            |
| $f_4$ (Hz)   | ۸۳/۷۰۸             | ۸۴/۸۴۳            | ۱۴۸/۴۱۸            | ۱۴۹/۴۶۰           |
| $f_5$ (Hz)   | ۸۸/۰۱۲             | ۸۸/۷۷۰            | ۱۶۱/۸۴۸            | ۱۶۱/۶۱۲           |



شکل ۱۲. تاثیر ولتاژ اعمالی بر فرکانس طبیعی پایه

|            |        |        |         |         |
|------------|--------|--------|---------|---------|
| $f_2$ (Hz) | ۲۶/۸۸۶ | ۲۶/۹۷۹ | ۲۷/۰۰۷  | ۲۷/۰۹۴  |
| $f_3$ (Hz) | ۲۸/۵۸۱ | ۲۸/۸۸۱ | ۵۶/۸۰۲  | ۵۷/۰۸۶  |
| $f_4$ (Hz) | ۷۹/۹۵۰ | ۸۰/۶۶۲ | ۱۴۷/۷۴۳ | ۱۴۸/۵۳۳ |
| $f_5$ (Hz) | ۸۲/۳۹۸ | ۸۳/۳۶۰ | ۱۵۷/۸۰۱ | ۱۵۸/۵۲۱ |

جدول ۱۳. پنج فرکانس طبیعی اول ورق با وصله در شرایط اتصال کوتاه و در سرعت ۴۰۰ دور در دقیقه

| شماره<br>مود | $h = ۰/۰۵$ m       |                   | $h = ۰/۱$ m        |                   |
|--------------|--------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
|              | $h_p = ۰/۰۰۱$<br>m | $h_p = ۰/۰۱$<br>m | $h_p = ۰/۰۰۱$<br>m | $h_p = ۰/۰۱$<br>m |
| $f_1$ (Hz)   | ۸/۸۱۱              | ۸/۸۴۱             | ۱۱/۸۵۴             | ۱۱/۸۸۳            |
| $f_2$ (Hz)   | ۲۶/۹۷۱             | ۲۷/۰۰۸            | ۲۷/۰۱۱             | ۲۷/۱۰۷            |
| $f_3$ (Hz)   | ۳۳/۶۲۵             | ۳۳/۹۱۷            | ۵۹/۴۸۹             | ۵۹/۷۶۹            |
| $f_4$ (Hz)   | ۸۳/۲۲۴             | ۸۴/۱۷۷            | ۱۴۸/۱۵۸            | ۱۴۸/۹۴۵           |
| $f_5$ (Hz)   | ۸۵/۱۷۹             | ۸۵/۸۷۵            | ۱۶۰/۵۰۱            | ۱۶۱/۲۱۶           |

جدول ۱۵. پنج فرکانس طبیعی اول ورق با وصله در شرایط اتصال کوتاه و در سرعت ۵۰۰ دور در دقیقه

| شماره<br>مود | $h = ۰/۰۵$ m       |                   | $h = ۰/۱$ m        |                   |
|--------------|--------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
|              | $h_p = ۰/۰۰۱$<br>m | $h_p = ۰/۰۱$<br>m | $h_p = ۰/۰۰۱$<br>m | $h_p = ۰/۰۱$<br>m |
| $f_1$ (Hz)   | ۱۰/۴۲۹             | ۱۰/۴۴۹            | ۱۳/۱۳۵             | ۱۳/۱۶۳            |
| $f_2$ (Hz)   | ۲۷/۰۹۱             | ۲۷/۱۱۱            | ۲۷/۲۹۷             | ۲۷/۳۶۶            |
| $f_3$ (Hz)   | ۳۶/۱۵۱             | ۳۶/۴۴۲            | ۶۰/۹۴۹             | ۶۱/۲۲۸            |
| $f_4$ (Hz)   | ۸۳/۶۸۶             | ۸۴/۶۳۴            | ۱۴۸/۳۹۲            | ۱۴۹/۱۷۷           |
| $f_5$ (Hz)   | ۸۷/۹۶۹             | ۸۸/۶۵۸            | ۱۶۱/۸۶۰            | ۱۶۱/۵۵۷           |

در شکل ۱۲ تاثیر افزایش ولتاژ اعمالی بر فرکانس طبیعی پایه که در حالت مدار بسته اتفاق می افتد نشان داده شده است.

