

اثر الکتریسته و مغناطیسی بر انتشار موج در سیستم‌های نانوسازه-نانوسیال

بر بستر ویسکو پاسترناک الکترومغناطیسی

سپهیل اویسی	مهدی صالحی	اعظم قاسمی*	سیدعلی افتخاری	سعید ضیایی‌راد
گروه مهندسی مکانیک، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد ایران soheil.oveissi@gmail.com	گروه مهندسی مکانیک، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد ایران mehdi.salehi@pmc.iau n.ac.ir	گروه مهندسی مکانیک، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد ایران a_ghassemi@pmc.iaun .ac.ir	گروه مهندسی مکانیک، واحد خمینی شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی شهر ایران s_a.eftkhari@iaukh sh.ac.ir	دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران szrad@cc.iut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۶/۲۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۸/۱۱

چکیده

در این مقاله تأثیر میدان‌های نیروی الکتریکی با ولتاژهای مثبت یا منفی و مغناطیسی بر انتشار موج و سرعت فاز در نانوسیستم‌های دارای برهم‌کنش سازه-سیال مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور، نانوپوسته‌های کربنی استوانه‌ای دارای حرکت محوری حامل نانوسیال تعبیه شده بر بستر ویسکو-پاسترناک الکترومغناطیسی در نظر گرفته می‌شود. در اینجا فرض می‌شود بستر الاستیکی ویسکو-پاسترناک شامل فنهایی به صورت سیم‌پیچ‌های ایری باشد، لذا اعمال یک میدان الکتریکی به سیستم موجب ایجاد میدان مغناطیسی شده و نانوسیستمی مغناطیسی-الکتریکی-الاستیک حاصل می‌شود. میدان مغناطیسی هم بر سازه به صورت اعمال نیروی لورنتس و هم بر سیال با استفاده از اعداد نادسن و هارتمن در پراکندگی فونون تأثیرگذار خواهد بود. معادلات حاکم تحت نیروهای هیدرودینامیکی، الکتریکی، مغناطیسی و برشی براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای استوانه‌ای-سینوسی- غیرمحلی با استفاده از روش انرژی و معادلات تعمیم یافته ناویر-استوکس استخراج می‌شوند. نتایج حاصل شده در این تحقیق می‌توانند در طراحی و ساخت ابزارآلات سلامت‌سنجی، استحصال انرژی و رگ‌های انتقال دهنده دارو در مقیاس نانو مورد بهره‌برداری قرار گیرند.

واژگان کلیدی: انتشار موج، نانوپوسته کربنی دارای حرکت محوری، نانوسیال مغناطیسی، نیروی لورنتس، میدان‌های نیرویی الکتریکی و مغناطیسی، بستر ویسکو-پاسترناک الکترومغناطیسی

۱. مقدمه

مقیاس، نیروهای اعمالی و حرکت سه پارامتر مهم تبیین‌کننده رفتار فیزیکی سیستم‌ها و دستگاه‌های مختلف هستند. بدیهی است با پیشرفت تکنولوژی، دقت، حساسیت و توجه به این پارامترها افزایش بیشتری نیز یافته است. همچنین در سیستم‌های گوناگون عموماً سازه‌ها با سیالات مختلفی در تماس هستند، این برهم‌کنش در مقیاس‌ها، در حرکت با سرعت‌ها و جهت‌های مختلف و نیز تحت میدان‌های نیرویی گوناگون می‌تواند تأثیر اساسی بر عملکرد و واکنش‌های مختلف داشته باشد. از سوی دیگر اخیراً یک تیم از دانشمندان حالت جدیدی از آب را کشف کرده‌اند به گونه‌ای که مولکول‌های آب در فضاهای بسیار محدود به شکل یک ساختار تونل مانند در می‌آیند. این محققان در دپارتمان انرژی آزمایشگاه ملی اوک ریج^۱ دریافتند که مولکول‌های آب در کانال‌های فوق‌العاده کوچک شش ضلعی از یک بریل معدنی با اندازه ۵ آنگستروم محبوس می‌شوند. الکساندر کولنسکوف و همکاران [۱] در این پژوهش اظهار داشتند آب در شرایط خاص حرکت کوانتومی جدای از دیواره‌ها نشان می‌دهد بدان معنی که اتم‌های اکسیژن و هیدروژن از یکدیگر جدا شده و با هم و به‌طور هم‌زمان در تمام این شش ضلعی متقارن وجود خواهند داشت. این پژوهش موجب درک بهتر از رفتار ترمودینامیکی آب در محیط‌های بسیار محدود مانند نانولوله‌های کربنی و غشاء سلول شده است. نانوسازه‌های کربنی دارای پتانسیل بسیار زیادی برای استفاده در صنایع و سیستم‌های مختلف مانند سیستم‌های نانوالکترومکانیکی [۲]، دستگاه‌های نانوفلوئیدی [۳]، سنسورهای بیولوژیکی و مولکولی [۴]، دستگاه‌های انتقال دارو [۵] و موارد بسیار دیگر دارند.

تاکنون مطالعات زیادی توسط محققین صورت گرفته است که بیان‌گر رفتار متفاوت سازه‌ها و سیستم‌ها در ابعاد بسیار کوچک بوده که به اصطلاح به پارامتر مقیاس طول وابسته هستند. از این‌رو، برای در نظر گرفتن اثرات مربوط به اندازه مقیاس اغلب از تئوری‌های غیر کلاسیک از قبیل تئوری غیرمحل [۶]، تئوری

تنش سطحی [۷]، تئوری تنش کوپل [۸]، تئوری گرادیان کرنش [۹] و تئوری گرادیان کرنش-اینرسی [۱۰] استفاده شده و تئوری‌های کلاسیک و مدل‌هایی مانند اویلر-برنولی [۱۱]، تیموشنکو [۱۲] و رابلی [۱۳] برای تیر و یا فلاگ [۱۴]، دامل [۱۵] و سندرز [۱۶] برای ورق و پوسته تعمیم داده می‌شوند. نظریه غیرمحل یکی از مدل‌های پیوسته شناخته شده است که شامل مقیاس طول داخلی بوده و در مقایسه با نتایج تجربی دقت خوبی دارد [۱۷]. این نظریه شامل اثر مقیاس طول و فعل و انفعالات اتمی در کل محدوده ساختار مورد نظر است به طوری که می‌توان آن را به عنوان یک مدل پیوسته برای بررسی دینامیکی شبکه اتمی در نظر گرفت. براساس این تئوری غیرمحل اویسی و قاسمی [۱۸] نشان دادند پارامتر وابسته به اندازه غیرمحل در تعیین بزرگی فرکانس موج و سرعت فاز در انتشار موج‌های طولی و محیطی نانوسازه‌های حاوی نانوسیال نقش پررنگی ایفا می‌کنند.

از نظر نیروهای اعمالی، بسیاری از محققین ساختارهای نانومقیاس تحت تأثیر انواع نیروهای حجمی و سطحی را با استفاده از تئوری‌ها و مدل‌های گوناگون بررسی کرده‌اند. از جمله میدان نیروهای مؤثر بر رفتار مکانیکی نانوسازه‌ها می‌توان به میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی اشاره کرد. عارفی و همکاران [۲۶-۱۹] به عنوان مثال ارتعاشات الکترومکانیکی یک پوسته نانوپیزوالکتریک دوگانه منحنی که بر روی بستر پاسترناک را مورد بررسی قرار داد و نتیجه گرفت که افزایش پتانسیل الکتریکی اعمال شده فرکانس‌های طبیعی را افزایش می‌دهد. بیشه و ثو [۲۷] رفتار انتشار موج در پوسته کامپوزیتی استوانه‌ای پیزوالکتریک تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را با استفاده از نظریه پوسته تغییر شکل برشی مرتبه اول شامل اثرات برشی عرضی و اینرسی چرخشی بررسی کردند. آرانی و همکاران [۲۸] ارتعاش و ناپایداری ورق گرافنی تک لایه دارای حرکت محوری ورق گرافن تک لایه^۲ تحت یک میدان مغناطیسی مورد مطالعه قرار دادند. آنها دریافتند که سرعت بحرانی بستگی زیادی به سرعت حرکت آن دارد و گزارش دادند

که سرعت بحرانی ورق گرافن را با اعمال میدان مغناطیسی می‌توان بهبود بخشید. کریمی و همکاران [۲۹] رفتار موجی نانوصفحات ویسکوالاستیک که بر روی یک پایه ویسکو-پاسترناک تحت تأثیر میدان مغناطیسی قرار گرفته‌اند را بررسی و تحلیل کردند. آنها اظهار داشتند در میدان مغناطیسی بالا (قوی)، نقش تأثیرات اندازه بر ویژگی‌های موج قابل توجه نیست. از سوی دیگر، روابط پراکندگی و شکل حالت موج برای درک رفتارهای دینامیکی ساختارهای ساخته شده از ذرات گسسته [۳۰]، مشبک‌ها [۳۱] و همچنین مواد هوشمند پیوسته [۳۲] مهم هستند. به عنوان مثال، ویژگی‌های انتشار موج در ساختارهای تحت نیروهای الکتریکی و مغناطیسی می‌تواند در طراحی میکرو سنسورها و مبدل‌های با دقت بالا مفید باشد [۳۳].

از نظر حرکت و سرعت آن، دلایل فیزیکی و مستندات علمی بسیاری ارائه شده است که بیان کننده اهمیت و تأثیر این پارامتر زمان محور بر عملکرد سیستم و پیش‌بینی رفتار آن است. از آنجا که حرکت اتم‌ها و مولکول‌ها تحت نیروها و شرایط محیطی اجتناب‌ناپذیر است، لذا بررسی، کنترل و هدایت آن به‌خصوص در سیستم‌های نانومقیاس برای صنایع گوناگون می‌تواند یک موضوع مهم و قابل توجه برای بهبود عملکرد و گسترش زمینه‌های مورد استفاده از نانو ساختارها باشد. به‌طور کلی سیستم‌های دارای حرکت محوری کاربردهای گسترده‌ای دارند. تسمه نقاله، تیغه اره نواری، نانو فیلم و نوار مغناطیسی تنها تعداد انگشت شماری از نمونه‌های عملی هستند که علاوه بر عوامل تحریک خارجی پارامترهای حرکت داخلی نیز باید در نظر گرفته شوند. بنابراین، پیش‌بینی و کنترل ناپایداری چنین سیستم‌هایی در سرعت بحرانی می‌تواند به دستیابی به عملکرد بالاتر کمک کند. علاوه بر این، این دستگاه‌ها در مقیاس‌های کوچک می‌توانند در محدوده فرکانس فوق العاده بالا و حتی تراهرتز کار کنند که اثر وابسته به اندازه را نشان می‌دهند و باید مورد توجه قرار گیرد [۳۴]. به عنوان یکی از اولین کارهای عملیاتی، گروه تحقیقاتی دانشگاه رایس^۳ اقدام به ایجاد اولین خودروهای

نانومقیاس کرد [۳۵]. چالش نانو خودرو آنها پاسخ به این سؤال بود که چگونه فولرن‌ها^۴ می‌توانند روی سطوح فلزی حرکت کنند. همچنین، مورین و همکاران [۳۶] نانو خودروها را با موتورهای مولکولی یک جهته مصنوعی که از نور استفاده می‌کنند مورد بررسی قرار دادند.

از سوی دیگر، از آنجا که شبیه‌سازی مولکولی گران قیمت، پیچیده و زمان‌بر است، تئوری‌های پیوسته مکانیکی به‌طور گسترده و موفقیت‌آمیزی برای مطالعه رفتار مکانیکی نانولوله‌های کربنی به کار گرفته می‌شوند. همچنین برخی از محققین برای جبران نقص نظریه‌های کلاسیک که به دلیل ساده‌سازی فرضیات در آنها از اینرسی درون صفحه‌ای، تغییر شکل برش عرضی و اینرسی چرخشی صرف نظر می‌شود و نتایج بیشتر برای پوسته‌های بسیار نازک و یا فرکانس‌های پایین قابل قبول است از تئوری‌های تغییر شکل برشی با مرتبه اول یا مرتبه‌های بالاتر بهره برده‌اند. در تئوری‌های مرتبه بالاتر، سینماتیک ساختاری کامل‌تری در دسترس خواهد بود و لذا افزودن فاکتورهای برشی اصلاحی که در مرتبه اول برای دستیابی به جواب دقیق‌تر مورد نیاز است، لازم نیست. اخیراً محققین با ترکیب تئوری‌ها و مدل‌های مختلف، مدل‌های پیشنهادی مؤثرتری را ارائه و مورد استفاده قرار می‌دهند. لذا استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلّی سه‌بعدی برای تجزیه و تحلیل رفتار ارتعاشاتی نانوصفحات و پوسته‌ها بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. به عنوان مثال وانگ و همکاران [۳۷] ویژگی‌های انتشار موج نانو پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد درجه‌بندی شده^۵ را با استفاده از نظریه پوسته^۶ همراه با تئوری الاستیسیته غیرمحلّی مورد بررسی قرار دادند. نایفه و ریویچو [۳۸] ارتعاش غیرخطی اجباری یک سیستم را براساس نظریه پوسته نازک دائل محاسبه کردند. مدل غیرخطی نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر معمولاً فقط ترم‌های غیرخطی نوع ون کارمن را در نظر می‌گیرد، یعنی این ترم‌های غیرخطی فقط شامل جابه‌جایی طبیعی می‌شوند [۳۹]. به همین دلیل، آمابیلی و ردی [۴۰] نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر

غیرخطی دقیق و سازگار را ارائه دادند که بر این محدودیت غلبه می‌کند. نظریه آمابیلی-ردی^۷ سه جابه‌جایی و دو چرخش را با فرضیه عدم کشش ضخامت ارائه می‌دهد. آنها همچنین در این تئوری نشان دادند که به‌منظور در نظر گرفتن کشش ضخامت می‌توان شش متغیر اضافی تعریف کرد.

هدف اصلی در این تحقیق بررسی اثر میدان‌های نیرویی مختلف بر پراکندگی موج، فرکانس‌های موج‌های ایجاد شده و سرعت فاز یک نانوسیستم متحرک در معرض برهم‌کنش سیال عبوری است. لذا یک نانوپوسته کربنی مدور استوانه‌ای که پتانسیل‌های استفاده از آن در صنایع گوناگون بررسی و اثبات شده است انتخاب می‌شود. جریان سیال عبوری در هر سیستمی می‌تواند به‌عنوان یک عامل تحریک و اعمال نیروهای هیدرواستاتیکی یا هیدرودینامیکی بر سازه باشد، لذا سیستم مورد بررسی ما هم از این جهت مستثنا نبوده و با فرض عبور از درون نانوپوسته مجموعه سازه و سیال به‌عنوان یک سیستم در نظر گرفته شده و مسئله برهم‌کنش سیال-سازه در مقیاس نانو^۸ (Nano-FSI) مورد بحث قرار می‌گیرد. یکی از نوآوری‌های این سیستم تعبیه آن بر روی بستر الاستیکی ویسکو-پاسترناک به‌گونه‌ای است که فنرهای وینکلر^۹ به‌صورت سیم‌پیچ‌های ایری^{۱۰} در نظر گرفته شده‌اند. اعمال یک میدان الکتریکی به سیم‌پیچ‌های فنری باعث ایجاد میدان مغناطیسی در اطراف آن نیز می‌شود و بدین ترتیب یک نانوسیستم مغناطیسی-الکتریکی-الاستیک^{۱۱} حاصل خواهد شد. بنابراین یک نانوسیستم دارای برهم‌کنش سیال-سازه دارای حرکت محوری تحت نیروهای هیدروالاستیکی، الکتریکی، مغناطیسی و برشی خواهیم داشت. از سوی دیگر برای استخراج معادلات حاکم بر مسئله در اینجا سعی شده است با تعمیم یک تئوری پیشرفته و کارآمد به مدلی تکمیلی دست یافت و جواب‌های دقیق و قابل‌اعتنایی کسب کرد. لذا مدل آمابیلی-ردی براساس تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی را با ترکیب تئوری ارینگن و استفاده از پارامترهای سینوسی و مختصات استوانه‌ای تعمیم داده و مدل جدید تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای

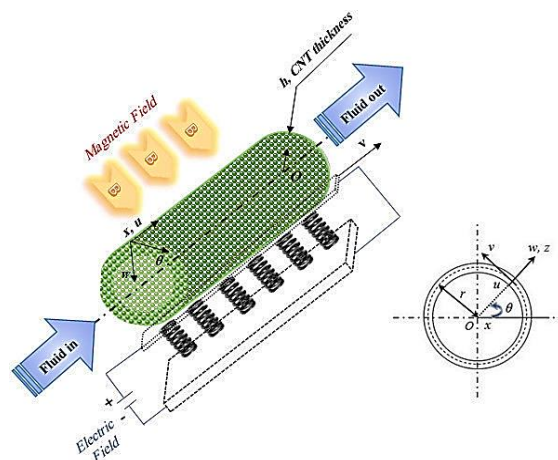
غیرمحلی-سینوسی-استوانه‌ای^{۱۲} (CSN-HSDT) پیشنهاد و ارائه می‌شود. سپس معادلات حاکم با استفاده از روش انرژی استخراج و با استفاده از روش تحلیلی حل می‌شوند. شایان ذکر است میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط میدان الکتریکی هم بر سازه و هم بر سیال عبوری اثر می‌گذارد. تأثیر میدان مغناطیسی بر سازه به‌صورت اعمال نیروی لورنتس^{۱۳}، و بر سیال با تبدیل آن به نانوسیال مغناطیسی به‌طور جداگانه و هم‌زمان برای نخستین بار مورد محاسبه قرار می‌گیرد. اثرات وابسته به مقیاس با استفاده از پارامتر غیرمحلی برای سازه و فاکتور اصلاح سرعت با کمک اعداد نادسن و هارتمن برای سیال مغناطیسی در معادلات اعمال می‌شوند. همچنین میدان الکتریکی هم با ولتاژ مثبت و هم با ولتاژ منفی بررسی خواهند شد. به‌طور خلاصه می‌توان اظهار داشت که در این تحقیق برای اولین بار یک مسئله Nano-FSI به‌صورت نانوسیستم مغناطیسی-الکتریکی-الاستیک دینامیکی با مدل پیشنهادی ابتکاری CSN-HSDT مورد بررسی قرار گرفته و تأثیر هم‌زمان میدان‌های نیرویی اعمالی در شرایط محیطی و هندسی مختلف مانند بستر ابدایی پیشنهادی پاسترناک الکترومغناطیسی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲. روابط پایه

۲-۱. مدل‌سازی ریاضی

به‌عنوان سازه در اینجا یک نانولوله کربنی همانند شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود و بدین ترتیب یک نانوپوسته استوانه‌ای مدور دارای شعاع r ، ضخامت h و نقطه مرجع O در مرکز یک انتهای پوسته با انتخاب سیستم مختصات استوانه‌ای (x, θ, z) را می‌توان شبیه‌سازی نمود. راستای طولی سیستم $x \in [0; L]$ ، راستای محیطی آن $\theta \in [0; 2\pi]$ و راستای شعاعی آن $z \in [-h/2; h/2]$ است. همچنین مختصات تغییر مکان یک نقطه دلخواه در صفحه میانی پوسته در جهت‌های طولی، محیطی و شعاعی به‌ترتیب با u ، v و w نشان داده می‌شوند. نانوسازه در نظر گرفته شده بر روی یک بستر الاستیکی ویسکوپاسترناک

قرار دارد. فرض بر این است که بستر مورد نظر دارای فنرهایی سیم‌پیچ‌های ابری باشند لذا با اعمال یک میدان الکتریکی به سیستم، یک میدان مغناطیسی نیز ایجاد شده که هم بر سازه و هم بر سیال عبوری از درون آن اثر خواهد گذاشت.



شکل ۱. شماتیک یک نانولوله کربنی حاوی نانوسیال عبوری در سیستم مختصات پوسته استوانه‌ای تحت اثر میدان‌های نیرویی الکتریکی و مغناطیسی.

در اینجا برای بررسی رفتار ارتعاشی و انتشار موج در سیستم، تئوری تغییر شکل مرتبه بالای آماییلی-ردی [۴۰] تعمیم داده می‌شود. بنابراین، علاوه بر اصول اولیه این تئوری، میدان جابه‌جایی ارائه شده در این تحقیق براساس مفروضاتی همانند موارد زیر نیز توسعه داده می‌شوند:

(الف) جابه‌جایی‌ها در راستای محور z به مؤلفه‌های خمشی، برشی و کششی تقسیم می‌شوند.

(ب) مؤلفه‌های برشی جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای منجر به تغییرات سینوسی کرنش‌های برشی می‌شوند.

(ج) تنش در هر نقطه از سازه نه تنها به کرنش‌ها در همان نقطه، بلکه به کرنش‌ها در تمام نقاط دیگر سازه نیز وابسته است.

(د) جابه‌جایی‌ها در مقایسه با ضخامت صفحه کوچک هستند، لذا کرنش‌های ایجاد شده بسیار کوچک خواهند بود.

بدین ترتیب با اعمال اثرات اندازه سازه به کمک تئوری الاستیسیته غیر کلاسیک غیرمحلّی ارینگن و افزودن پارمترهای

سینوسی، معادلات حاکم بر مسئله در مختصات استوانه‌ای (قطبی) و مقیاس نانو ارائه می‌شوند. همچنین به منظور بحث و بررسی رفتار موجی سیستم، نیروهای اعمال شده در اینجا تنش‌های ناشی از نانوسیال عبوری از درون نانوسازه، نیروهای الکتریکی، نیروهای مغناطیسی و نیروهای ناشی از بستر الاستیکی مانند نیروی برشی خواهند بود. علاوه بر این، عیوب هندسی یک پوسته با تنش اولیه صفر با تعریف جابه‌جایی w_0 در جهت عمود و اتخاذ جهت مثبت به سمت بیرون سازه نشان داده شده و اعمال می‌شود.

براساس این توضیحات، به منظور دستیابی به معادلات حاکم بر دینامیک نانوپوسته استوانه‌ای مدور حاوی نانوسیال مغناطیسی با مدل ابتکاری پیشنهادی CSN-HSDT میدان جابه‌جایی‌های یک نقطه عمومی در صفحه میانی پوسته $(u_x, u_\theta \text{ و } u_z)$ به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$u_x = u_0 + z\phi_1 + z^2\psi_1 + z^3\gamma_1 + z^4\theta_1 + \xi\phi_3 \quad (1-\text{الف})$$

$$u_\theta = \left(1 + \frac{z}{r}\right)v_0 + z\phi_2 + z^2\psi_2 + z^3\gamma_2 + z^4\theta_2 + \xi\phi_4 \quad (1-\text{ب})$$

$$u_z = w_0 + w_b + w_s + z\chi \quad (1-\text{ج})$$

که در آن u_0 و v_0 توابع جابه‌جایی صفحه میانی پوسته به ترتیب در جهت‌های x و θ بوده و w_b و w_s به ترتیب مؤلفه‌های خمشی و برشی جابه‌جایی عرضی هستند. ϕ_1 و ϕ_2 دوران‌های متقاطع متعامد عرضی در نقطه $z = 0$ به ترتیب حول محورهای y و x هستند. لازم به ذکر است y مختصات منحنی الخط $(r+z)\theta$ به صورت عمود بر محورهای x و z است. همچنین، ϕ_3 و ϕ_4 دوران‌های صفحات xz و yz [۴۱] هستند. روابط ریاضی این چهار پارامتر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad \phi_2 = -\frac{\partial w_b}{\partial \theta}, \quad \phi_3 \\ &= -\frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad \phi_4 = -\frac{\partial w_s}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2)$$

تعریف پارامتر w_0 در معادله ۱-ج به صورت یک جابه‌جایی افزوده برای محاسبه اثرات کششی عبارت خواهد بود از:

$$w_0 = \zeta(z)\varphi(x, y) \quad (3)$$

علاوه بر این در روابط ۱-الف و ۱-ب توابع سینوسی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\xi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \quad (4)$$

به طوری که تعریف پارامتر $\zeta(z)$ در رابطه ۳ عبارت است از:

$$\zeta(z) = 1 - \xi'(z) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{h}z\right) \quad (5)$$

که در آن $\xi'(z)$ بیان گر مشتق تابع سینوسی در معادله ۴ نسبت به z است. همچنین در معادلات ۱، ψ_1 ، ψ_2 ، γ_1 ، γ_2 ، θ_1 ، θ_2 و پارامتر افزوده χ توابعی هستند که به طور مستقیم یا غیرمستقیم بر اساس شش متغیر بیان کننده تغییر شکل پوسته یعنی u_0 ، v_0 ، φ ، W_b ، W_s و χ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \psi_2 = \frac{1}{2r} \phi_2 + \frac{1}{2r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{1}{2r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \\ \gamma_1 &= -\frac{4}{3h^2} \left(\phi_1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right), \\ \gamma_2 &= -\frac{4}{3h^2} \left[\phi_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{h^2}{8r^2} \left(\phi_2 - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - r \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \right] \\ \theta_1 &= 0, \quad \theta_2 = \frac{1}{4r} \gamma_2 - \frac{1}{4r^2} \psi_2 \end{aligned} \quad (6)$$

لازم به توضیح است که تغییر شکل برشی در نظریه های پوسته کلاسیک نادیده گرفته می شوند که تقریب نسبتاً خوبی برای پوسته های ایزوتروپیک نازک و پوسته های چندلایه بسیار نازک است. با این حال که تغییر شکل برشی نقش کمتری نسبت به کرنش ها و خمش های درون صفحه ای دارد و کافی است که فقط شرایط جابه جایی خطی را در روابط کرنش برشی - جابه جایی حفظ کرد، به منظور دستیابی به نتایج دقیق در اینجا این پارامتر نیز در نظر گرفته می شود.

همان طور که مشاهده می شود در معادلات ۱-الف و ۱-ب جابه جایی های درون صفحه تا مرتبه ۴ در راستای z بسط داده شده اند به طوری که توزیع مرتبه بالایی از اثرات برشی در راستای ضخامت را ارائه می دهند. این درحالی است که جابه جایی عمودی در رابطه ۱-ج به صورت خطی فرض شده است. به منظور دستیابی به روابط کرنش های برشی عرضی و پارامترهای استوانه ای تعریف شده در رابطه ۶ از معادلات زیر استفاده می شود:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{1 + (z/r)} \left(\frac{\partial u_z}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

پس از جای گذاری معادلات ۱-الف تا ج در روابط ۷ به منظور اضمحلال کرنش های برشی در سطوح بالا و پایین پوسته باید روابط $\gamma_{xz}|_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0$ و $\gamma_{yz}|_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0$ برقرار باشند.

همچنین فرض بر این است که بردارهای عمود بر سطح میانی پوسته قبل و پس از تغییر شکل تغییر نکرده و کشیده یا فشرده نشوند. همچنین، با استفاده از تعریف کرنش غیرخطی در راستای z داریم:

$$\varepsilon_{zz}|_{z=0} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (8)$$

بنابراین، متغیر اضافه شده χ به عنوان ششمین متغیر به صورت زیر معرفی می شود:

$$\begin{aligned} \chi &= -1 + \sqrt{1 - \left(\frac{u_0}{r^2} + \phi_1 \right)^2 - \left(\frac{v_0}{r^2} + \phi_2 \right)^2} \\ &\simeq -\frac{1}{2} \left(\phi_1^2 + \phi_2^2 + 2\phi_1 \frac{u_0}{r} + 2\phi_2 \frac{v_0}{r} + \frac{u_0^2}{r^2} + \frac{v_0^2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

تقریب ارائه شده فوق برای مقادیر $\phi_1, \phi_2 \ll 1$ بسیار مناسب است. معادله ۹ نشان می دهد که این متغیر اضافه شده یک عبارت مرتبه دوم نسبت به سایر جابه جایی ها و دوران ها است. با توجه به توضیحات ارائه شده، در بسیاری از موارد می توان این متغیر را برابر با صفر تقریب زد.

۲-۲. بستر ویسکو-پاسترناک الکترومغناطیسی الاستیک

فشاری که بر سیستم وارد شده و در معادله حرکت ظاهر می‌گردد، شامل دو بخش اصلی است: فشارهای داخلی که در اینجا عمدتاً بر اثر فشار دینامیکی سیال عبوری از درون نانوسازه به وجود می‌آیند و فشارهای خارجی. فشار دینامیکی که ناشی از برهم‌کنش سیال و سازه بوده و توسط معادله بقای ممنتوم یا ناویر-استوکس قابل محاسبه است در بخش انرژی جنبشی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. فشار خارجی شامل فشار کلی وارد شده بر سیال، کشش ظاهری احتمالی (فشار رانش) ناشی از جریان سیال و فشار به وجود آمده از بستر الاستیکی موجود بوده و به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$P_e = [P^* A_i - T^*] \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + q \quad (10)$$

که در آن P^* و T^* به ترتیب فشار کلی که از طرف نانوسازه بر سیال وارد می‌شود و کشش خارجی اعمال شده بر نانوسازه از طرف سیال هستند. همچنین، A_i بیان‌گر مساحت سطح مقطع داخلی نانوسازه است. در عمل، دو کشش بیرونی اعمال شده و فشار کلی در انتهای نانولوله صفر بوده و یا اصطلاحاً کشش T و افت فشار (بار) (PA_i) یکدیگر را خنثی و از معادله حرکت حذف می‌شوند [۴۲]. در رابطه فوق، q بیان‌کننده نیروی گسترده حاصل از بستر الاستیکی است. نیروی اعمال شده بر نانوسازه ناشی از بستر الاستیکی پاسترناک به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$q_p = K_w u_z - K_s \nabla^2 u_z \quad (11)$$

که در آن K_s و K_w به ترتیب بیان‌گر مدول وینکلر و مدول برشی در بستر الاستیکی پاسترناک هستند، u_z تغییر مکان عرضی سازه و عملگر لاپلاسین عبارت است از $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ با توجه به ضرایب K_s و K_w می‌توان انتظار داشت که مدول وینکلر مانند یک فنر در سیستم عمل کرده و لذا بستر وینکلر سیستم را سخت‌تر می‌کند. همچنین مدول برشی K_s

نقشی مشابه جرم را در سیستم بازی می‌کند که به دلیل علامت منفی، تأثیری معکوس در سیستم می‌گذارد. به عبارت دیگر، اضافه شدن فاکتور برشی K_s ، مانند کاهش جرم سیستم است. بنابراین، قابل پیش‌بینی است که بستر الاستیکی پاسترناک فرکانس سیستم را افزایش دهد.

همان‌طور که پیش‌تر ذکر شد در اینجا فرض بر این است که بستر پاسترناک شامل فنرهایی به صورت سیم‌پیچ‌های ایری باشند. لذا با تحریک توسط یک میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی منجر به ایجاد یک میدان مغناطیسی در سیم‌پیچ‌های بستر الاستیکی می‌شود که می‌توانید در شکل ۲ ببینید. در نتیجه می‌توان ادعا کرد یک بستر الاستیکی ویسکو-پاسترناک الکترومغناطیسی به وجود آمده که علاوه بر بارهای نرمال و برشی موجب اعمال ولتاژ الکتریکی و نیروی مغناطیسی نیز بر سیستم شده و یک نانوسیستم مگنتو-الکترو-الاستیک حاصل خواهد شد. در ادامه نیروهای اعمال شده بر سیستم ناشی از این میدان‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲-۳. میدان الکتریکی

به طور تجربی، میدان الکتریکی معمولاً از طریق الکترودهای طلای (Au) پیوست شده به نانوسازه اعمال می‌شود [۴۳]. به گونه‌ای که در شکل ۲ نشان داده شده است با القای پتانسیل الکتریکی، مقداری ولتاژ جریان الکتریسته به سیستم وارد می‌شود. رابطه تنش-کرنش برای مواد پیزوالکتریک به صورت زیر تعریف می‌شود [۴۴]:

$$\{\tau\} = [C]\{\varepsilon\} - [e]^T \{E\} \quad (12)$$

که در آن ε ، τ و E به ترتیب تنش‌ها، کرنش‌ها و میدان الکتریکی کلاسیک هستند. همچنین، ماتریس‌های C و e به ترتیب بیان‌گر سختی‌های الاستیکی و ضرایب پیزوالکتریک هستند. مؤلفه‌های این ضرایب به ساختار مواد بستگی دارد. در این تحقیق برای پاسخ پیزوالکتریک محوری مطلوب به کشش و فشار، ساختار زیگزاگ برای نانوپوسته کربنی^{۱۴} (CNS) انتخاب می‌شود [۴۵]. مواد پیزوالکتریک با توزیع منظم در

راستای محورهای اصلی نمونه‌ای از مواد با سه سطح متقارن متعامد هستند. لذا ضرایب پیزوالکتریک و اجزای میدان الکتریکی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$[e]^T = \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [E] = \begin{bmatrix} E_x \\ E_\theta \\ E_z \end{bmatrix} \quad (۱۳)$$

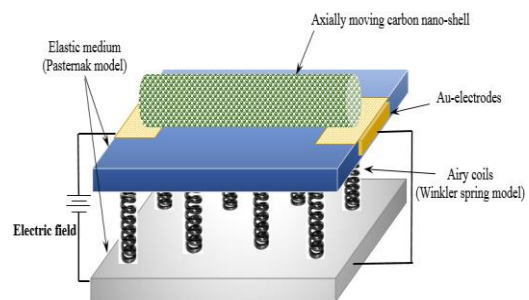
میدان الکتریکی برحسب پتانسیل الکتریکی ($E = -\nabla\Phi$) به گونه‌ای تعریف می‌شود که میزان قدرت میدان‌های الکتریکی E_x ، E_θ و E_z را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۴۶]:

$$E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r+z} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \quad E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (۱۴)$$

در روابط فوق پتانسیل الکتریکی عبارتست از [۴۷]:

$$\Phi(x, \theta, z, t) = -\cos(\beta z)\phi(x, \theta, t) + zE_0 \quad (۱۵)$$

که در آن $E_0 = \sqrt{2}V_0/h$ ، $\beta = \pi/h$ و $\phi(x, \theta, t)$ تغییرات مکانی و زمانی پتانسیل الکتریکی در جهت‌های x و θ را نشان می‌دهد. همچنین V_0 بیان گر ولتاژ الکتریکی خارجی است.



شکل ۲. شماتیک اعمال میدان الکتریکی بر روی نانوپوسته کربنی دارای حرکت محوری تعبیه شده بر روی بستر ویسکو-پاسترناک با استفاده از الکترودهای Au.

۴-۲. میدان مغناطیسی

میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط سیم‌پیچ‌های فنری تحت میدان الکتریکی هم بر سازه و هم بر سیال عبوری از درون آن تأثیرگذار خواهد بود. اثر میدان مغناطیسی بر نانوسازه با استفاده

از روابط ماکسول قابل محاسبه و بررسی است. مقدار نیروی لورنتس که بر اثر میدان مغناطیسی اعمال شده، بر نانوپوسته القاء می‌شود براساس معادلات ماکسول به دست می‌آید. این معادلات در این تحقیق در دستگاه مختصات استوانه‌ای ارائه و بررسی می‌شوند.