همان طور که مشاهده می شود، با افزایش ولتاژ فرکانس طبیعی پایه نیز افزایش می یابد که همان اثر عملگرها در فرکانس برای کم کردن دامنه ارتعاشات است. چون

هرچه فرکانس بالاتر باشد سیستم سفت تر و دامنه جابه‌جایی کمتر می‌شود.

## ۶. بحث و نتیجه‌گیری

در سازه‌های انعطاف‌پذیر چرخان که در این پژوهش پره یک بالگرد یک تا دو نفره بررسی شده است، به دلیل تأثیر نیروهای گریز از مرکز در دو راستا و همچنین ساده نبودن هندسه سطح مقطع بهتر است از تئوری‌های ورق به جای تیر استفاده شود. وجود وصله پیزوالکتریک به عنوان حسگر و یا عملگر به دلیل ابعاد کم تأثیر بسیار ناچیزی در مقادیر فرکانس طبیعی سیستم می‌گذارد با این وجود افزایش ضخامت آن، باعث افزایش قابل توجه فرکانس‌ها می‌شود. با اعمال ولتاژ و افزایش آن در عملگرها، فرکانس طبیعی پایه نیز افزایش یافته و موجب سفتی سیستم می‌شود که

## ۷. پیوست

ماتریس‌های کل بعد از اعمال روش عددی که ابعاد آنها  $6N^2 \times 6N^2$  و هر درایه از آنها  $N^2 \times N^2$  است به صورت روابط زیر قابل بیان هستند. لازم به ذکر است که هر درایه از ماتریس‌های جرم به صورت قطری است.

ماتریس جرم اینرسی:

$$M_{\text{inertia}} = \begin{bmatrix} M_{UU}^{\text{in}} & 0 & 0 & M_{UBx}^{\text{in}} & 0 & 0 \\ 0 & M_{VV}^{\text{in}} & 0 & 0 & M_{VBy}^{\text{in}} & 0 \\ 0 & 0 & M_{WW}^{\text{in}} & 0 & 0 & 0 \\ M_{UBx}^{\text{in}} & 0 & 0 & M_{BxBx}^{\text{in}} & 0 & 0 \\ 0 & M_{VBy}^{\text{in}} & 0 & 0 & M_{ByBy}^{\text{in}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e-20 \end{bmatrix} \quad (62)$$

این مورد باعث کاهش دامنه پاسخ ارتعاشات آزاد سیستم خواهد شد.

روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته با وجود وصله نیز قابل پیاده‌سازی بر معادلات سیستم بوده و از دقت قابل قبولی نیز برخوردار است. به منظور اعمال این روش بایستی از توابع تعریف شده دلتای دیراک استفاده نمود. یکی از دلایل میزان تفاوت کم داده‌ها در این روش برای این پژوهش می‌تواند همین مورد و قرار نگرفتن دقیق وصله در مختصات مورد نظر با توجه به توزیع گره‌ها باشد که می‌توان در پژوهش‌های آتی در جهت بهبود آن تلاش کرد. همچنین پیشنهاد می‌شود مواردی از قبیل سرعت چرخش متغیر، سطح مقطع با ضخامت متغیر یا ایرفویل، استفاده از مواد FGM برای ورق و  $MFC^{28}$  برای وصله پیزوالکتریک در نظر گرفته شود.

$$\begin{aligned}
M_{UU}^{\text{in}} &= M_{VV}^{\text{in}} = M_{WW}^{\text{in}} = -\left(I_0^{\text{plate}} + I_0^{\text{piezo}} \Gamma(x_i, y_j)\right) \\
M_{UBx}^{\text{in}} &= M_{VBy}^{\text{in}} = -I_1^{\text{piezo}} \Gamma(x_i, y_j) \\
M_{BxBx}^{\text{in}} &= M_{ByBy}^{\text{in}} = -\left(I_2^{\text{plate}} + I_2^{\text{piezo}} \Gamma(x_i, y_j)\right)
\end{aligned} \tag{63}$$