۲-۴-۱. روابط ماکسول

با در نظر گرفتن چگالی جریان (J)، بردارهای نیرویی میدان الکتریکی (e)، بردارهای توزیع گر میدان مغناطیسی (h)، و بردار تغییر مکان (U)، معادلات ماکسول به صورت زیر ارائه می‌شوند [۴۸]:

$$J = \nabla \times h \quad (۱۶-الف)$$

$$\nabla \times e = -\eta \frac{\partial h}{\partial t} \quad (۱۶-ب)$$

$$\nabla \cdot h = 0 \quad (۱۶-ج)$$

$$e = -\eta \left(\frac{\partial U}{\partial t} \times H \right) \quad (۱۶-د)$$

$$h = \nabla \times (U \times H) \quad (۱۶-ه)$$

که در آن ∇ عملگر عددی همیلتون (گرادیان) است که در مختصات استوانه‌ای در نظر گرفته شده به صورت $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$ تعریف می‌شود و η فاکتور نفوذپذیری مغناطیسی است. لذا با توجه به بردار جابه‌جایی $U = (u_x \hat{e}_r, u_\theta \hat{e}_\theta, u_z \hat{k})$ و میدان مغناطیسی $H = (H_x \hat{e}_r, H_\theta \hat{e}_\theta, H_z \hat{k})$ بردار توزیع میدان مغناطیسی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$h = \left[-H_x \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + H_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + H_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right] \hat{e}_r + \left[H_x \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - H_\theta \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + H_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] \hat{e}_\theta + \left[H_x \frac{\partial u_z}{\partial r} + H_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - H_z \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \hat{k} \quad (۱۷)$$

و با جای گذاری معادله ۱۷ در معادله ۱۶-الف چگالی جریان عبارت خواهند بود از:

$$J = \begin{pmatrix} H_x \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial z} \right] \\ + H_\theta \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \right] \\ - H_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_x}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] \end{pmatrix} \hat{e}_r + \begin{pmatrix} -H_x \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \\ + H_\theta \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial \theta} \right) \right] \\ + H_z \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} \right] \end{pmatrix} \hat{e}_\theta$$

$$+ \begin{pmatrix} H_x \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} \right] \\ - H_\theta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \right) \\ + H_z \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta \partial z} \right] \end{pmatrix} \hat{k} \quad (18)$$

لذا با توجه به میدان مغناطیسی استوانه‌ای مورد استفاده در این تحقیق، $H = (H_x \hat{e}_r, H_\theta \hat{e}_\theta, H_z \hat{k})$ ، مؤلفه‌های این نیرو به تفکیک عبارت خواهند بود از:

نیروی لورنتس در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f = f_x \hat{e}_r + f_y \hat{e}_\theta + f_z \hat{k} = \eta (J \times H) \quad (19)$$

$$f_x = \eta \begin{pmatrix} -H_x H_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \\ - H_x H_\theta \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} \right] \\ + H_\theta^2 \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \right) \\ + H_\theta H_z \left[\frac{2}{r} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial \theta} \right] \\ + H_z^2 \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} \right] \end{pmatrix}$$

$$f_\theta = \eta \begin{pmatrix} H_x^2 \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} \right] \\ - H_x H_\theta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \right) \\ - H_x H_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta \partial z} - 2 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial \theta} \right] \\ - H_\theta H_z \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \right] \\ + H_z^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_x}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$f_z = \eta \begin{pmatrix} H_x^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \\ -H_x H_\theta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial \theta} \right] \\ -H_x H_z \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} \right] \\ +H_\theta^2 \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \right] \\ -H_\theta H_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_x}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] \end{pmatrix}$$

جای گذاری معادلات میدان جابه جایی (معادلات ۱-الف تا ۱-ج) در معادله ۱۸ در نهایت مقدار نیروی لورنتس عبارت خواهد بود از:

$$f_z = \eta H_x^2 \begin{pmatrix} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \left(-\frac{4}{r^2 h^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r^5} \right) z^2 \\ + \frac{\partial^2 w_b}{\partial \theta^2} \left(\frac{4}{3r^2 h^2} - \frac{4}{3r^3 h^2} + \frac{1}{3r^4} \right) z^3 \\ + \frac{\partial^2 w_b}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{2r^3} + \frac{1}{2r^5} \right) z^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_b}{\partial \theta^2} + \\ \frac{\partial^2 w_s}{\partial \theta^2} \left(-\frac{4}{3r^3 h^2} - \frac{1}{3r^4} \right) z^3 \\ + \frac{\partial^2 w_s}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{2r^5} - \frac{4}{r^2 h^2} \right) z^2 \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial \theta^2} z + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \end{pmatrix} \quad (21)$$

که در آن ρ ، $\vec{V}$ ، μ و $\vec{P}$ به ترتیب چگالی سیال، سرعت سیال، لزجت و فشار سیال عبوری و $\vec{F}_{body}$ بیان کننده نیروهای حجمی وارد بر المان سیال است. همچنین نمادهای ∇^2 ، ∇ و $\frac{D}{Dt}$ به ترتیب بیان گر عمل گرهای گرادینان، لاپلاسیان و مشتق مادی یا مشتق اساسی هستند. برای به دست آوردن نیروهای وارد بر المان سیال در جهت های x ، θ و z از معادله بقای مومنتم به ترتیب در جهت حرکت محوری، جانبی و عمودی سیال استفاده می شود. برای محاسبه ی نیروی وارده از طرف سیال، کل این نیرو بر روی المان دیفرانسیلی سیال در هر جهت را توسط معادله دیفرانسیل مومنتوم خطی جریان سیال به صورت زیر می توان محاسبه نمود [۵۰]:

در این جا به منظور ساده سازی فرض می شود فقط مؤلفه های طولی میدان مغناطیسی بر سازه اثر گذاشته (یعنی $H = (H_x \hat{e}_r, 0, 0)$) و نیروی لورنتس حاصل شده تنها در جهت z در نظر گرفته می شود. بنابراین، با اعمال این فرضیات و

۲-۴-۲. نانوسیال مغناطیسی

سیستم مورد مطالعه حاوی سیال عبوری است و لذا اثرات میدان مغناطیسی بر جریان نانوسیال نیز باید مورد بررسی قرار گیرد. سیال تحت تأثیر میدان مغناطیسی دارای خواص مغناطیسی است و این خواص بر کیفیت و کمیت نیروی وارد شده از طرف سیال بر سازه تأثیر خواهد گذاشت. سیال عبوری از درون نانوسازه به صورت تراکم ناپذیر، لایه ای، نامحدود و لزج در نظر گرفته می شود. معادله ی تعادل مومنتوم برای حرکت سیال با استفاده از معادله ناویر-استوکس به صورت زیر بیان می شود [۴۹]:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla \vec{P} + \mu \nabla^2 \vec{V} + \vec{F}_{body} \quad (22)$$

لوله‌های با نسبت ابعادی بزرگ نیز هست به صورت زیر بیان می‌شود:

$$V_i = \frac{Du_i}{Dt}, \quad \text{for } i = x, \theta, z \quad (26\text{-الف})$$

$$\frac{DV_i}{Dt} = \frac{D^2u_i}{Dt^2} \quad (26\text{-ب})$$

که در آن $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\dot{u}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$ همچنین، $\dot{u}_i$ سرعت متوسط جریان سیال در جهت‌های $i = x, \theta, z$ بر روی دیواره نانوسازه است. با جای‌گذاری معادلات ۲۶-الف و ۲۶-ب در سمت چپ معادله ۲۲ و ضرب تمامی جملات در مساحت سطح مقطع سیال داخلی، A_{int} ، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \rho A_{int} \frac{DV_i}{Dt} &= \rho A_{int} \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{\dot{u}_\theta}{r} \frac{\partial V_i}{\partial \theta} + \dot{u}_z \frac{\partial V_i}{\partial z} \right) \\ &= \rho A_{int} \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \dot{u}_x^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\dot{u}_\theta^2}{r^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2} + \dot{u}_z^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} \right. \\ &\quad + 2 \left(\dot{u}_x \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x} + \frac{\dot{u}_\theta}{r} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial \theta} + \dot{u}_z \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial z} \right) \\ &\quad + 2 \left(\frac{\dot{u}_x \dot{u}_\theta}{r} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial \theta} + \dot{u}_x \dot{u}_z \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial z} \right) \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\dot{u}_\theta \dot{u}_z}{r} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta \partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

که در آن $\vec{u} = \dot{u}_x \hat{e}_x + \dot{u}_\theta \hat{e}_\theta + \dot{u}_z \hat{e}_z$. همچنین سمت راست معادله ۲۲ را با در نظر گرفتن مختصات استوانه‌ای و معادلات ۲۴-۲۵ و ضرب تمامی جملات در مساحت سطح مقطع سیال داخلی به صورت زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$A_{int} \left(\begin{aligned} &-\nabla P(x, \theta, z) + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) - \frac{V_i}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_i}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} \right] \\ &+ (\rho g_i + E \alpha_i \Delta T + \sigma B_0^2 V_i) \end{aligned} \right) \quad (28)$$

for $i = x, \theta, z$

$$d\vec{F} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} r dx d\theta dz \quad (23)$$

نیروی منتج بر روی المان دیفرانسیلی سیال دو نوع است؛ نیروهای حجمی ($d\vec{F}_{vol}$) و نیروهای سطحی ($d\vec{F}_{surf}$). نیروهای حجمی بر اثر میدان‌های اعمالی نظیر گرانش، مغناطیس، حرارت و غیره به کل جرم سیستم وارد می‌شوند. این نیروها بر روی جرم حجم کنترل (حجم معیار) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{vol} &= d\vec{F}_{gravity} + d\vec{F}_{thermal} \\ &\quad + d\vec{F}_{manetism} \quad (24) \\ &= (\rho \vec{g} + \alpha_i \Delta \vec{T} + \sigma (V_i \times \vec{B}) \times \vec{B}) r dx d\theta dz, \\ &\text{for } i = x, \theta, z \end{aligned}$$

که در آن g ، α و ΔT به ترتیب شتاب گرانش، ضریب انبساط حرارتی و اختلاف دما هستند. آخرین عبارت در رابطه فوق، بیان گر نیروی لورنتس تحت میدان مغناطیسی B است که در آن σ هدایت الکتریکی است. به عنوان مثال میدان مغناطیسی جانبی $\vec{k} B = B_0 \sin \theta$ که در آن B_0 نشان دهنده قدرت میدان مغناطیسی است، در نظر گرفته می‌شود.

نیروهای سطحی بر اثر تنش‌های اعمال شده بر سطح کنترل به وجود می‌آیند. این نیروهای نیروی سطحی شبکه‌ای که به دو بخش مجزای فشار و تنش‌های ویسکوز تقسیم می‌شوند به صورت زیر ارائه می‌شوند [۴۹]:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{i,surf} &= \left(-\nabla P(x, \theta, z) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xz}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zz}) \right) r dx d\theta dz, \quad (25) \\ &\text{for } i = x, \theta, z \end{aligned}$$

با جمع معادلات ۲۴ و ۲۵ برای هر جهت (x, θ, z) و جای‌گذاری آن در معادله ۲۳، نیروی کل وارد شده بر المان دیفرانسیلی سیال به دست می‌آید. از سوی دیگر طبق شرط سازگاری، در نقطه برخورد جداره‌ی لوله و سیال داخلی، سرعت‌ها و شتاب‌ها در راستای جهت جابه‌جایی باید یکسان باشند [۵۱]. این شرط که منطبق با تئوری بدنه باریک برای

لازم به ذکر است که هر دو معادله ۲۷ و ۲۸ بیان کننده نیروی اعمالی شبکه‌ای مشابهی بر المال سیال در هر جهت هستند. می‌توان اظهار داشت که معادله ۲۷ بیان گر نیروی شبکه‌ای ایجاد شده توسط شتاب نانولوله و سرعت محوری جریان سیال است، درحالی که معادله ۲۸ بیان گر نیروی مشابهی است که توسط گرادیان فشار، لزجت سیال جاری و نیروهای حجمی ایجاد شده است. بنابراین از هریک از معادلات ۲۷ یا ۲۸

به عنوان نیروی اعمالی در معادله حرکت می‌توان استفاده کرد زیرا نیروهای وارد شده بین المان سیال و جداره نانولوله مجاور آن را می‌توان به عنوان نیروهای کنش و واکنش در دو جهت مخالف به کار برد. به طور کلی معادلات تعمیم یافته ناویر-استوکس (معادله ۲۲) در مختصات استوانه‌ای به شرح زیر بیان می‌شوند:

$$\rho \left(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} + \frac{\dot{u}_\theta}{r} \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial \theta} - \frac{\dot{u}_\theta^2}{r} + \dot{u}_z \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} \right) - \frac{\dot{u}_x}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}_x}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \dot{u}_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x + E \alpha_x \Delta T + \sigma B_0^2 \dot{u}_x \quad (29-f)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial r} + \frac{\dot{u}_\theta}{r} \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\dot{u}_x \dot{u}_\theta}{r} + \dot{u}_z \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial x} \right) - \frac{\dot{u}_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \dot{u}_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta + E \alpha_\theta \Delta T + \sigma B_0^2 \dot{u}_\theta \quad (29-b)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial r} + \frac{\dot{u}_\theta}{r} \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial \theta} + \dot{u}_z \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z + E \alpha_z \Delta T + \sigma B_0^2 \dot{u}_z \quad (29-c)$$

بدین ترتیب، با در نظر گرفتن یک سیستم مختصات استوانه‌ای و یک ناحیه کاملاً توسعه یافته برای جریان سیال درون پوسته، معادله مومنتوم سیال در حال حرکت در جهت‌های مختلف را می‌توان به دست آورد. سپس با حل معادله مومنتوم جریان سیال، مقدار نیروی ناشی از سیال که می‌تواند منجر به ارتعاشات سیستم و انتشار امواج شود حاصل می‌شود. از این معادلات و قانون تعادل مومنتوم خطی می‌توان نتیجه گرفت که نیروی حاصل شده در هر جهت را با مشتق مادی بردار سرعت در همان جهت می‌توان محاسبه نمود. یا به عبارت دیگر، این نیرو می‌تواند به طور مشابه با جمع گرادیان فشار، تنش ویسکوز و نیروهای حجمی در آن جهت، محاسبه شود. هر دو سمت چپ و راست معادله فوق، بیان گر نیروی حاصله در هر یک از جهت‌های z ، θ و x هستند که با دو روش متفاوت به دست آمده‌اند.

لازم به ذکر است در این تحقیق از رویکرد همیلتونی برای در نظر گرفتن میزان نیروهای وارده از طرف سیال استفاده می‌شود که در بخش انرژی جنبشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. رویکرد نیوتنی شرح داده شده برای روشن شدن بهتر روش کار و استدلال چگونگی در نظر گرفتن سیال مغناطیسی بیان شد. حال که ذکر شد می‌توان از هر یک از روابط سمت چپ یا سمت راست معادلات ناویر-استوکس استفاده کرد شاید این سوال پیش بیاید که در صورت استفاده از روابط سمت چپ، نیروهای حجمی اعمال شده توسط میدان‌های نیرویی مختلف چگونه خود را در معادلات نمایش داده و اثرات آنها را چگونه می‌توان بررسی کرد.

$$VCF = \frac{U_{ave}^{slip}}{U_{ave}^{no-slip}} = 8 \frac{\left[Ha^2 \left(\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} \right) \left(\frac{Kn}{1+Kn} \right) I_0(1, Ha) + I_0(0, Ha) Ha - 2I_0(1, Ha) \right]}{Ha^3 I_0(0, Ha)} \quad (30)$$

که در آن U_{ave}^{slip} و $U_{ave}^{no-slip}$ میانگین سرعت جریان سیال را به ترتیب با و بدون شرایط مرزی لغزشی و اثر میدان مغناطیسی نشان می‌دهد. علاوه بر این، Ha ، σ_v ، Kn و I_0 به ترتیب عدد هارتمن^{۱۶}، ضریب تصحیح مومنتوم مماسی، عدد نادسن^{۱۷} و تابع بسل اصلاح شده^{۱۸} را نشان می‌دهند. عدد هارتمن که نشان‌دهنده خواص مغناطیسی جریان سیال است را می‌توان به صورت $Ha = B_0 r_i \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}$ داخلی پوسته است [۵۳]. مقدار پارامتر σ_v را می‌توان از $\sigma_v = \frac{\tau_i - \tau_r}{\tau_i - \tau_w}$ تعیین کرد که در آن τ_i ، τ_r و τ_w به ترتیب ممان‌های مماسی مولکول‌های ورودی، انعکاسی و بازتولید شده هستند. عدد نادسن برای تعیین رژیم جریان سیالات مختلف اعم از مایع یا گاز استفاده می‌شود. با صرف نظر کردن از میدان مغناطیسی (یعنی با $B=0$)، ضریب تصحیح سرعت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$VCF = \frac{U_{ave}^{slip}}{U_{ave}^{no-slip}} = \frac{1}{Cr(Kn)} \left(4 \left(\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} \right) \left(\frac{Kn}{1-bKn} \right) + 1 \right) \quad (31)$$

در رابطه فوق، $Cr(Kn)$ و b به ترتیب ضریب تراکم (رقیق‌شدگی) سیال و ضریب لغزش کلی هستند. لازم به ذکر است $Cr(Kn)$ به صورت نسبت لزجت دینامیکی به لزجت کل (بالک) سیال تعریف می‌شود. این ضریب براساس روابط پیشنهادی پلارد^{۱۹} برای سیال ویسکوز به صورت $Cr(Kn) = \frac{1}{1+\alpha Kn}$ محاسبه می‌شود [۵۴]. در این رابطه، α یک مقدار ثابت تئوری است که با اسفاده از رابطه

پاسخ می‌تواند این باشد که این میدان‌های نیرویی بر روی پارامترهای سمت چپ معادله، یعنی چگالی و سرعت‌ها، اثراتی خواهند گذاشت که باید آنها را مورد توجه قرار داد و در معادلات حاکم بر حرکت وارد نمود. به عنوان مثال در ادامه تأثیر میدان مغناطیسی بر سرعت المان‌های سیال و نحوه اعمال آن در معادلات حاکم ارائه می‌شود.

۲-۴-۱. ضریب اصلاح سرعت

برای در نظر گرفتن اثرات وابسته به اندازه سیال عبوری، شرایط مرزی لغزشی سیال و تأثیر آن بر دینامیک نانوسازه و نیز اثرات ناشی از نیروهای حجمی اعمال شده، یک ضریب تصحیح سرعت^{۱۵} (VCF) معرفی می‌شود [۵۰]. برای این منظور، در معادلات حاکم بر برهمکنش سیال-سازه، پارامتر سرعت سیال باید در ضریب VCF ضرب شود. این پارامتر بدون بعد توسط محققان برای شرایط مختلف و به روش‌های مختلف محاسبه و تعریف شده است. به عنوان مثال، میدان مغناطیسی می‌تواند مشخصات سیال عبوری را از یک فرم سهموی به یک قالب بسل تغییر دهد لذا برای در نظر گرفتن تغییر مشخصات سرعت سیال و نیز شرایط مرزی لغزشی سیال، ضریب تصحیح سرعت به شرح زیر تعریف می‌شود [۵۲]:

در رابطه فوق، $Cr(Kn)$ و b به ترتیب ضریب تراکم (رقیق‌شدگی) سیال و ضریب لغزش کلی هستند. لازم به ذکر است $Cr(Kn)$ به صورت نسبت لزجت دینامیکی به لزجت کل (بالک) سیال تعریف می‌شود. این ضریب براساس روابط پیشنهادی پلارد^{۱۹} برای سیال ویسکوز به صورت $Cr(Kn) = \frac{1}{1+\alpha Kn}$ محاسبه می‌شود [۵۴]. در این رابطه، α یک مقدار ثابت تئوری است که با اسفاده از رابطه

جدول ۱. مقادیر پارامترهای جریان نانوسیال [۵۰]

پارامتر	نماد	محدوده مقدار
عدد نادسن	Kn	برای مایعات ۰/۰۱ - ۰/۱ برای گازها ۰/۰۰۱ - ۲
ضریب تصحیح مومنتوم مماسی	σ_v	۰/۷
ضریب لغزش کلی	b	-۱
سایر پارامترهای آزمایشگاهی	α_k, α_B	۰/۴

۳. استخراج معادلات دینامیکی حاکم

۳-۱. تئوری پیشنهادی تغییر شکل برشی مرتبه بالای سینوسی غیرمحلّی در مختصات استوانه‌ای (CSN-HSDT)

با توجه به دقت، سازگاری و دیگر مزایای ذکر شده‌ی مدل آمابیلی-ردی [۴۰] در اینجا سعی بر آن است که با تعمیم این مدل به یک مدل جامع در بردارنده جابه‌جایی‌ها، دوران‌ها و کشش برای بررسی تفرق فونون‌ها و فرکانس‌های نانوسیستم مورد بررسی دست یافت. در این زیربخش، مجموعه معادلات اساسی یعنی معادلات سازگاری، معادلات ساختاری و معادلات تعادل براساس مدل پیشنهادی تغییر شکل برشی مرتبه بالای استوانه‌ای-سینوسی-غیرمحلّی استخراج می‌شوند. همچنین در

این زیربخش به کرنش‌های حاصله از نیروهای اعمال شده نیز پرداخته می‌شود. نیروی لورنتس و نیروی برشی ناشی از بستر الاستیکی به‌صورت نیروهای گسترده به سیستم وارد می‌شوند و در بخش‌های بعدی مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۳-۱-۱. معادلات سازگاری

در اینجا با در نظر گرفتن مختصات پوسته استوانه‌ای، روابط کرنش-جابه‌جایی (معادلات سازگاری) با استفاده از مدل پیشنهادی ارائه می‌شود. لذا با در نظر گرفتن مؤلفه‌های کرنش در یک نقطه دلخواه از پوسته، معادلات سازگاری با توجه به مختصات و میدان جابه‌جایی ارائه شده (معادلات ۱-الف تا ۱-ج و فرضیه ون-کارمن برای روابط غیرخطی کرنش‌های مرتبط با جابه‌جایی‌ها، به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^0 + \lambda_x^0 + z(\lambda_x^{11} + z\lambda_x^{12} + z^2\lambda_x^{13}) + \xi\lambda_x^2 + \zeta\lambda_x^3 + \zeta^2\lambda_x^4 + \zeta z(\lambda_x^{51} + z\lambda_x^{52} + z^2\lambda_x^{53}) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \lambda_\theta^0 + z(\lambda_\theta^{11} + z\lambda_\theta^{12} + z^2\lambda_\theta^{13}) + \xi\lambda_\theta^2 + \zeta\lambda_\theta^3 + \zeta^2\lambda_\theta^4 + \zeta z(\lambda_\theta^{51} + z\lambda_\theta^{52} + z^2\lambda_\theta^{53}) \\ \varepsilon_{zz} &= \xi\varepsilon_{zz}^0 \\ \gamma_{x\theta} &= \gamma_{x\theta}^0 + \lambda_{x\theta}^0 + z(\lambda_{x\theta}^{11} + z\lambda_{x\theta}^{12} + z^2\lambda_{x\theta}^{13}) + \xi\lambda_{x\theta}^2 + \zeta\lambda_{x\theta}^3 + \zeta^2\lambda_{x\theta}^4 + \zeta z(\lambda_{x\theta}^{51} + z\lambda_{x\theta}^{52} + z^2\lambda_{x\theta}^{53}) \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{xz}^0 + \lambda_{xz}^0 + z(\lambda_{xz}^{11} + z\lambda_{xz}^{12} + z^2\lambda_{xz}^{13}) + \xi\lambda_{xz}^2 + \zeta\lambda_{xz}^3 + \zeta^2\lambda_{xz}^4 + \zeta z(\lambda_{xz}^{51} + z\lambda_{xz}^{52} + z^2\lambda_{xz}^{53}) \\ \gamma_{\theta z} &= \gamma_{\theta z}^0 + \lambda_{\theta z}^0 + z(\lambda_{\theta z}^{11} + z\lambda_{\theta z}^{12} + z^2\lambda_{\theta z}^{13}) + \xi\lambda_{\theta z}^2 + \zeta\lambda_{\theta z}^3 + \zeta^2\lambda_{\theta z}^4 + \zeta z(\lambda_{\theta z}^{51} + z\lambda_{\theta z}^{52} + z^2\lambda_{\theta z}^{53}) \end{aligned} \quad (33)$$

که در آن؛

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_{zz}^0 = \varphi \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta}, \quad \gamma_{xz}^0 = \phi_1, \quad \gamma_{\theta z}^0 = \phi_2 \end{aligned} \quad (33-الف)$$

$$\begin{aligned} \lambda_x^0 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right], \quad \lambda_\theta^0 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\varphi}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{v_0}{r} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (33-ب)$$

$$\lambda_{x\theta}^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial \theta}, \quad \lambda_{xz}^0 = \lambda_{\theta z}^0 = 0$$

$$\lambda_x^{11} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \quad \lambda_\theta^{11} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \right), \quad \lambda_{x\theta}^{11} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right) \quad \lambda_{xz}^{11} = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \lambda_{\theta z}^{11} = \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \quad (ج-۳۴)$$

$$\lambda_x^{12} = 0, \quad \lambda_\theta^{12} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right), \quad \lambda_{x\theta}^{12} = +\frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta} \right) \quad (د-۳۳)$$

$$\lambda_{xz}^{12} = -\frac{4}{h^2} \left(\phi_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right), \quad \lambda_{\theta z}^{12} = -\frac{4}{h^2} (\phi_2) + \frac{v_0}{r^3}$$

$$\lambda_x^{13} = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right), \quad \lambda_{xz}^{13} = \lambda_{\theta z}^{13} = 0 \quad \lambda_\theta^{13} = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{3r^2} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \right) \quad (ه-۳۳)$$

$$\lambda_{x\theta}^{13} = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) + \frac{1}{6r^2} \left(-\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)$$

$$\lambda_x^2 = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \quad \lambda_\theta^2 = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_4}{\partial \theta} \right), \quad \lambda_{x\theta}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right) \quad (و-۳۳)$$

$$\lambda_z^2 = \varphi, \quad \lambda_{xz}^2 = \lambda_{\theta z}^2 = 0$$

$$\lambda_x^3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad \lambda_\theta^3 = \frac{1}{r^2} \left(\varphi \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \varphi \right) + \frac{\varphi}{r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial w_s}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \quad (ز-۳۳)$$

$$\lambda_{x\theta}^3 = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w_b}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w_s}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \left(-\frac{2v_0}{R} \right) + \frac{2\varphi}{R} \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

$$\lambda_{xz}^3 = -\phi_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \lambda_{\theta z}^3 = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial w_s}{\partial \theta}$$

$$\lambda_x^4 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2, \quad \lambda_{xz}^4 = \lambda_{\theta z}^4 = 0 \quad \lambda_\theta^4 = \left(\frac{\varphi}{r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 \quad (ح-۳۳)$$

$$\lambda_{xy}^4 = \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta} + \frac{3}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \lambda_x^{51} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \lambda_\theta^{51} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad \lambda_{x\theta}^{51} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right), \quad \lambda_{xz}^{51} = \lambda_{\theta z}^{51} = 0 \quad (ط-۳۳)$$

$$\lambda_x^{52} = 0, \quad \lambda_\theta^{52} = \frac{1}{2r^3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \quad \lambda_{x\theta}^{52} = \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta}, \quad \lambda_{xz}^{52} = -\frac{4}{h^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad \lambda_{\theta z}^{52} = -\frac{4}{rh^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (ی-۳۳)$$

$$\lambda_x^{53} = -\frac{4}{3h^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \lambda_{xz}^{53} = \lambda_{\theta z}^{53} = 0 \quad \lambda_\theta^{53} = -\frac{4}{3r^2 h^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{3r^4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \quad (ک-۳۳)$$

$$\lambda_{x\theta}^{53} = -\frac{8}{3rh^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta} \right) + \frac{1}{6r^3} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta} \right)$$

۳-۱-۲. معادلات ساختاری

از تئوری غیرمحلّی ارینگن و مطابق با روابط و معادلات دیفرانسیلی حاکم بر تئوری درنظرگرفته شده، قانون هوک (روابط تنش-کرنش) برای روابط تنش و کرنش در مختصات

براساس توضیحات پیشین در ارتباط با لزوم درنظر گرفتن اثرات اندازه و مقیاس کوچک بر رفتار و ویژگی‌های سیستم، با استفاده

استوانه‌ای در اینجا به صورت زیر بیان خواهد شد [۱۴]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{x\theta} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} - (e_0 a)^2 \nabla^2 \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{x\theta} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

۳-۱-۳. معادلات تعادل

روابط بین نیروها و ممان‌های داخلی با متجه‌های تنش و کوپل براساس تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و مدل پیشنهادی در این تحقیق به صورت زیر تعریف می‌شوند:

که در آن $Q_{12} = Q_{13} = Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = \frac{E}{1-\nu^2}$ و $Q_{23} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}$ و $Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E}{1+\nu}$ برقرار بوده و عملگر لاپلاسین عبارت است از $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

$$\Gamma^j - (e_0 a)^2 \nabla^2 \Gamma^j = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_i Y^j dz \quad \text{for } i, j = 1, 2, 3 \quad (35)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= N_i, M_i^b, M_i^s, R_i^b, R_i^s, P_i^b, P_i^s, Q_i^a, Q_i^b, Q_i^c, Q_i^d \\ Y^1 &= 1, z, \xi, z^2, z^3, \zeta, \zeta^2, z\zeta, z^2\zeta, z^3\zeta, z^2\zeta^2 \quad \text{for } i = xx, \theta\theta, x\theta \\ \Gamma^2 &= S_i^a, S_i^b, S_i^c, S_i^d, S_i^e \\ Y^2 &= 1, \zeta, z, z^2, z^2\zeta \quad \text{for } i = xz, \theta z \\ \Gamma^3 &= N_i \\ Y^3 &= \zeta' \quad \text{for } i = zz \end{aligned} \quad (36)$$

نیروهای محوری، ممان‌های خمشی، ممان‌های برشی و نیروهای برشی در مرتبه‌های بالا هستند. همچنین با تعریف پارامترهای زیر،

در روابط فوق $Q_i^a, P_i^s, P_i^b, R_i^s, R_i^b, M_i^s, M_i^b, N_i, Q_i^d, Q_i^c, Q_i^b, S_i^e$ و $S_i^d, S_i^c, S_i^b, S_i^a$ به ترتیب بیان گر

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{ij}, B_{ij}^a, B_{ij}^b, B_{ij}^c, B_{ij}^d, B_{ij}^e, B_{ij}^f, C_{ij}^a \\ C_{ij}^b, D_{ij}^a, D_{ij}^b, D_{ij}^c, D_{ij}^d, E_{ij}^a, E_{ij}^b, E_{ij}^c \end{pmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, \xi, \xi^2, \xi^3) Q_{ij} dz \\ \begin{pmatrix} F_{ij}^a, F_{ij}^b, F_{ij}^c, F_{ij}^d, F_{ij}^e, F_{ij}^f \\ O_{ij}^a, O_{ij}^b, O_{ij}^c, O_{ij}^d, O_{ij}^e, O_{ij}^f \end{pmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (z\zeta, z^2\zeta, z^3\zeta, z^4\zeta, z^5\zeta, z^6\zeta, z\zeta^2, z^2\zeta^2, z^3\zeta^2, z^4\zeta^2, z^5\zeta^2, z^6\zeta^2) Q_{ij} dz \\ \begin{pmatrix} H_{ij}^a, H_{ij}^b, S_{ij}^a, S_{ij}^b, S_{ij}^c, S_{ij}^d, S_{ij}^e, T_{ij}^a, T_{ij}^b, K_{ij}^a, K_{ij}^b, K_{ij}^c, K_{ij}^d \\ L_{ij}^a, L_{ij}^b, L_{ij}^c, L_{ij}^d, L_{ij}^e, L_{ij}^f, L_{ij}^g, L_{ij}^h \end{pmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\xi\zeta, \xi\zeta^2, z\zeta^3, z^2\zeta^3, z^3\zeta^3, z^4\zeta^3, z^5\zeta^3, z\zeta^4, z^2\zeta^4, z\xi\zeta, z^2\xi\zeta, z^3\xi\zeta, z^2\xi\zeta^2) Q_{ij} dz \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\zeta', z\zeta', z^2\zeta', z^3\zeta', \xi\zeta', \xi\zeta'^2, \zeta'^2\zeta', z\zeta\zeta', z^2\zeta\zeta', z^3\zeta\zeta', z^2\zeta^2\zeta', \zeta'^2\zeta') Q_{ij} dz \end{aligned} \quad (37)$$

در روابط فوق $i, j = 1, \dots, 6$ هستند و ξ' مشتق تابع سینوسی (معادله ۴) نسبت به z است. سپس با گسسته‌سازی روابط و مرتب‌سازی و نیز با در نظر داشتن کرنش‌های سایر

عوامل به‌عنوان مثال کرنش‌های حرارتی و رطوبتی، رابطه ۳۵ را به فرم ماتریسی زیر می‌توان بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} [\omega_1] \\ [\omega_2] \\ [\omega_3] \\ [\omega_4] \end{bmatrix} - (e_0 a)^2 \nabla^2 \begin{bmatrix} [\omega_1] \\ [\omega_2] \\ [\omega_3] \\ [\omega_4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\vartheta_1] & [\vartheta_2] & [\vartheta_3] & [\vartheta_4] \\ [\vartheta_5] & [\vartheta_6] & [\vartheta_7] & [\vartheta_8] \\ [\vartheta_9] & [\vartheta_{10}] & [\vartheta_{11}] & [\vartheta_{12}] \\ [\vartheta_{13}] & [\vartheta_{14}] & [\vartheta_{15}] & [\vartheta_{16}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Lambda_1] \\ [\Lambda_2] \\ [\Lambda_3] \\ [\Lambda_4] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [\omega_1^E] \\ [\omega_2^E] \\ [\omega_3^E] \\ [\omega_4^E] \end{bmatrix} \quad (38\text{-الف})$$

$$\begin{bmatrix} [\omega_5] \\ [\omega_6] \end{bmatrix} - (e_0 a)^2 \nabla^2 \begin{bmatrix} [\omega_5] \\ [\omega_6] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\vartheta_{17}] \\ [\vartheta_{18}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Lambda_5] \\ [\Lambda_6] \end{bmatrix} \quad (38\text{-ب})$$