ماتریس جرم گریز از مرکز:

$$M_{\text{centrifugal}} = \begin{bmatrix} M_{UU}^{\text{cent}} & 0 & 0 & M_{UBx}^{\text{cent}} & 0 & 0 \\ 0 & M_{VV}^{\text{cent}} & 0 & 0 & M_{VBy}^{\text{cent}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{UBx}^{\text{cent}} & 0 & 0 & M_{BxBx}^{\text{cent}} & 0 & 0 \\ 0 & M_{VBy}^{\text{cent}} & 0 & 0 & M_{ByBy}^{\text{cent}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
M_{UU}^{\text{cent}} &= \Omega^2(1 + R + x_i) \left(I_0^{\text{plate}} + I_0^{\text{piezo}} \Gamma(x_i, y_j)\right) \\
M_{UBx}^{\text{cent}} &= M_{VBy}^{\text{cent}} = I_1^{\text{piezo}} \Omega^2 \Gamma(x_i, y_j) \\
M_{VV}^{\text{cent}} &= \Omega^2(1 + y_j) \left(I_0^{\text{plate}} + I_0^{\text{piezo}} \Gamma(x_i, y_j)\right) \\
M_{BxBx}^{\text{cent}} &= M_{ByBy}^{\text{cent}} = \Omega^2 \left(I_2^{\text{plate}} + I_2^{\text{piezo}} \Gamma(x_i, y_j)\right)
\end{aligned} \tag{65}$$

ماتریس کوریولیس:

$$M_{\text{coriolis}} = \begin{bmatrix} 0 & M_{UV}^{\text{cor}} & 0 & 0 & M_{UBy}^{\text{cor}} & 0 \\ -M_{UV}^{\text{cor}} & 0 & 0 & M_{VBx}^{\text{cor}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_{VBx}^{\text{cor}} & 0 & 0 & M_{BxBx}^{\text{cor}} & 0 \\ -M_{UBy}^{\text{cor}} & 0 & 0 & -M_{BxBx}^{\text{cor}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
M_{UV}^{\text{cor}} &= -2\Omega \left(I_0^{\text{plate}} + I_0^{\text{piezo}} \Gamma(x_i, y_j)\right) \\
M_{UBy}^{\text{cor}} &= -2I_1^{\text{piezo}} \Omega \Gamma(x_i, y_j) \\
M_{VBx}^{\text{cor}} &= 2\Omega I_1^{\text{piezo}} \Gamma(x_i, y_j)
\end{aligned} \tag{67}$$

$$M_{BxB_y}^{cor} = -2\Omega \left( I_2^{plate} + I_2^{piezo} \Gamma(x_i, y_j) \right)$$

ماتریس سفتی :

$$K_{global} = \begin{bmatrix} UU & UV & 0 & UBx & UBy & U\Phi \sim 0 \\ UV & VV & 0 & VBx & VBy & V\Phi \sim 0 \\ 0 & 0 & WW & WBx & WBy & W\Phi \\ UBx & VBx & WBx & BxBx & BxB_y & Bx\Phi \\ UBy & VBy & WBy & BxB_y & ByBy & By\Phi \\ 0 & 0 & W\Phi & Bx\Phi & By\Phi & \Phi\Phi \end{bmatrix} \quad (68)$$

لازم به ذکر است که در این جا درایه های ماتریس سفتی با در نظر گرفتن ضرایب  $U_{kj}$  و ... نوشته شده تا مکان ستون های ماتریس ضرایب مشخص شود. مقادیر درون ماتریس ها عبارات داخل کروشه هستند و روابط زیر برای شرایط الکتریکی مدار بسته نوشته شده است.