که در این روابط،

$$\begin{aligned} [\omega_1] &= [N_{xx} \ N_{\theta\theta} \ N_{x\theta} \ N_{zz} \ M_{xx}^b \ M_{\theta\theta}^b \ M_{x\theta}^b \ M_{xx}^s \ M_{\theta\theta}^s]^T \\ [\omega_2] &= [M_{x\theta}^s \ P_{xx}^b \ P_{\theta\theta}^b \ P_{x\theta}^b \ P_{xx}^s \ P_{\theta\theta}^s \ P_{x\theta}^s \ R_{xx}^b \ R_{\theta\theta}^b]^T \\ [\omega_3] &= [R_{x\theta}^b \ R_{xx}^s \ R_{\theta\theta}^s \ R_{x\theta}^s \ Q_{xx}^a \ Q_{\theta\theta}^a \ Q_{x\theta}^a \ Q_{xx}^b \ Q_{\theta\theta}^b]^T \\ [\omega_4] &= [Q_{x\theta}^b \ Q_{xx}^c \ Q_{\theta\theta}^c \ Q_{x\theta}^c \ Q_{xx}^d \ Q_{\theta\theta}^d \ Q_{x\theta}^d]^T \\ [\omega_5] &= [S_{xz}^a \ S_{xz}^b \ S_{xz}^c \ S_{xz}^d \ S_{xz}^e]^T \\ [\omega_6] &= [S_{\theta z}^a \ S_{\theta z}^b \ S_{\theta z}^c \ S_{\theta z}^d \ S_{\theta z}^e]^T \end{aligned} \quad (39\text{-الف})$$

$$\begin{aligned} [\omega_1^E] &= [N_{xx}^E \ N_{\theta\theta}^E \ N_{x\theta}^E \ N_{zz}^E \ M_{xx}^{bE} \ M_{\theta\theta}^{bE} \ M_{x\theta}^{bE} \ M_{xx}^{sE} \ M_{\theta\theta}^{sE}]^T \\ [\omega_2^E] &= [M_{x\theta}^{sE} \ P_{xx}^{bE} \ P_{\theta\theta}^{bE} \ P_{x\theta}^{bE} \ P_{xx}^{sE} \ P_{\theta\theta}^{sE} \ P_{x\theta}^{sE} \ R_{xx}^{bE} \ R_{\theta\theta}^{bE}]^T \\ [\omega_3^E] &= [R_{x\theta}^{bE} \ R_{xx}^{sE} \ R_{\theta\theta}^{sE} \ R_{x\theta}^{sE} \ Q_{xx}^{aE} \ Q_{\theta\theta}^{aE} \ Q_{x\theta}^{aE} \ Q_{xx}^{bE} \ Q_{\theta\theta}^{bE}]^T \\ [\omega_4^E] &= [Q_{x\theta}^{bE} \ Q_{xx}^{cE} \ Q_{\theta\theta}^{cE} \ Q_{x\theta}^{cE} \ Q_{xx}^{dE} \ Q_{\theta\theta}^{dE} \ Q_{x\theta}^{dE}]^T \end{aligned} \quad (39\text{-ب})$$

$$\begin{aligned} [\Lambda_1] &= [\varepsilon_{xx}^0 + \lambda_{xx}^0 \ \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \lambda_{\theta\theta}^0 \ \gamma_{x\theta}^0 + \lambda_{x\theta}^0 \ \varepsilon_{zz}^0]^T \\ [\Lambda_2] &= [\lambda_{xx}^{11} \ \lambda_{x\theta}^{11} \ \lambda_{\theta\theta}^{11} \ \lambda_{xx}^{12} \ \lambda_{x\theta}^{12} \ \lambda_{\theta\theta}^{12} \ \lambda_{xx}^{13} \ \lambda_{x\theta}^{13} \ \lambda_{\theta\theta}^{13}]^T \\ [\Lambda_3] &= [\lambda_{xx}^{21} \ \lambda_{x\theta}^{21} \ \lambda_{\theta\theta}^{21} \ \lambda_{xx}^{22} \ \lambda_{x\theta}^{22} \ \lambda_{\theta\theta}^{22} \ \lambda_{xx}^{23} \ \lambda_{x\theta}^{23} \ \lambda_{\theta\theta}^{23}]^T \\ [\Lambda_4] &= [\lambda_{xx}^{51} \ \lambda_{x\theta}^{51} \ \lambda_{\theta\theta}^{51} \ \lambda_{xx}^{52} \ \lambda_{x\theta}^{52} \ \lambda_{\theta\theta}^{52} \ \lambda_{xx}^{53} \ \lambda_{x\theta}^{53} \ \lambda_{\theta\theta}^{53}]^T \\ [\Lambda_5] &= [\gamma_{xz}^0 \ \lambda_{xz}^{11} \ \lambda_{xz}^{12} \ \lambda_{xz}^{13} \ \lambda_{xz}^{21} \ \lambda_{xz}^{22} \ \lambda_{xz}^{23} \ \lambda_{xz}^{31} \ \lambda_{xz}^{32} \ \lambda_{xz}^{33}]^T \\ [\Lambda_6] &= [\gamma_{\theta z}^0 \ \lambda_{\theta z}^{11} \ \lambda_{\theta z}^{12} \ \lambda_{\theta z}^{13} \ \lambda_{\theta z}^{21} \ \lambda_{\theta z}^{22} \ \lambda_{\theta z}^{23} \ \lambda_{\theta z}^{31} \ \lambda_{\theta z}^{32} \ \lambda_{\theta z}^{33}]^T \end{aligned} \quad (39\text{-ج})$$

علاوه‌براین، پارامترهای الکتریکی در روابط ۳۹-الف و ب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

همچنین ماتریس‌های $[\vartheta_1]$ تا $[\vartheta_{18}]$ براساس معادله ۳۷ تعیین شده که این روابط به‌علت حجم زیاد در صورت نیاز با جزئیات به‌طور کامل به‌عنوان یک پیوست جداگانه ارائه می‌شوند.

$$\begin{pmatrix} N_i^E, M_i^{bE}, M_i^{sE}, R_i^{bE}, R_i^{sE}, \\ P_i^{bE}, P_i^{sE}, Q_i^{aE}, Q_i^{bE}, Q_i^{cE}, Q_i^{dE} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} e_{pq} E_i \left(1, z, \xi, z^2, z^3, \zeta, \zeta^2, \right) dz \quad (40)$$

$$\text{for } \begin{cases} i = x, \theta, z \\ p = 1, 2, \dots, 6 \\ q = 1, 2, 3 \end{cases}$$

به‌دست می‌آیند. این روابط در صورت نیاز به‌طور کامل به‌عنوان یک پیوست جداگانه برای علاقمندان ارائه می‌شوند. در نهایت، با جای‌گذاری مؤلفه‌های کرنش از معادله‌سازگاری تعریف شده

با جای‌گذاری معادلات ۳۹-الف تا ج، ۴۰ و روابط وابسته در معادلات ۳۸-الف و ۳۸-ب و نیز با در نظر داشتن معادلات ۳۷، روابط نیروها و ممان‌ها در معادله ۳۸ به‌صورت تفکیک شده

(معادلات ۳۳-الف تا ۳۳-ک) در معادلات ساختاری به دست آمده در روابط ۳۴، مؤلفه‌های نیرو و ممان پوسته استوانه‌ای غیرمحلّی حاصل خواهند شد.

۲-۳. روش انرژی

برای استخراج معادلات حاکم بر مسئله در اینجا از روش انرژی استفاده می‌شود. لذا با اعمال اصل همیلتون معادلات حرکت برهم کنش نانوسیال-نانوسازه به دست می‌آیند. این اصل را برای یک جسم الاستیک به فرم گسسته زیر می‌توان بیان کرد [۵۵]:

$$\delta \Pi = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(U_{\text{strain energy}} + U_{\text{virtual work}} - U_{\text{kinetic energy}} \right) dt = 0 \quad (41)$$

در ادامه، انرژی کرنشی^{۲۰}، کار مجازی ناشی از نیروهای خارجی^{۲۱} و انرژی جنبشی سیستم شامل سازه دارای حرکت محوری و سیال عبوری^{۲۲} به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۱-۲-۳. انرژی کرنشی

تغییرات انرژی کرنشی با تعریف Ω که بیان گر سطح (یعنی $d\Omega = dx dz$) است به صورت زیر بیان می‌شود [۵۶]:

$$\delta U_{\text{strain energy}} = \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_i \varepsilon_i) d\Omega dz, \quad \text{for } i = 1, \dots, 6 \quad (42)$$

با استفاده و جای گذاری روابط کرنش-تنش (معادلات سازگاری ۳۴) و روابط نیرو/ممان-تنش (معادلات تعادل ۳۵) در معادله ۴۲ و نیز با توجه به تعریف کلی منته‌های تنش و کوپل در تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی سینوسی-غیرمحلّی در مختصات استوانه‌ای، رابطه انرژی کرنشی را می‌توان گسسته‌سازی کرد.

۲-۲-۳. کار مجازی

تغییرات کار مجازی ناشی از نیروهای اعمال شده بر سیستم را با استفاده از رابطه کلی زیر می‌توان به دست آورد [۵۷]:

$$\delta U_{\text{virtual work}} = - \int_{-L}^L \int_0^{2k\pi} [p(x, \theta) \delta w] dx d\theta \quad (43)$$

نیروهای خارجی اعمالی در دو نوع کلی هستند: نیروهای حجمی مانند نیروهای حرارتی، رطوبتی و الکتریکی که به عنوان نیروهای کششی و یا انرژی پتانسیل ناشی از بارهای اعمالی نیز شناخته می‌شوند و نیروهای سطحی (بارهای گسترده) مانند

فشار هیدرواستاتیک، نیروهای هیدرودینامیکی، نیروی لورنتس و نیروی برشی ناشی از بستر الاستیکی که بر سیستم اعمال می‌شوند. در مورد نیروهای ناشی از سیال لازم به ذکر است همان‌طور که در زیربخش ۲-۴-۲ برای سیال نانومغناطیسی ذکر شد، با استفاده از سمت چپ معادله ناویر-استوکس (معادله ۲۲)، نیروهای هیدرواستاتیکی به‌طور خودکار در معادله حرکت در نظر گرفته خواهند شد و با توجه به این که مجموعه سیال و سازه به عنوان یک سیستم در نظر گرفته می‌شود، نیروهای هیدرودینامیکی ناشی از سیال عبوری به صورت انرژی جنبشی در زیربخش بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرند. لذا تغییرات بارهای اعمالی بر سیستم با توجه به نیروهای مورد بحث در بخش‌های پیشین به صورت زیر تفکیک و تعریف می‌شوند:

$$\delta U_{\text{body forces works}} = - \int_A N_{xx}^E \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial \delta u_z}{\partial x} r dx d\theta \quad (44\text{-الف})$$

$$\delta U_{\text{surface forces works}} = - \int_S (q_p - f_z) \delta u_z r dx d\theta \quad (44\text{-ب})$$

در روابط فوق $N_{xx}^E = e_{11} E_x h$ بیان گر نیروهای الکتریکی است که از روابط ۱۳ و ۴۰ حاصل و جایگزین می‌شوند. همچنین q_p نیروی برشی ناشی از بستر الاستیکی ویسکو-پاسترناک و f_z نیروی لورنتس اعمال شده بر تار خنثی است که به ترتیب از معادلات ۱۱ و ۲۱ جایگزین می‌شوند.

۳-۲-۳. انرژی جنبشی

تغییرات انرژی جنبشی برای سیستمی مرکب از سیال و سازه در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر حاصل می‌شود [۵۰]:

$$\delta U_{\text{kinetic energy}} = \delta K_{\text{structure}} + \delta K_{\text{fluid}} = (\rho_c + \rho_f) \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\dot{u}_j \dot{\delta u}_j) r d\Omega dz, \quad \text{for } j = x, \theta, z \quad (45)$$

که در آن $\dot{u}_j$ سرعت سازه یا سیال در جهت j و ρ_c و ρ_f به ترتیب چگالی سازه (در اینجا نانوپوسته کربنی) و سیال است. در مسائلی که علاوه بر سرعت جسم، از طرف سیال و یا ذره عبوری نیز بر جسم نیرو وارد می‌شود، به منظور حل دقیق تر مسئله باید به بررسی میزان اثر این نیروی خارجی بر رفتار جنبشی جسم نیز توجه شود. لذا سازه و سیال عبوری به‌طور کلی

یک سیستم در نظر گرفته می‌شود. در این مسائل برهم‌کنش سیال و سازه، براساس اصل فیزیکی شرط سازگاری، از نظر فیزیک مولکولی در نقطه برخورد سازه و سیال، سرعت‌ها و شتاب‌ها در راستای جهت جابه‌جایی باید یکسان باشند. لذا برای یافتن سرعت کل سیستم می‌توان سرعت سیال در نقطه برخورد با سازه را محاسبه کرد. علاوه بر این، در اینجا هم سازه و هم سیال عبوری در مقیاس نانو بوده و بنابراین اثرات اندازه نیز باید در روابط لحاظ شوند. همچنین لازم به ذکر است در اینجا به‌طور عمومی فرض می‌شود سازه و سیال فقط در جهت طولی سرعت $(\dot{u}_x)$ حرکت می‌کنند.

حال با استفاده از مشتق مادی سرعت‌ها و تغییرات آنها در مختصات استوانه‌ای $\left(\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\dot{u}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{u}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)$ معادله ۴۵ را هم برای سازه و هم برای سیال براساس هر یک از روابط میدان جابه‌جایی یعنی معادلات ۱-الف تا ج می‌توان گسسته‌سازی نمود. با در نظر گرفتن شرایط و فرضیات در هر مسئله و انتگرال‌گیری در معادله ۵۲، معادلات حاصل شده نهایی منطبق بر معادلات ناویر-استوکس خواهند بود [۴۲].

شایان ذکر است بدین ترتیب نیروهای هیدرودینامیکی داخلی ناشی از شتاب انتقالی عرضی، شتاب گریز از مرکز و شتاب کوریولیس به ترتیب به صورت عباراتی با ضرایبی به صورت $\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right)$ ، $\dot{u}_{xf}^2 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)$ و $2\dot{u}_{xf} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x}\right)$ در معادلات حرکت ظاهر می‌شوند.

همچنین فشار خارجی یعنی فشار کلی که از طرف نانوپوسته بر سیال وارد می‌شود (فشار بار) و کشش خارجی اعمال شده بر نانوپوسته از طرف سیال (فشار رانش) در سراسر لوله ثابت مانده و یکدیگر را خنثی می‌کنند [۴۲].

۴. روند حل معادلات حرکت

در نهایت با انتگرال‌گیری از معادله ۴۱، گسسته‌سازی و جمع‌آوری ضرایب δu_0 ، δv_0 ، $\delta \varphi$ ، δw_b ، δw_s و $\delta \chi$ معادلات حرکت حاکم بر نانوپوسته دارای حرکت محوری حاوی نانوسیال مغناطیسی تعبیه شده بر روی بستر ویسکو-پاسترناک تحت اعمال میدان‌های نیروهای الکتریکی و مغناطیسی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta u_0: & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(N_{\theta\theta} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} N_{x\theta} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} N_{x\theta} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \\ & - \frac{1}{r^2} \frac{\partial M_{x\theta}^b}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial M_{x\theta}^s}{\partial \theta} = (I_0^c + I_0^f) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + 2(\dot{u}_{xc} I_0^c + (VCF) \dot{u}_{xf} I_0^f) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} - I_1^c \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} \\ & + (\dot{u}_{xc}^2 I_0^c + (VCF)^2 \dot{u}_{xf}^2 I_0^f) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - (c_1 I_3^c + J_0^f) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial t^2} - J_3^c c_1 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} - \left(\frac{I_2^c}{2} + c_1 I_4^c \right) \frac{\partial^3 \chi}{\partial x \partial t^2} \end{aligned} \quad (۴۶-الف)$$

$$\begin{aligned} \delta v_0: & \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(N_{\theta\theta} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} N_{\theta\theta} v_0 - \frac{1}{r^3} \frac{\partial R_{\theta\theta}^b}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta\theta}^b \varphi) + \frac{1}{r^2} (P_{\theta\theta}^b \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}) \\ & + \frac{1}{r^3} S_{\theta z}^d + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} N_{x\theta} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} N_{x\theta} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{x\theta}^b}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{x\theta}^s}{\partial x} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial x} P_{x\theta}^b \varphi + \frac{2}{r} P_{x\theta}^b \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \\ & (I_0^c + \frac{2I_1^c}{r} + \frac{I_2^c}{r^2}) \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + 2\dot{u}_{xc} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial t} + \dot{u}_{xc}^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right] - \bar{I}_1 \frac{\partial^3 w_b}{\partial \theta \partial t^2} + \bar{I}_2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \theta \partial t^2} + \bar{I}_3 \frac{\partial^3 w_s}{\partial \theta \partial t^2} + \bar{I}_4 \frac{\partial^3 \chi}{\partial \theta \partial t^2} \\ & + (I_0^f + \frac{2I_1^f}{r} + \frac{I_2^f}{r^2}) \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + 2(VCF) \dot{u}_{xf} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial t} + (VCF)^2 \dot{u}_{xf}^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (۴۶-ب)$$

$\delta\varphi$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (P_{xx}^s \frac{\partial \varphi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} (P_{xx}^b \frac{\partial w_b}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} (P_{xx}^s \frac{\partial w_s}{\partial x}) - \frac{\partial^2 P_{xx}^s}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (Q_{xx}^a \frac{\partial \chi}{\partial x}) + \frac{4}{3h^2} \frac{\partial^2 Q_{xx}^c}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \times \\ & (P_{\theta\theta}^s \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta\theta}^b \frac{\partial w_b}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta\theta}^s \frac{\partial w_s}{\partial \theta}) + \frac{1}{r} P_{\theta\theta}^b + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta\theta}^b \frac{\partial v_0}{\partial \theta}) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta\theta}^b v_0) - \\ & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P_{\theta\theta}^s}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} P_{\theta\theta}^s \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (Q_{\theta\theta}^a \frac{\partial \chi}{\partial \theta}) - \frac{1}{r^2} Q_{\theta\theta}^a - \frac{1}{2r^3} \frac{\partial^2 Q_{\theta\theta}^b}{\partial \theta^2} + \frac{4}{3r^2 h^2} \frac{\partial^2 Q_{\theta\theta}^c}{\partial \theta^2} + \frac{1}{3r^4} \frac{\partial^2 Q_{\theta\theta}^c}{\partial \theta^2} + N_{zz} \\ & + \frac{\partial S_{xz}^b}{\partial x} - \frac{4}{h^2} \frac{\partial S_{xz}^a}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\theta z}^b}{\partial \theta} - \frac{4}{r h^2} \frac{\partial S_{\theta z}^a}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{x\theta}^b \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{x\theta}^b \frac{\partial w_s}{\partial x} + \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} P_{x\theta}^b \frac{\partial w_b}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} P_{x\theta}^b \frac{\partial w_s}{\partial \theta} + \frac{2}{r} P_{x\theta}^b \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial x} P_{x\theta}^b v_0 - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 P_{x\theta}^s}{\partial x \partial \theta} + \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{x\theta}^s \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\ & \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial x} P_{x\theta}^s \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} Q_{x\theta}^a \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} Q_{x\theta}^a \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^2 Q_{x\theta}^b}{\partial x \partial \theta} + \frac{3r h^2}{6r^3} \frac{\partial^2 Q_{x\theta}^c}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{6r^3} \frac{\partial^2 Q_{x\theta}^c}{\partial x \partial \theta} + N_{xx}^E \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ & + K_w \phi - K_s \nabla^2 \phi + \eta H_x^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_b}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (ج-۴۶)$$

$$\begin{aligned} & = J_3^c c_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - J_6^c c_1^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} - J_4^c c_1 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} - \left(J_3^c c_1 + J_6^c c_1^2 \right) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} \\ & - \left(J_5^c \frac{c_1}{2} + J_7^c c_1^2 \right) \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial t^2} + \bar{I}_2 \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta \partial t^2} + \bar{I}_5 \frac{\partial^4 w_b}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \bar{I}_6 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \bar{I}_7 \frac{\partial^4 w_s}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \bar{I}_8 \frac{\partial^4 \chi}{\partial \theta^2 \partial t^2} \\ & + \left(J_0^{3c} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ & + (J_0^{2c} + J_0^{2f}) \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + (J_1^{2c} + J_1^{2f}) \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + (2\dot{u}_{xc} + 2(\text{VCF})\dot{u}_{xf}) \left(J_0^{3f} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + J_0^{2f} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} \right. \\ & \left. + J_0^{2f} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial t} + J_1^{2f} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} \right) + (\dot{u}_{xc}^2 + (\text{VCF})^2 \dot{u}_{xf}^2) \left(J_0^{3f} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + J_0^{2f} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right. \\ & \left. + J_0^{2f} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + J_1^{2f} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