$$UU_{ij} = \left[ \left( A_{11}^{plate} + A_{11}^{piezo} \Gamma(x_i, y_j) \right) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(2)} + A_{11}^{piezo} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \right] U_{kj} + \left[ \left( A_{33}^{plate} + A_{33}^{piezo} \Gamma(x_i, y_j) \right) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(2)} + A_{33}^{piezo} \frac{\partial \Gamma}{\partial y}(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right] U_{il} \quad (69)$$

$$UV_{ij} = \left[ \left( A_{12}^{plate} + A_{33}^{plate} + \left( A_{12}^{piezo} + A_{33}^{piezo} \right) \Gamma(x_i, y_j) \right) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right] V_{kl} + \left[ A_{33}^{piezo} \frac{\partial \Gamma}{\partial y}(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \right] V_{kj} + \left[ A_{12}^{piezo} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right] V_{il} \quad (70)$$

$$UBx_{ij} = \left[ B_{11}^{piezo} \left( \Gamma(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(2)} + \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \right) \right] Bx_{kj} + \left[ B_{33}^{piezo} \left( \Gamma(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(2)} + \frac{\partial \Gamma}{\partial y}(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right) \right] Bx_{il} \quad (71)$$

$$UBy_{ij} = \left[ \left( \left( B_{12}^{piezo} + B_{33}^{piezo} \right) \Gamma(x_i, y_j) \right) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right] Bx_{kl} + \left[ B_{33}^{piezo} \frac{\partial \Gamma}{\partial y}(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \right] Bx_{kj} + \left[ B_{12}^{piezo} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right] Bx_{il} \quad (72)$$

$$U\Phi_{ij} = \left[ \bar{e}_{31}\mu_1\Gamma(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \right] \Phi_{kj} + \left[ \bar{e}_{31}\mu_1 \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(x_i, y_j) \right] \Phi_{ij} \quad (۷۳)$$

$$VV_{ij} = \left[ \left( A_{22}^{\text{plate}} + A_{22}^{\text{piezo}}\Gamma(x_i, y_j) \right) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(2)} + A_{22}^{\text{piezo}} \frac{\partial\Gamma}{\partial y}(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right] V_{il} \\ + \left[ \left( A_{33}^{\text{plate}} + A_{33}^{\text{piezo}}\Gamma(x_i, y_j) \right) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(2)} + A_{33}^{\text{piezo}} \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \right] V_{kj} \quad (۷۴)$$

$$VBx_{ij} = \left[ \left( \left( B_{12}^{\text{piezo}} + B_{33}^{\text{piezo}} \right) \Gamma(x_i, y_j) \right) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right] Bx_{kl} \\ + \left[ B_{12}^{\text{piezo}} \frac{\partial\Gamma}{\partial y}(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \right] Bx_{kj} + \left[ B_{33}^{\text{piezo}} \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right] Bx_{il} \quad (۷۵)$$

$$VBy_{ij} = \left[ B_{33}^{\text{piezo}} \left( \Gamma(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(2)} + \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \right) \right] By_{kj} \\ + \left[ B_{22}^{\text{piezo}} \left( \Gamma(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(2)} + \frac{\partial\Gamma}{\partial y}(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right) \right] By_{il} \quad (۷۶)$$

$$V\Phi_{ij} = \left[ \bar{e}_{32}\mu_1\Gamma(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right] \Phi_{il} + \left[ \bar{e}_{32}\mu_1 \frac{\partial\Gamma}{\partial y}(x_i, y_j) \right] \Phi_{ij} \quad (۷۷)$$

$$WBx_{ij} = \left[ \left( A_{44}^{\text{plate}} + A_{44}^{\text{piezo}}\Gamma(x_i, y_j) \right) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \right] Bx_{kj} + \left[ A_{44}^{\text{piezo}} \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(x_i, y_j) \right] Bx_{ij} \quad (۷۸)$$

$$WBy_{ij} = \left[ \left( A_{55}^{\text{plate}} + A_{55}^{\text{piezo}}\Gamma(x_i, y_j) \right) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right] By_{il} + \left[ A_{55}^{\text{piezo}} \frac{\partial\Gamma}{\partial y}(x_i, y_j) \right] By_{ij} \quad (۷۹)$$

$$WW_{ij} = \left[ \left( A_{44}^{\text{plate}} + A_{44}^{\text{piezo}}\Gamma(x_i, y_j) + N'_{xi}{}^{\text{sys}} \right) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(2)} + \frac{d}{dx}(N'_{xi}{}^{\text{sys}}) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \right. \\ \left. + A_{44}^{\text{piezo}} \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \right] W_{kj} \\ + \left[ \left( A_{55}^{\text{plate}} + A_{55}^{\text{piezo}}\Gamma(x_i, y_j) + N'_{yj}{}^{\text{sys}} \right) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(2)} + \frac{d}{dy}(N'_{yj}{}^{\text{sys}}) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right. \\ \left. + A_{55}^{\text{piezo}} \frac{\partial\Gamma}{\partial y}(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right] W_{il} \quad (۸۰)$$

$$W\Phi_{ij} = \left[ e_{24}\mu_2 \left( \Gamma(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(2)} + 2 \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \right) \right] \Phi_{kj} \quad (81)$$

$$+ \left[ e_{15}\mu_2 \left( \Gamma(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(2)} + 2 \frac{\partial \Gamma}{\partial y}(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right) \right] \Phi_{il}$$

$$BxBx_{ij} = \left[ \left( D_{11}^{plate} + D_{11}^{piezo} \Gamma(x_i, y_j) \right) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(2)} + D_{11}^{piezo} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \right] Bx_{kj} \quad (82)$$

$$+ \left[ \left( D_{33}^{plate} + D_{33}^{piezo} \Gamma(x_i, y_j) \right) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(2)} + D_{33}^{piezo} \frac{\partial \Gamma}{\partial y}(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right] Bx_{il} - \left[ A_{44}^{plate} + A_{44}^{piezo} \Gamma(x_i, y_j) \right] Bx_{ij}$$

$$BxB_{yij} = \left[ \left( D_{12}^{plate} + D_{33}^{plate} + \left( D_{12}^{piezo} + D_{33}^{piezo} \right) \Gamma(x_i, y_j) \right) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right] By_{kl} \quad (83)$$

$$+ \left[ D_{33}^{piezo} \frac{\partial \Gamma}{\partial y}(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \right] By_{kj} + \left[ D_{12}^{piezo} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right] By_{il}$$

$$Bx\Phi_{ij} = \left[ (\bar{e}_{31}\mu_3 - e_{24}\mu_2) \Gamma(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \right] \Phi_{kj} + \left[ (\bar{e}_{31}\mu_3 - e_{24}\mu_2) \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x_i, y_j) \right] \Phi_{ij} \quad (84)$$

$$ByBy_{ij} = \left[ \left( D_{22}^{plate} + D_{22}^{piezo} \Gamma(x_i, y_j) \right) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(2)} + D_{22}^{piezo} \frac{\partial \Gamma}{\partial y}(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right] By_{il} \quad (85)$$

$$+ \left[ \left( D_{33}^{plate} + D_{33}^{piezo} \Gamma(x_i, y_j) \right) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(2)} + D_{33}^{piezo} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \right] By_{kj} - \left[ A_{55}^{plate} + A_{55}^{piezo} \Gamma(x_i, y_j) \right] By_{ij}$$

$$By\Phi_{ij} = \left[ (\bar{e}_{32}\mu_3 - e_{15}\mu_2) \Gamma(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right] \Phi_{il} + \left[ (\bar{e}_{32}\mu_3 - e_{15}\mu_2) \frac{\partial \Gamma}{\partial y}(x_i, y_j) \right] \Phi_{ij} \quad (86)$$

$$\Phi\Phi_{ij} = \left[ -\epsilon_{11}\mu_2 \left( \Gamma(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(2)} + 2 \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x_i, y_j) \sum_{k=1}^N Hx_{ik}^{(1)} \right) \right] \Phi_{kj} \quad (87)$$