δw_b :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_{xx}^b}{\partial x^2} - \frac{4}{3h^2} \frac{\partial^2 R_{xx}^s}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (P_{xx}^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 M_{\theta\theta}^b}{\partial \theta^2} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^2 R_{\theta\theta}^b}{\partial \theta^2} - \frac{4}{3r h^2} \frac{\partial^2 R_{\theta\theta}^s}{\partial \theta^2} - \frac{2}{3r^3} \frac{\partial^2 R_{\theta\theta}^s}{\partial \theta^2} + \\ & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta\theta}^b \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}) - \frac{\partial S_{xz}^a}{\partial x} + \frac{4}{h^2} \frac{\partial S_{xz}^d}{\partial x} - \frac{\partial S_{\theta z}^b}{\partial \theta} + \frac{4}{h^2} \frac{\partial S_{\theta z}^a}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 M_{x\theta}^b}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_{x\theta}^b}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 R_{x\theta}^b}{\partial x \partial \theta} \\ & + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 R_{x\theta}^b}{\partial x \partial \theta} - \frac{4}{3r h^2} \frac{\partial^2 R_{x\theta}^s}{\partial x \partial \theta} - \frac{4}{3h^2} \frac{\partial^2 R_{x\theta}^s}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{6r^2} \frac{\partial^2 R_{x\theta}^s}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 M_{x\theta}^s}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_{x\theta}^s}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} P_{x\theta}^b \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{x\theta}^b \frac{\partial \varphi}{\partial x} - N_{xx}^E \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - K_w w_b + K_s \nabla^2 w_b + \eta H_x^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_b}{\partial \theta^2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) \\ & = I_1^c \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - c_1 J_4^{2c} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} - I_2^c \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} - (c_1 I_4^c + J_1^{1c}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} - \left(c_1 I_5^c + \frac{I_3^c}{2} \right) \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial t^2} + \\ & \bar{I}_1 \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta \partial t^2} - \bar{I}_9 \frac{\partial^4 w_b}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \bar{I}_5 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \bar{I}_{10} \frac{\partial^4 w_s}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \bar{I}_{11} \frac{\partial^4 \chi}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \left(J_0^{2c} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ & + \left(I_0^c \right) \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + (I_1^c + I_1^f) \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + (2\dot{u}_{xc} + 2(\text{VCF})\dot{u}_{xf}) \left[J_0^{2f} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \right. \\ & \left. + I_0^f \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} + I_0^f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial t} + I_1^f \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} \right] + (\dot{u}_{xc}^2 + (\text{VCF})^2 \dot{u}_{xf}^2) \left[J_0^{2f} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + I_0^f \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + I_0^f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + I_1^f \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (د-۴۶)$$

$$\begin{aligned}
 \delta w_s: & \frac{\partial^2 M_{xx}^s}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (P_{xx}^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 M_{\theta\theta}^s}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta\theta}^b \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}) + \\
 & \frac{\partial S_{xz}^b}{\partial x} + \frac{\partial S_{\theta z}^b}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} P_{x\theta}^b \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{x\theta}^b \frac{\partial \varphi}{\partial x} + N_{xx}^E \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\
 & + K_w w_s - K_s \nabla^2 w_s + \eta H_x^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_b}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \\
 & = (c_1 I_3^c + J_0^{1c}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - (c_1 I_4^c + J_1^{1c}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} - \\
 & (c_1^2 J_6^{2c} + c_1 J_3^{4c}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} - (c_1^2 I_6^c + 2c_1 J_3^{1c} + J_1^{4c}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} \\
 & - \left(\frac{c_1}{2} I_5^c + \frac{J_2^{1c}}{2} + c_1^2 I_7^c + c_1 J_4^{1c} \right) \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial t^2} + \bar{I}_3 \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta \partial t^2} + \\
 & \bar{I}_{10} \frac{\partial^4 w_b}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \bar{I}_7 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \bar{I}_{12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \bar{I}_{13} \frac{\partial^4 \chi}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \\
 & (J_0^{2c} + J_0^{2f}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + (I_0^c + I_0^f) \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + (I_1^c + I_1^f) \\
 & \times \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + (2\dot{u}_{xc} + 2(\text{VCF})\dot{u}_{xf}) \left[J_0^{2f} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + I_0^f \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} \right. \\
 & \left. + I_0^f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial t} + I_1^f \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} \right] \\
 & + (\dot{u}_{xc}^2 + (\text{VCF})^2 \dot{u}_{xf}^2) \left[J_0^{2f} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + I_0^f \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right. \\
 & \left. + I_0^f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + I_1^f \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right]
 \end{aligned} \tag{۵-۴۶}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \chi: & \frac{\partial}{\partial x} (Q_{xx}^a \frac{\partial \varphi}{\partial x}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (Q_{\theta\theta}^a \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}) + \frac{\partial S_{xz}^c}{\partial x} + \frac{\partial S_{\theta z}^c}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} Q_{x\theta}^a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} Q_{x\theta}^a \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + N_{xx}^E \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \\
 & + K_w \chi - K_s \nabla^2 \chi + \eta H_x^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_b}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) \\
 & = (I_2^c + c_1 I_4^c) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - \left(\frac{c_1}{2} J_5^{2c} + c_1^2 J_7^{2c} \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} - \left(\frac{I_3^c}{2} + c_1 I_5^c \right) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \\
 & - \left(\frac{c_1}{2} I_5^c + c_1^2 I_7^c + c_1 J_4^{1c} + \frac{J_2^{1c}}{2} \right) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} - \left(I_4^c \frac{1}{4} + c_1 I_6^c + c_1^2 I_8^c \right) \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial t^2} \\
 & + \bar{I}_4 \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta \partial t^2} + \bar{I}_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \bar{I}_8 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \bar{I}_{13} \frac{\partial^4 w_s}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \bar{I}_{14} \frac{\partial^4 \chi}{\partial \theta^2 \partial t^2} \\
 & + (J_0^{2c} + J_0^{2f}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + (I_0^c + I_0^f) \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + (I_1^c + I_1^f) \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \\
 & (2\dot{u}_{xc} + 2(\text{VCF})\dot{u}_{xf}) \left[J_0^{2f} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + I_0^f \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} + I_0^f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial t} + I_1^f \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} \right] \\
 & + (\dot{u}_{xc}^2 + (\text{VCF})^2 \dot{u}_{xf}^2) \left[J_0^{2f} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + I_0^f \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + I_0^f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + I_1^f \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right]
 \end{aligned} \tag{۵-۴۷}$$

تعریف و ارائه شده‌اند:

لازم به ذکر است در معادلات حاصل شده فوق روابط زیر

$$c_1 = \frac{4}{3h^2}, \quad c_2 = -\frac{h^2}{8r^2}, \quad c_3 = \frac{1}{2r}, \quad c_4 = \frac{1}{3h^2}, \quad c_5 = -\frac{1}{r^2}, \quad c_6 = \frac{1}{r^3} \quad (۴۷-الف)$$

$$\{I_m^n\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^n z^m dz,$$

$$\{J_m^{1n}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^n \xi z^m dz$$

$$\{J_m^{2n}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^n \zeta z^m dz$$

$$\{J_m^{3n}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^n \zeta^2 z^m dz$$

$$\{J_1^{4n}, J_2^{4n}, J_3^{4n}, J_4^{4n}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^n (\xi^2, \zeta \xi z^2, \zeta \xi z^3, \zeta \xi z^4) dz$$

$$\quad \quad \quad \text{for } \begin{cases} m = 0, \dots, 10 \\ n = f, c \end{cases} \quad (۴۷-ب)$$

$$\bar{I}_1 = \left[\begin{aligned} & \left(I_1^c + \frac{I_2^c}{r} \right) + c_1 \left(I_3^c + \frac{I_4^c}{r} \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] \\ & + \frac{c_1 c_3}{2} \left(I_4^c + \frac{I_5^c}{r} \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] \end{aligned} \right] \quad (۴۸-الف)$$

$$\bar{I}_2 = \left[\begin{aligned} & c_3 \left(J_2^{2c} + \frac{J_3^{2c}}{r} \right) - \frac{c_1}{r} \left(J_3^{2c} + \frac{J_4^{2c}}{r} \right) [1 + c_2] \\ & - \frac{1}{r^2} \left(J_4^{2c} + \frac{J_5^{2c}}{r} \right) \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \end{aligned} \right] \quad (۴۸-ب)$$

$$\bar{I}_3 = \left[\begin{aligned} & c_3 \left(I_2^c + \frac{I_3^c}{r} \right) - \frac{c_1}{r} \left(I_0^c + \frac{I_1^c}{r} \right) [1 + c_2] + \\ & c_5 \left(I_4^c + \frac{I_5^c}{r} \right) \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) - \left(J_0^{1c} + \frac{J_1^{1c}}{r} \right) \end{aligned} \right] \quad (۴۸-ج)$$

$$\bar{I}_4 = \left[\begin{aligned} & c_3 \left(I_3^c + \frac{I_4^c}{r} \right) - c_3 \left(I_2^c + \frac{I_3^c}{r} \right) - \\ & \frac{c_1}{r} \left(I_4^c + \frac{I_5^c}{r} \right) [1 + c_2] - c_1 c_2 \left(I_3^c + \frac{I_4^c}{r} \right) \\ & - c_3^2 \left(I_5^c + \frac{I_6^c}{r} \right) \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] + \frac{c_6}{6} \left(I_4^c + \frac{I_5^c}{r} \right) \end{aligned} \right] \quad (۴۸-د)$$

$$\bar{I}_5 = \left[\begin{aligned} & \left(c_3 J_3^{2c} + c_1 c_3 J_5^{2c} + \frac{c_1 c_3^2}{2} J_6^{2c} \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] + \\ & \left(-\frac{c_1}{r} J_4^{2c} - \frac{c_1^2}{r} J_6^{2c} + \frac{c_1^2 c_5}{4} J_7^{2c} \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] [1 + c_2] \\ & + (c_5 J_5^{2c} + c_1 c_5 J_7^{2c}) \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \\ & + \left(-\frac{c_1 c_6}{4} J_8^{2c} \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \end{aligned} \right] \quad (۴۸-ه)$$

$$\bar{I}_6 = \left[\begin{aligned} & c_3^2 J_4^{3c} - c_6 J_6^{3c} \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) + c_1 c_5 J_5^{3c} [1 + c_2] \\ & - c_1^2 c_5 J_6^{3c} [1 + c_2]^2 + 2 c_1 c_6 J_7^{3c} [1 + c_2] \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \\ & + c_5^2 J_8^{3c} \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right)^2 \end{aligned} \right] \quad (۴۸-و)$$

$$\bar{I}_7 = \left[\begin{aligned} &+c_3^2 J_4^{2c} + \frac{c_1 c_5}{2} J_2^{2c} [1+c_2] - c_6 J_6^{2c} \left(c_4 [1+c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \\ &-c_3 J_2^{4c} - \frac{c_1 c_6}{2} J_5^{2c} [1+c_2] - c_1^2 c_5 J_3^{2c} [1+c_2]^2 \\ &+c_1 c_6 J_7^{2c} [1+c_2] \left(c_4 [1+c_2] + \frac{c_3}{4} \right) + 2c_1 c_3 J_3^{4c} [1+c_2] + \\ &c_1 c_6 J_4^{2c} \left(c_4 [1+c_2] + \frac{c_3}{4} \right) [1+c_2] + c_5^2 J_8^{2c} \left(c_4 [1+c_2] + \frac{c_3}{4} \right)^2 \\ &-c_5 J_4^{4c} \left(c_4 [1+c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \end{aligned} \right] \quad (ج-۴۸)$$

$$\bar{I}_8 = \left[\begin{aligned} &c_3^2 (J_5^{2c} - J_4^{2c}) - c_1 c_2 c_3 J_5^{2c} + \frac{c_3 c_6}{6} J_6^{2c} + \\ &\left(c_1 c_5 J_6^{2c} - \frac{c_1 c_5}{2} J_5^{2c} + \frac{c_1^2 c_2}{r} J_6^{2c} - \frac{c_1 c_3 c_6}{3} J_7^{2c} \right) [1+c_2] \\ &-c_3^3 J_7^{2c} \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] - c_1^2 c_5 J_7^{2c} [1+c_2]^2 + \\ &\frac{c_1 c_6}{4} J_8^{2c} [1+c_2] \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] \\ &+ \left(c_3 c_5 J_7^{2c} - c_3 c_5 J_6^{2c} - c_1 c_2 c_5 J_7^{2c} + \frac{c_5 c_6}{6} J_8^{2c} \right) \left(c_4 [1+c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \\ &+ c_1 c_6 J_8^{2c} \left(c_4 [1+c_2] + \frac{c_3}{4} \right) [1+c_2] \\ &-c_3^2 c_5 J_9^{2c} \left(c_4 [1+c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] \end{aligned} \right] \quad (ز-۴۸)$$

$$\bar{I}_9 = \left[\begin{aligned} &\left(I_2^c + 2c_1 I_4^c + c_1^2 I_6^c \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right]^2 + \\ &2 \left(\frac{c_1 c_3}{2} I_5^c + \frac{c_1^2 c_3}{2} I_7^c \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right]^2 \\ &+ \left(\frac{c_1 c_3}{2} \right)^2 I_8^c \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right]^2 \end{aligned} \right] \quad (ب-۴۸)$$

$$\bar{I}_{10} = \left[\begin{aligned} &c_3 I_3^c - \frac{c_1}{r} I_1^c [1+c_2] + c_5 I_5^c \left(c_4 [1+c_2] + \frac{c_3}{4} \right) - J_1^{1c} \\ &+ \left(c_1 c_3 I_5^c - c_1 J_3^{1c} - \frac{c_1 c_5}{8} I_6^c - \frac{c_1 c_3}{2} J_4^{1c} \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] \\ &- \left(\frac{c_1^2}{r} I_3^c + (c_1 c_3)^2 I_4^c \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] [1+c_2] \\ &+ \left(c_1 c_5 I_7^c - \frac{c_1 c_6}{4} I_8^c \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] \left(c_4 [1+c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \end{aligned} \right] \quad (ی-۴۸)$$

$$\bar{I}_{11} = \left[\begin{aligned} &c_3 (I_4^c - I_3^c) - \frac{c_1}{r} I_5^c [1+c_2] - c_1 c_2 I_4^c + \frac{c_5}{4} I_6^c \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] + \\ &\frac{c_6}{6} I_5^c + \left(\frac{c_1 c_3 I_6^c - c_1 c_3 I_5^c - c_1^2 c_2 I_6^c}{6} + \frac{c_1 c_6}{8} I_7^c - \frac{c_1 c_5}{8} I_7^c + \frac{c_1 c_5}{8} I_6^c \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] \\ &- \frac{c_1^2 c_2 c_3}{2} I_7^c + \frac{c_1 c_3 c_6}{12} I_8^c \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] [1+c_2] \\ &- \left(\frac{c_1^2}{r} I_7^c + (c_1 c_3)^2 I_8^c \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] [1+c_2] \\ &- \left(c_1 c_3^2 I_8^c + \frac{c_1 c_3^3}{2} I_9^c \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] \end{aligned} \right] \quad (ک-۴۸)$$

$$\bar{I}_{12} = \left[\begin{aligned} &c_3^2 I_4^c - 2c_3 J_2^{1c} + J_1^{4c} + \left(c_1 c_5 I_2^c + \frac{2c_1}{r} J_0^{1c} \right) [1+c_2] \\ &-c_1^2 c_5 [1+c_2]^2 - (c_6 I_6^c + 2c_5 J_4^{1c}) \left(c_4 [1+c_2] + \frac{c_3}{4} \right) + \\ &2c_1 c_6 I_4^c [1+c_2] \left(c_4 [1+c_2] + \frac{c_3}{4} \right) + c_5^2 I_8^c \left(c_4 [1+c_2] + \frac{c_3}{4} \right)^2 \end{aligned} \right] \quad (ل-۴۸)$$

$$\bar{I}_{13} = \left[\begin{aligned} & c_3^2(I_5^c - I_4^c) - c_1c_2c_3I_5^c + \frac{c_3c_6}{6}I_6^c - c_3(J_3^{1c} - J_2^{1c}) \\ & + c_1c_2J_3^{1c} - \frac{c_6}{6}J_4^{1c} - (c_3^3I_7^c - c_3^2J_5^{1c}) \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] \\ & + \left(\frac{c_1c_5}{2}(I_6^c + I_3^c - I_2^c) - \frac{c_1^2c_2}{r}I_3^c - \frac{c_1c_6}{6r}I_4^c + \frac{c_1}{r}J_4^{1c} \right) [1 + c_2] \\ & - c_1^2c_5I_4^c[1 + c_2]^2 + \frac{c_1c_3^2}{r}I_5^c[1 + c_2] \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] + \\ & \left(c_3c_5I_7^c - c_3c_5I_6^c - c_1c_2c_5I_7^c + \frac{c_5c_6}{6}I_8^c \right) \left(c_4[1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \\ & - \frac{c_1c_5}{r}I_8^c \left(c_4[1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) [1 + c_2] \\ & - c_3^2c_5I_9^c \left(c_4[1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] \end{aligned} \right] \quad (48-م)$$

$$\bar{I}_{14} = \left[\begin{aligned} & c_3^2(I_6^c - 2I_5^c + I_4^c) - 2c_1c_2c_3(I_6^c - I_5^c) \\ & + \frac{c_3c_6}{3}(I_7^c - I_6^c) + c_1^2c_2^2I_6^c - \frac{c_1c_2c_6}{3}I_7^c + \left(\frac{c_6}{6} \right)^2I_8^c \\ & - \left(\frac{2c_1c_3}{r}I_7^c - \frac{2c_1c_3}{r}I_6^c - \frac{2c_1^2c_2}{r}I_7^c + \frac{2c_1c_6}{6r}I_8^c \right) [1 + c_2] - \\ & \left(2c_3^3I_8^c - 2c_3^3I_7^c - 2c_1c_2c_3^2I_8^c + \frac{2c_3^2c_6}{6}I_9^c \right) \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] \\ & + \frac{2c_1c_3^2}{r}I_9^c[1 + c_2] \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] + \frac{c_1^2}{r^2}I_8^c[1 + c_2]^2 \\ & + \left(\frac{c_5}{4} \right)^2I_{10}^c \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right]^2 \end{aligned} \right] \quad (48-ن)$$

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \varphi \\ w_b \\ w_s \\ \chi \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{Bmatrix} Ue^{i(k_x \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} + k_\theta \cos \theta - \omega t)} \\ Ve^{i(k_x \theta(x) + k_\theta \sin \theta - \omega t)} \\ \Phi e^{i(k_x \theta(x) + k_\theta \cos \theta - \omega t)} \\ W_b e^{i(k_x \theta(x) + k_\theta \cos \theta - \omega t)} \\ W_s e^{i(k_x \theta(x) + k_\theta \cos \theta - \omega t)} \\ \chi e^{i(k_x \theta(x) + k_\theta \cos \theta - \omega t)} \end{Bmatrix} \quad (49)$$

که در آن U, V, Φ, W_b, W_s و X دامنه‌های حرکت و ضرایب مجهول حرکت موج هستند، k_x و k_θ دو مؤلفه بردار موج هستند که به زاویه عدد موج k در راستای جهت انتشار در صفحه‌ی $x-\theta$ بستگی دارند. ω فرکانس حرکت موج سیستم است که در نقطه N برابر با فرکانس نایکویست خواهد بود. همچنین t بیان‌گر زمان، i پارامتری برابر با $\sqrt{-1}$ و θ تابعی است که شرایط مرزی هندسی را مشخص می‌کند. تابع θ

در روابط حاصله در این تحقیق زیرنویس C بیان‌گر پارامترهای مرتبط با نانوپوسته کربنی و زیرنویس f مربوط به پارامترهای سیال مورد نظر هستند.