$$- \left[ \epsilon_{22}\mu_2 \left( \Gamma(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(2)} + 2 \frac{\partial \Gamma}{\partial y}(x_i, y_j) \sum_{l=1}^N Hy_{jl}^{(1)} \right) \right] \Phi_{il}$$

$$- \left[ \bar{\epsilon}_{33}\mu_4 \Gamma(x_i, y_j) \right] \Phi_{ij}$$

که در این روابط ضرایب  $\mu_i$  چنین تعریف می‌شوند:

$$\mu_1 = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} -\frac{8}{h_p^2} \left( z - \frac{h}{2} - \frac{h_p}{2} \right) + \frac{V_0}{h_p} dz \approx 0 \quad (88)$$

$$\mu_2 = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} 1 - \frac{4}{h_p^2} \left( z - \frac{h}{2} - \frac{h_p}{2} \right)^2 + \frac{V_0}{h_p} \left( z - \frac{h}{2} \right) dz \quad (89)$$

$$\mu_3 = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} -\frac{8z}{h_p^2} \left( z - \frac{h}{2} - \frac{h_p}{2} \right) + \frac{V_0}{h_p} z dz \quad (90)$$

$$\mu_4 = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} -\frac{8}{h_p^2} dz \quad (91)$$

## ۸. منابع

- [1] Wang, JT-S., D. Shaw, and O. Mahrenholtz, "Vibration of rotating rectangular plates", *Journal of Sound and vibration*, 1987, Vol.112, no.3, pp.455-468.
- [2] Yoo, H. H., and C. Pierre, "Modal characteristic of a rotating rectangular cantilever plate", *Journal of Sound and Vibration*, 2003, Vol.259, no.1, pp.81-96.
- [3] Li, L., and D. G. Zhan, "Free vibration analysis of rotating functionally graded rectangular plates", *Composite Structures*, 2016, Vol.136, pp.493-504.
- [4] Rostami, Hamidreza, Ahmad Rahbar Ranji, and Firooz Bakhtiari-Nejad, "Free in-plane vibration analysis of rotating rectangular orthotropic cantilever plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, Vol.115, pp.438-456.
- [5] Saki, Rozita and Yousefi, Peyman and Hoseini Hashemi, SHahrokh, 1398, Free Vibration Analysis Of Rotating Rectangular Nano - Plate Based On The Nonlocal Theory Of Elasticity, 4th national Conference on Mechanical and Aerospace Engineering, Tehran, <https://civilica.com/doc/924897>.
- [6] Hao, Y. X., Y. Y. Liu, W. Zhang, L. T. Liu, K. C. Sun, and S. W. Yang, "Natural vibration of cantilever porous twisted plate with variable thickness in different directions", *Defence Technology*, 2023, Vol.27, pp.200-216.
- [7] George, Manuel, Mattipally Prasad, Rajeshkumar Selvaraj, N. Sakthieswaran, J. Sivakumar, Amal M. Al-Mohaimed, Tse-Wei Chen, Mohammed Al-Bahrani, Rey Y. Capangpangan, and Arnold C. Alguno, "Enhancement of vibrational characteristics of rotating CFRP composite tapered plates reinforced by graphene nanoparticles", *Polymer Composites*, 2023, Vol.44, no.11, pp.8021-8036.
- [8] Arefi, Mohammad, M. H. Zamani, and M. Kiani, "Size-dependent free vibration analysis of three-layered exponentially graded nanoplate with piezomagnetic face-sheets resting on Pasternak's foundation", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2018, Vol.29, no.5, pp.774-786.
- [9] Arefi, Mohammad, Masoud Kiani, and Ashraf M. Zenkour, "Size-dependent free vibration analysis of a three-layered exponentially graded nano-/micro-plate with piezomagnetic face sheets resting on Pasternak's foundation via MCST", *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 2020, Vol.22, no.1, pp.55-86.