۴-۱. شرایط مرزی

هرچند فرمول‌بندی معادلات میدانی برای هر تئوری مشخص است، اما شرایط مرزی در هر مسئله متفاوت بوده و بنابراین تعیین شرایط مرزی مناسب برای حل مسئله ضروری است. بارگذاری مرزی که به صورت فیزیکی باعث ایجاد تنش، کرنش و میدان جابه‌جایی داخلی می‌شود، نقش عمده‌ای در نحوه عملکرد و رفتار مکانیکی سیستم دارد. براساس شرایط مرزی اساسی و به منظور حل تحلیلی معادلات نهایی حاکم با استفاده از روش ناویر و دستیابی به انتشار موج هارمونیک زمانی، مقدار متغیرهای میدانی در نانو سازه یعنی $u_0, v_0, \varphi, w_b, w_s$ و χ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند [۵۱]:

به عنوان تابع مشخصه محوری نانوسازه مورد بررسی به صورت زیر محاسبه و انتخاب می شود [۴۶]:

$$\theta(x) = \alpha_1 \cosh\left(\frac{\ell_m x}{L}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{\ell_m x}{L}\right) - \kappa_m \left[\alpha_3 \sinh\left(\frac{\ell_m x}{L}\right) + \alpha_4 \sin\left(\frac{\ell_m x}{L}\right) \right] \quad (50)$$

که در آن α_i ($i = 1, \dots, 4$) ثابت هایی هستند که بسته به نوع انتهای پوسته یا لوله می توانند مقادیر ۰، ۱ و یا -۱ داشته باشند. علاوه بر این، ℓ_m و κ_m به ترتیب نمایانگر ریشه معادلات غیرجبری به دست آمده از شرایط مرزی نانوپوسته و پارامترهای متناظر با آنها هستند. به منظور حل تحلیلی معادلات حاکم بر اساس شرایط هندسی و دینامیکی سیستم در نظر گرفته شده و دستیابی به موج های هارمونیک در مسئله برهم کنش نانوسازه-نانوسیال در اینجا شرایط مرزی دو سر ساده به صورتی که یکی از دو انتهای سازه ($x=0, L$) محدود شده باشد در نظر گرفته می شود که شرایط زیر را ارضاء کنند:

$$\frac{\partial^2 u_z(x, \theta, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_z(x, \theta, t)}{\partial \theta^2} = 0 \quad (51)$$

$u_x(x, \theta, t) = u_\theta(x, \theta, t) = u_z(x, \theta, t) = 0$
بنابراین، معادله ۵۰ به صورت ساده شده $\theta(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ درآمده و در معادلات حرکت سیستم تحت نیروهای هیدرو دینامیکی، الکتریکی، مغناطیسی و برشی اعمال می شود. با جایگذاری روابط معادله ۴۹ در معادلات حرکت حاکم و در اینجا با فرض $\theta = \pi/2$ ، یک مسئله مقدار ویژه تعمیم یافته حاصل می شود که پس از فاکتورگیری از عبارات مثلثاتی و ضرایب جابه جایی، به فرم ماتریسی زیر به دست می آید:

$$[\mathbf{K}_1][\mathbf{K}_2] = [\mathbf{K}_3] \quad (52)$$

که در آن

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_1] &= ([K] + i\omega[C] - \omega^2[M]), \\ [\mathbf{K}_2] &= [U][V][\Phi][W_b][W_s][X]^T, \\ [\mathbf{K}_3] &= [F_1][F_2][F_3][F_4][F_5][F_6]^T \end{aligned} \quad (53)$$

معادله ۵۲ جواب نخواهد داشت مگر این که درمیان ماتریس ضرایب (ماتریس $[\mathbf{K}_1]$) برابر با صفر باشد؛ لذا با برابر صفر قرار دادن مقدار این درمیان، مقدار و جواب های غیربدیهی فرکانس های سیستم حاصل خواهند شد. در روابط

فوق F_i ($i = 1, \dots, 6$) مربوط به نیروهای اعمالی خارجی است و برای حالت ارتعاشات آزاد مقادیر F_i برابر با صفر در نظر گرفته می شوند. همچنین $[K]_{6 \times 6}$ ، $[C]_{6 \times 6}$ و $[M]_{6 \times 6}$ به ترتیب نمایش دهنده ماتریس های سختی، میرایی و جرم بوده که تابعی از عدد موج k هستند.

لازم به ذکر است که بین فرکانس سیستم و عدد موج رابطه ای به صورت $\omega = kv_p$ برقرار است که در آن v_p بیانگر سرعت فاز سیستم است. علاوه بر این، یادآوری می شود که با میل کردن عدد موج به سمت صفر ($k \rightarrow 0$) در سیستم، فرکانسی به صورت فرکانس برش ایجاد می شود. تعداد این فرکانس ها به تعداد ریشه درمیان ماتریس ضرایب بستگی دارد. همچنین با میل کردن عدد موج به سمت بی نهایت ($k \rightarrow \infty$) فرکانس ایجاد شده به عنوان فرکانس مجانب شناخته می شود.

۵. نتایج و بحث

در این بخش شیوه انتشار امواج، فرکانس ها و سرعت فاز در یک نانوپوسته کربنی مدور استوانه ای دارای حرکت محوری حاوی نانوسیال مغناطیسی بر روی یک بستر ویسکوپاسترناک الکترومغناطیسی تحت تأثیر میدان های هیدرو دینامیکی، الکتریکی، مغناطیسی و برشی مورد بحث و بررسی قرار می گیرد. پیش تر روابط دینامیکی و فیزیکی سیستم مورد بررسی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا به دست آمد و با به کار بردن پارامترهای سینوسی و تئوری الاستیسیته گرادبان تنش (تئوری غیرمحل) در مختصات استوانه ای ارائه شده اند. حال، رفتار موجی-فرکانسی ناشی از برهم کنش نانوسازه-نانوسیال و تحت اثر انواع مختلف نیروهای اعمالی هم به طور مجزا و هم با اعمال هم زمان مورد بررسی قرار می گیرند.

مشخصات پارامترهای مادی و هندسی سیال و سازه در جدول ۲ ارائه شده است. علاوه بر این، فاکتور نفوذ مغناطیسی (η) برابر با $4\pi \times 10^{-7}$ H/m در نظر گرفته شده است.

جدول ۲. خصوصیات هندسی و مادی نانوپوسته کربنی (CNS) و

سیال جاری [۴۲]

پارامتر	نماد	مقدار	واحد
مدول یانگ CNS	E	۱	TPa
ضخامت CNS	h	۱	Å
قطر CNS	d	۴	Å
نسبت پواسون	ν	۰/۳	-
چگالی جرمی CNS	ρ_c	۲/۳	g cm^{-3}
چگالی جرمی آب	ρ_w	۱	g cm^{-3}

۵-۱. صحت‌سنجی نتایج

در اینجا، برای اعتبارسنجی نتایج به‌دست آمده با استفاده از تئوری و مدل پیشنهادی CSN-HSDT، در جداول ۳ و ۴ مقایسه مقدار فرکانس طبیعی اساسی به‌دست آمده با پارامترهای هندسی مختلف (نسبت طول به شعاع) نسبت به نتایج محققین دیگر ارائه شده است. برای این منظور، در جدول ۳ با در نظر گرفتن $h/r=0/06$ می‌توان مشاهده کرد با افزایش نسبت طول به شعاع (L/r) مقدار فرکانس طبیعی سیستم در مود اول کاهش می‌یابد. سایر پارامترها برای حصول این نتایج بر اساس مقادیر جدول ۲ در نظر گرفته شده‌اند.

همچنین مقادیر فرکانس طبیعی به‌دست آمده ($f_n=\omega_n/2\pi$) برای نانوسازه کربنی تک‌جداره ساکن در مقایسه با نتایج موجود در مقالاتی دیگر که به‌ترتیب با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی^{۲۳} (MD)، مدل تیر تیموشنکو غیرمحل^{۲۴} (NT) و مدل تیر پوسته استوانه‌ای مرتبه بالای غیرمحل^{۲۵} در مختصات دکارتی^{۲۵} (NH) حاصل شده‌اند در جدول ۴ لیست شده‌اند. در مورد مراجع مورد استفاده در این جدول لازم به ذکر است ژانگ و همکاران [۵۷] بر اساس پتانسیل پیوند تجربی واکنش‌پذیر نسل دوم از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی رفتار ارتعاشی

نانولوله‌های کربنی تک‌جداره^{۲۶} (SWCNTs) بررسی کرده‌اند. آنها سپس مدلی را با استفاده از ترکیب تئوری‌های تیر تیموشنکو و الاستیسیته غیرمحل^{۲۷} پیشنهاد دادند. انصاری و همکاران [۵۸] ویژگی‌های ارتعاشی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره و دوجداره را با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی براساس توابع انرژی بالقوه ترساف-برن^{۲۷} و لنارد جونز^{۲۸} مورد تحقیق قرار داده‌اند. ون و همکاران نیز برای بررسی رفتار ارتعاشی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره مدلی را براساس تئوری مرتبه بالای غیرمحل^{۲۹} در مختصات کارتزین مورد استفاده و پیشنهاد دادند [۵۹]. نتایج در این جدول برای نانولوله‌های کربنی (۵، ۵) از نوع صندلی و با نسبت طول به شعاع متفاوت به‌دست آمده‌اند. همچنین پارامترهای مکانیکی در نظر گرفته شده عبارتند از $E/\rho=3/6481 \times 10^8 \text{ m}^2/\text{s}^2$ ، نسبت پواسون $\nu=0/19$ ، ضخامت لوله $h=0/066 \text{ nm}$ و ضریب مقیاس e_0 متناسب با ابعادی که در هر مورد در نظر گرفته شده است. نتایج ارزیابی شده در این جدول مربوط به مود اول فرکانس‌های طبیعی برای ارتعاش آزاد SWCNTs با شرایط مرزی دو سر گیردار است.

در این دو جدول مشاهده می‌شود که مدل پیشنهادی در این تحقیق می‌تواند مطابقت بسیار خوبی با نتایج سایر محققین و به‌خصوص با نتایج حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی داشته باشد. با توجه به پرهزینه بودن روش‌های آزمایشگاهی و شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی به‌نظر می‌رسد پس از تحقیقات و آزمایش‌های بیشتر شاید بتوان نشان داد که مدل پیشنهادی مورد استفاده در این تحقیق (CNS-HSDT) جایگزین مناسبی برای تحلیل رفتار دینامیکی سیستم‌های مشابه باشد.

جدول ۳. مقایسه مقدار فرکانس طبیعی اساسی بی‌بعد به دست آمده با نسبت‌های ۱، ۲، ۵، ۰/۵، ۰/۲۵، L/r و $m=n=1$ و $h/r=0.06$

مراجع	L/r			
	۰/۲۵	۰/۵	۱	۲
میرسکای و هرمن [۶۰]	۰/۰۸۶۱۱	۰/۰۳۶۹۲	۰/۰۲۷۸۱	۰/۰۱۸۵۳
ردی [۶۱]	۰/۰۸۶۳۹	۰/۰۳۶۹۲	۰/۰۲۷۸۱	۰/۰۱۸۵۳
خلیلی و همکاران [۶۲]	۰/۰۸۶۳۵	۰/۰۳۶۸۸	۰/۰۲۷۸۰	۰/۰۱۸۵۳
آرمناکاس و همکاران [۶۳]	۰/۰۸۶۳۹	۰/۰۳۶۹۱	۰/۰۲۷۸۱	۰/۰۱۸۵۳
شکرگذار و همکاران [۶۴]	۰/۰۸۷۷۵	۰/۰۳۸۴۰	۰/۰۲۷۸۶۹	۰/۰۱۹۲۳
تحقیق حاضر	۰/۰۸۶۳۸۴	۰/۰۳۶۹۳۳	۰/۰۲۷۸۱۹	۰/۰۱۸۵۳۲

جدول ۴. مقایسه مقدار فرکانس طبیعی اساسی بدون بعد نانو سازه کربنی تک جداره حاصل شده از دو مدل روش شبیه سازی دینامیک مولکولی

(MD)، مدل تیر تیموشنکو غیرمحل (NT)، مدل تیر پوسته استوانه‌ای مرتبه بالای غیرمحل در مختصات دکارتی (NH) و مدل پیشنهادی

حاضر (CNS-HSDT). ($h=0.066 \text{ nm}$, $E/\rho=3/6481 \times 10^8 \text{ m}^2/\text{s}^2$)

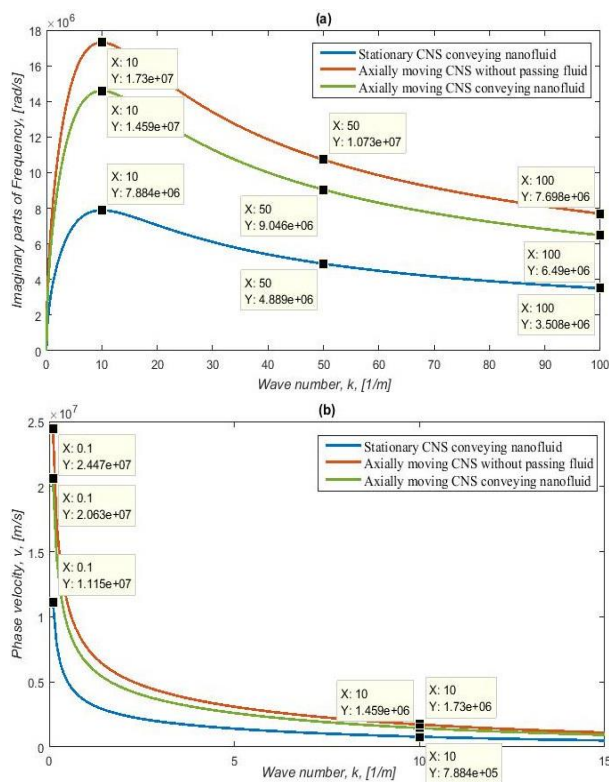
مدل‌های حل مسئله	L/r			
	۹/۷۲	۱۳/۳۴	۱۶/۹۴	۲۰/۵۲
MD [۵۷]	۱/۰۶۸۱۲	۰/۶۴۶۹۷	۰/۴۳۳۳۵	۰/۳۰۵۱۸
MD [۵۸]	۱/۱۶۷	—	۰/۴۹۲۴۰	—
NT [۵۷]	۱/۰۰۳۰۹	۰/۶۱۷۳۸	۰/۴۱۴۶۹	۰/۲۹۶۳۴
NH [۵۹]	۱/۰۶۴۷۴	۰/۶۴۷۴۹	۰/۴۳۱۰۵	۰/۳۰۶۰۷
CNS-HSDT (تحقیق حاضر)	۱/۰۶۸۱۵۹۹	۰/۶۴۶۵۴۱۴	۰/۴۳۳۱۵۷	۰/۳۰۵۲۷۱
	($e_n=0.085$)	($e_n=1/420.5$)	($e_n=2/0.95$)	($e_n=2/97$)

۲-۵. نسبت تغییرات فرکانس موج و فاز سرعت

۱-۲-۵. بدون اعمال میدان‌های نیروی خارجی

در اینجا نخست انتشار امواج و سرعت فاز نانوپوسته‌های کربنی (CNSs) ساکن حاوی سیال، نانوپوسته‌های دارای حرکت محوری بدون سیال عبوری و نانوپوسته‌های دارای حرکت محوری حامل جریان سیال مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. مقادیر عدد نادسن و پارامتر غیرمحل به ترتیب برابر با ۰/۰۱ و ۰/۱ در نظر گرفته می‌شوند. نتایج این زیربخش برای مقایسه نتایج حاصل از اعمال میدان‌های نیرویی مختلف استفاده خواهند شد.