- [10] Żur, Krzysztof Kamil, Mohammad Arefi, Jinseok Kim, and Junuthula Narasimha Reddy, "Free vibration and buckling analyses of magneto-electro-elastic FGM nanoplates based on nonlocal modified higher-order sinusoidal shear deformation theory", *Composites Part B: Engineering*, 2020, Vol.182, p.107601.
- [11] SATLA, Zouaoui, Lakhdar Boumia, and Mohamed Kherrab, "Vibration control of FGM plate using optimally placed piezoelectric patches", *Revista Mexicana de Física*, Jan-Feb, 2024, Vol.70, no.1, p.011002-1.
- [12] Kagawa, Yukio, Takao Tsuchiya, and Toshikazu Kawashima, "Finite element simulation of piezoelectric vibrator gyroscopes", *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 1996, Vol.43, no.4, pp.509-518.
- [13] Fang, H. Y., J. S. Yang, and Qing Jiang, "Rotation sensitivity of waves propagating in a rotating piezoelectric plate", *International Journal of Solids and Structures*, 2002, Vol.39, no.20, pp.5241-5251.
- [14] Yang, Jiashi, "A review of analyses related to vibrations of rotating piezoelectric bodies and gyroscopes", *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 2005, Vol.52, no.5, pp.698-706.
- [15] Thakkar, Dipali, and Ranjan Ganguli, "Helicopter vibration reduction in forward flight with induced-shear based piezoceramic actuation", *Smart Materials and Structures*, 2004, Vol.13, no.3, p.599.
- [16] Liu, Lijun, Zhiyi Zhang, and Hongxing Hua, "Dynamic characteristics of rotating cantilever plates with active constrained layer damping treatments", *Smart Materials and Structures*, 2007, Vol.16, no.5, p.1849.
- [17] Wu, Xiaosheng, Wenyuan Chen, Yipeng Lu, Qijun Xiao, Gaoyin Ma, Weiping Zhang, and Feng Cui, "Vibration analysis of a piezoelectric micromachined modal gyroscope (PMMG)", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2009, Vol.19, no.12, p.125008.
- [18] Kauffman, Jeffrey, and George Lesieutre, "Vibration reduction of turbomachinery bladed disks with changing dynamics using piezoelectric materials", In *52nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 19th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 13<sup>th</sup>*, 2011, p.2003.
- [19] Min, James B., Kirsten P. Duffy, Benjamin B. Choi, Andrew J. Provenza, and Nicholas Kray, "Numerical modeling methodology and experimental study for piezoelectric vibration damping control of rotating composite fan blades", *Computers & Structures*, 2013, Vol.128, p.230-242.
- [20] Malgaca, L. E. V. E. N. T., Hussain Al-Qahtani, and M. Sunar, "Vibration control of rotating blades using root-embedded piezoelectric materials", *Arabian Journal for Science and Engineering*, 2015, Vol.40, pp.1487-1495.
- [21] Arabjamaloei, Zahra, Mohammadreza Mofidi, Mohammad Hosseini, and Reza Bahaadini, "Vibration analysis of rotating composite blades with piezoelectric layers in hygrothermal environment", *The European Physical Journal Plus*, 2019, Vol.134, no.11, p.556.
- [22] Sivrioglu, Selim, Fevzi Cakmak Bolat, and Ercan Erturk, "Active vibration control of a blade element with uncertainty modeling in PZT actuator force", *Journal of Vibration and Control*, 2019, Vol.25, no.21-22, pp.2721-2732.
- [23] Kelley, Christopher R., Garrett K. Lopp, and Jeffrey L. Kauffman, "Optimizing piezoelectric material location and size for multiple-mode vibration reduction of turbomachinery blades", *Journal of Vibration and Acoustics*, 2021, Vol.143, no.2, p.021007.

- [24] Jiang, Fan, Liang Li, Wei-Hsin Liao, and Dingguo Zhang, "Vibration control of a rotating hub-plate with enhanced active constrained layer damping treatment", *Aerospace Science and Technology*, 2021, Vol.118, p.107081.
- [25] Rossi, Andrea, Fabio Botta, Ambra Giovannelli, and Nicola Pio Belfiore, "A novel approach to reduce fan rotor blades stress in case of resonance due to inlet flow distortion by means of piezoelectric actuators", *Journal of Sound and Vibration*, 2023, Vol.548, p.117552.
- [26] Li, Wei, and Hongyan Chen, "Tuning the primary resonance of vibrating beam micro-gyroscopes based on piezoelectric actuation and nonlinearity in curvature and inertia", *Microsystem Technologies*, 2023, Vol.29, no.3, pp.387-403.
- [27] Hosseini, S. M. H., and Yaghoub Tadi Beni, "Free vibration analysis of rotating piezoelectric/flexoelectric microbeams", *Applied Physics A*, 2023, Vol.129, no.5, p.330.
- [28] Yu, Ruichen, Jinhua Jiang, Nan Li, Qirui Hu, Hesheng Zhang, and Zhiyuan Gao, "Review on applications of piezoelectric materials for aero-engine blade vibration suppression", In *Third International Conference on Mechanical Design and Simulation (MDS 2023)*, SPIE, 2023, Vol.12639, pp.679-686.
- [29] Li, H. N., W. Wang, S. K. Lai, L. Q. Yao, and C. Li, "Nonlinear vibration and stability analysis of rotating functionally graded piezoelectric nanobeams", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2023, p.2450103.
- [30] Ma, Jinjun, Yuanzhao Chen, Wenjun Wu, Liang Li, and Dingguo Zhang, "Dynamic modeling and resonant analysis of rotating internally connected laminated piezoelectric beams", *Acta Mechanica*, 2024, Vol.235, no.1, pp.355-368.
- [31] Mohammadi, M., A. Farajpour, and A. Rastgoo, "Coriolis effects on the thermo-mechanical vibration analysis of the rotating multilayer piezoelectric nanobeam", *Acta Mechanica*, 2023, Vol.234, no.2, pp.751-774.
- [32] Reddy, Junuthula Narasimha, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, CRC press, 2003.
- [33] Rostami, Hamidreza, Firooz Bakhtiari-Nejad, and Ahmad Rahbar Ranji, "Vibration of the rotating rectangular orthotropic Mindlin plates with an arbitrary stagger angle", *Journal of Vibration and Control*, 2019, Vol.25, no.6, pp.1194-1209.
- [34] Farsangi, MA Askari, and A. R. Saidi, "Levy type solution for free vibration analysis of functionally graded rectangular plates with piezoelectric layers", *Smart materials and structures*, 2012, Vol.21, no.9, p.094017.
- [35] Bert, Charles W., and Moinuddin Malik, "Differential quadrature method in computational mechanics: a review", 1996, pp.1-28.
- [36] Eftekhari, S. A., "A differential quadrature procedure with direct projection of the heaviside function for numerical solution of moving load problem", *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2016, Vol.13, pp.1763-1781.
- [37] Lu, J., C. Yu, W. Xu, and C. Chiu, "Characteristic orthogonal polynomials-Ritz method for vibration behavior of functionally graded piezoelectric plates using FSDT", *Computers & Mathematics with Applications*, 2021, Vol.98, pp.157-168.
- [38] Ramu, Inala, and Sukesh C. Mohanty, "Free vibration analysis of rotating plates in high thermal environments using the finite element method", *Int J Acoust Vib*, 2017, Vol.22, pp.58-67.

1. Firs Order Shear Deformation Theory
2. Coriolis
3. Centrifugal
4. Hamilton's Principle
5. Maxwell equation
6. Open circuit
7. Close circuit
8. Generalized Differential Quadrature Method
9. Hub radius
10. Aspect ratio
11. Solar sails
12. Resonance
13. Flutter
14. Bending stiffness
15. Airfoil
16. Rayleigh Ritz Method
17. Functionally Graded Material
18. Generalized Kantorovich
19. Carbon Fiber Reinforced Polymer
20. Vibrator
21. Pasternak Foundation
22. Eringen's non-local elasticity piezo-magnetism
23. Navier analytical method
24. Piezoelectric Micromachined Modal Gyroscope
25. Fibers
26. Flexoelectric
27. Chebyshev-Gauss-Lobatto
28. Micro Fiber Carbon