شکل‌های ۳-الف و ب، روند انتشار موج (پراکندگی فونون) یعنی تغییرات فرکانس طبیعی و سرعت فاز سیستم را در سه حالت ذکر شده نسبت به تغییرات عدد موج نشان می‌دهد. همان‌طور که شکل ۳-الف می‌توان ملاحظه نمود، در عدد موج ۱۰ فرکانس موج به نقطه اوج خود رسیده که یعنی بیشترین فرکانس طبیعی در آن واقع می‌شود و سپس به صورت یکنواختی کاهش می‌یابد. همچنین می‌توان دریافت که بیشترین فرکانس طبیعی در هر عدد موج در نانوپوسته‌های کربنی با حرکت محوری و بدون سیال حاصل می‌شود.



شکل ۳-الف). تغییرات فرکانس موج، (ب) تغییرات سرعت فاز نسبت به تغییر عدد موج برای نانوپوسته‌های ثابت حاوی سیال و نانوپوسته‌های دارای حرکت محوری با و بدون نانوسیال عبوری.

۲-۲-۵. با اثر میدان نیروی الکتریکی

اثرات میدان الکتریکی در نظر گرفته شده بر نانوسیستم در این زیربخش مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای مشاهده تغییرات ایجاد شده بر اثر میدان‌های الکتریکی با قدرت‌های مختلف، مقدار ولتاژها براساس تحقیقات حوزه استحصال انرژی، در اینجا از 3×10^{-8} تا 3×10^{-8} در نظر گرفته شده‌اند و ضریب پیزوالکتریک برابر با 95 C/m فرض شده است.

در شکل‌های ۴-الف و ب به ترتیب تغییرات فرکانس طبیعی و تغییرات سرعت فاز نانوپوسته دارای حرکت محوری حاوی نانوسیال برحسب افزایش عدد موج نمایش داده شده‌اند. همان‌طور که در شکل ۴-الف مشاهده می‌شود با افزایش عدد موج از صفر تا ۱۰ فرکانس طبیعی دارای روندی صعودی است و پس از آن این روند نزولی خواهد شد.

همان‌طور که مشاهده می‌شود فرکانس موج در نانوپوسته‌های کرنی ثابت حاوی سیال کمتر از نانوپوسته‌های کرنی دارای حرکت محوری حاوی سیال است؛ لذا می‌توان اظهار داشت که اولاً سیال عبوری از درون نانوسازه موجب کاهش فرکانس طبیعی شده و ثانیاً حرکت محوری نانوپوسته که موجب افزایش انرژی جنبشی سیستم می‌شود فرکانس طبیعی سیستم را افزایش می‌دهد.

در شکل ۳-ب ملاحظه می‌شود که به موجب افزایش عدد موج سرعت فاز سیستم کاهش می‌یابد. این کاهش سرعت از ابتدا تا تقریباً عدد موج دهم با شیب تند صورت می‌پذیرد و سپس با حالت یکنواختی ادامه یافته و با شیب ملایم‌تری کاهش می‌یابد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود سرعت فاز نیز در نانوپوسته‌های دارای حرکت محوری بدون سیال دارای بیشترین مقدار است.

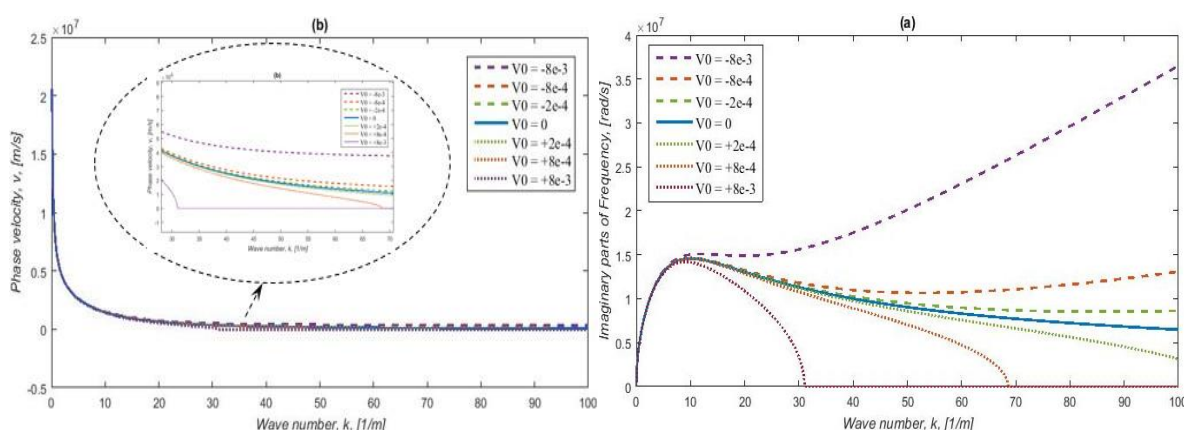
با مقایسه‌ی نقاط مشخص شده در شکل ۳-الف، در اعداد موج ۱۰، ۵۰ و ۱۰۰، می‌توان دریافت که فرکانس طبیعی در نانوپوسته کرنی دارای حرکت محوری بدون سیال نسبت به نانوپوسته دارای حرکت محوری حاوی نانوسیال و نیز نسبت به فرکانس نانوپوسته‌ی کرنی ساکن حاوی جریان نانوسیال عبوری به ترتیب تقریباً $15/7\%$ و $54/4\%$ افزایش یافته است. گفتنی است این مقدار درصد افزایش برای نسبت سرعت‌های فاز در هر عدد موج با ترتیب موارد ذکر شده کاملاً مشابه و یکسان هستند که در شکل ۳-ب مشاهده می‌شود.

از این نتایج می‌توان دریافت که در هر عدد موج، عبور سیال از درون سازه باعث کاهش و حرکت محوری نانوسازه موجب افزایش در فرکانس طبیعی و همچنین در سرعت فاز سیستم می‌شود. همچنین نتایج نشان می‌دهند که در بزرگی میزان اندازه موج، سرعت طولی نانوپوسته نقش مؤثرتری نسبت به سرعت جریان سیال از درون آن داشته و ایجاد تشدید فرکانس طبیعی دارد.

تغییرات ایجاد شده بر اثر میدان‌های الکتریکی مختلف از نظر اعمال میزان ولتاژ وارد شده بر سیستم نشان می‌دهد در اعداد موج پایین امواج غیرمتمفرق و تأثیر میدان الکتریکی ناچیز بوده و قابل صرف‌نظر کردن است. در اعداد موج بالاتر می‌توان ملاحظه کرد که با افزایش ولتاژ مثبت میدان الکتریکی، روند کاهشی فرکانس موج سریع‌تر شده و به عبارت دیگر میدان الکتریکی موجب کاهش فرکانس سیستم خواهد شد. همچنین، میزان کاهش فرکانس طبیعی نانوسپستم مورد بررسی با افزایش عدد موج بیشتر می‌شود. بنابراین، ولتاژ مثبت موجب می‌شود سیستم ناپایدار شده و مقدار فرکانس به صفر نزدیک شود این روند با افزایش مقدار ولتاژ اعمال شده زودتر رخ داده و ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر در مودهای ارتعاشی ظاهر خواهند شد. علاوه بر این، ملاحظه می‌شود با اعمال ولتاژ منفی روند کاهشی فرکانس طبیعی کند می‌شود لذا می‌توان اظهار

داشت میدان الکتریکی با ولتاژ منفی باعث افزایش فرکانس سیستم خواهد شد. دلیل اینکه ولتاژ مثبت و منفی به ترتیب باعث کاهش و افزایش فرکانس موج و پایداری سیستم می‌شوند به موجب ایجاد نیروهای محوری فشاری و کششی توسط آن‌ها است. لذا ولتاژ خارجی اعمال شده می‌تواند یک پارامتر مؤثر برای کنترل انتشار موج به خصوص در اعداد موج بالاتر در نانوسپستم باشد.

در شکل ۴-ب در مورد سرعت فاز نیز نتایج مشابهی استنتاج می‌شود مبنی بر اینکه روند کاهش سرعت فاز نسبت به عدد موج با افزایش ولتاژ مثبت سریع‌تر شده و بر عکس با افزایش ولتاژ منفی روند نزولی سرعت فاز کند می‌شود. به عبارت دیگر با افزایش ولتاژ مثبت سرعت فاز سیستم کاهش یافته به طوری که افزایش مقدار ولتاژ اعمالی می‌تواند سرعت فاز را به صفر برساند و با اعمال ولتاژ منفی سرعت فاز افزایش می‌یابد.



شکل ۴. (الف) تغییرات فرکانس موج، (ب) تغییرات سرعت فاز، نسبت به تغییر عدد موج برای نانوپوسته‌های دارای حرکت محوری حاوی نانوسیال عبوری با ولتاژهای مختلف میدان الکتریکی اعمال شده.

۳-۲-۵. با اثر میدان نیروی مغناطیسی

در این زیربخش اثرات میدان مغناطیسی بر انتشار موج نانوسازه دارای حرکت محوری و حاوی نانوسیال جاری مورد بررسی قرار می‌گیرد. میدان مغناطیسی هم بر روی نانوپوسته و هم بر روی سیال عبوری از داخل آن تأثیرگذار خواهد بود. در شکل ۵-الف تغییرات فرکانس طبیعی سیستم نسبت به عدد موج با در نظر

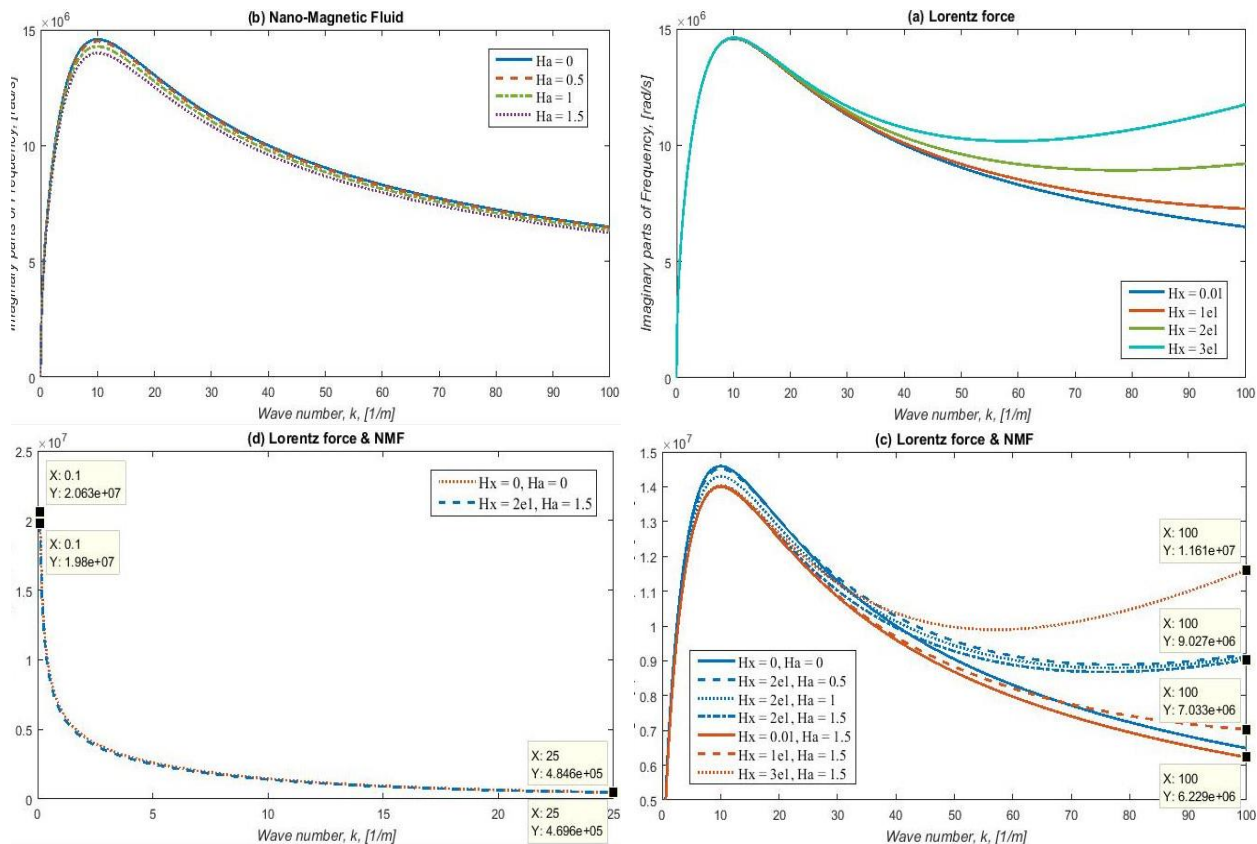
گرفتن اثرات میدان مغناطیسی بر سازه نمایش داده شده است. همان‌طور که پیش‌تر ذکر شد اثر میدان مغناطیسی به صورت نیروی لورنتس بر سازه اعمال و محاسبه می‌شود. لذا میدان‌های مغناطیسی مختلف با دامنه‌های متفاوتی از شدت با تغییر در پارامتر توان میدان مغناطیسی (H_x) قابل بررسی هستند. در اینجا مقادیر این پارامتر برای مقایسه بهتر نتایج برابر با 0.1 ،

۱۰، ۲۰ و ۳۰ در نظر گرفته شده‌اند. در این شکل مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار پارامتر H_x ، مقدار فرکانس طبیعی سیستم افزوده می‌شود به‌طوری‌که با افزایش عدد موج روند افزایش فرکانس موج نیز بیشتر شده و سیستم پایداری بیشتری خواهد داشت.

در شکل ۵-ب فرض شده است که میدان مغناطیسی تنها بر نانوسیال عبوری اثر گذاشته و بدین ترتیب تغییرات فرکانسی سیستم نسبت به تغییر عدد موج نشان داده شده است. برای بررسی اثر میدان مغناطیسی بر سیال عبوری از عدد هارتمن (Ha) با مقادیر مختلف ۰، ۰/۵، ۱ و ۱/۵ که بیان‌گر تغییر در میزان کیفیت مغناطیسی سیال است استفاده شده است. در نگاه اول، از این شکل و نتایج حاصله می‌توان دریافت که نانوسیال مغناطیسی موجب کاهش فرکانس موج سیستم شده و پایداری سیستم کاهش می‌یابد. با افزایش عدد هارتمن که به معنای افزایش خاصیت مغناطیسی سیال عبوری است، مقدار فرکانس سیستم بیشتر کاهش می‌یابد. اختلاف مقدار فرکانس طبیعی برای سیالات مغناطیسی با شدت مختلف تا رسیدن به عدد موج ۱۰ به اوج خود رسیده و سپس با روند ملایمی کاهش می‌یابد. در شکل ۵-ج تغییر فرکانس طبیعی نانوپوسته دارای حرکت محوری حاوی نانوسیال نسبت به تغییر عدد موج و با تأثیر میدان مغناطیسی هم بر نانوسازه و هم بر نانوسیال نشان داده شده است. به‌منظور بررسی سهم میزان تأثیرگذاری نیروی لورنتس و نانوسیال مغناطیسی با ثابت در نظر گرفتن یکی از پارامترهای H_x و Ha و تغییر پارامتر دیگر اثر میدان مغناطیسی مورد بررسی قرار گرفته است. با برابر ۲۰ قرار دادن پارامتر توان میدان مغناطیسی (H_x) و افزایش مقدار عدد هارتمن مشاهده

می‌شود که مقدار فرکانس سیستم با اختلاف اندکی کاهش می‌یابد. به‌عنوان مثال در عدد موج ۱۰ با افزایش عدد هارتمن از ۰/۵ تا ۱ و ۱/۵، مقدار فرکانس موج به‌ترتیب به میزان ۱/۵ و ۳/۵ درصد کاهش یافته است. این میزان کاهش در عدد موج ۱۰۰ به‌ترتیب برابر با ۰/۷۴٪ و ۱/۷٪ است. همچنین با عدد هارتمن برابر با ۱/۵ و افزایش مقدار پارامتر H_x به ۰/۰۱، ۱۰، ۲۰ و ۳۰ در هر عدد موج افزایش فرکانس طبیعی قابل مشاهده است. به‌عنوان مثال مقدار فرکانس موج در عدد موج ۱۰ به‌ترتیب ۰/۳٪، ۰/۰۷٪ و ۰/۲٪ و در عدد موج ۱۰۰ به‌ترتیب ۱۲٪/۹، ۴۴٪/۹ و ۸۶٪/۴ افزایش یافته است. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که اثر میدان مغناطیسی بر نانوسازه در عدهای موج بالا و بر نانوسیال در اعداد موج پایین‌تر بیشتر قابل توجه بوده و اختلاف فرکانس بیشتری را رقم می‌زند.

شکل ۵-د تغییرات سرعت فاز نانوپوسته دارای حرکت محوری تحت میدان مغناطیسی و حاوی نانوسیال مغناطیسی را نسبت به تغییر عدد موج نشان می‌دهد. در این شکل می‌توان ملاحظه کرد که با افزایش عدد موج سرعت فاز طبق انتظار کاهش می‌یابد. همچنین می‌توان اظهار داشت که به‌طور کلی اثرات میدان مغناطیسی بر سیستم شامل اثر نیروی لورنتس بر نانوسازه و اثر نانوسیال مغناطیسی عبوری باعث کاهش سرعت فاز سیستم در هر عدد موج می‌شود. همچنین با بررسی دقیق‌تر می‌توان مشاهده نمود که این اثر کاهشی با افزایش عدد موج کاسته خواهد شد به‌طوری‌که مقدار اختلاف سرعت فاز با و بدون میدان مغناطیسی به‌عنوان مثال در ابتدا ۴٪ و در عدد موج ۲۵ برابر با ۳ درصد می‌باشد.



شکل ۵. تغییرات فرکانس موج نسبت به تغییر عدد موج (الف) با در نظر گرفتن اثر میدان مغناطیسی بر نانوسازه (ب) با در نظر گرفتن اثر میدان مغناطیسی بر نانوسیال، (ج) با در نظر گرفتن اثر هم‌زمان میدان مغناطیسی بر نانوسازه و نانوسیال و (د) تغییرات سرعت فاز نسبت به تغییر عدد موج در نانوپوسته‌های کربنی دارای حرکت محوری حامل نانوسیال.

۵-۲-۴. با اثر بسترهای وینکلر و پاسترناک

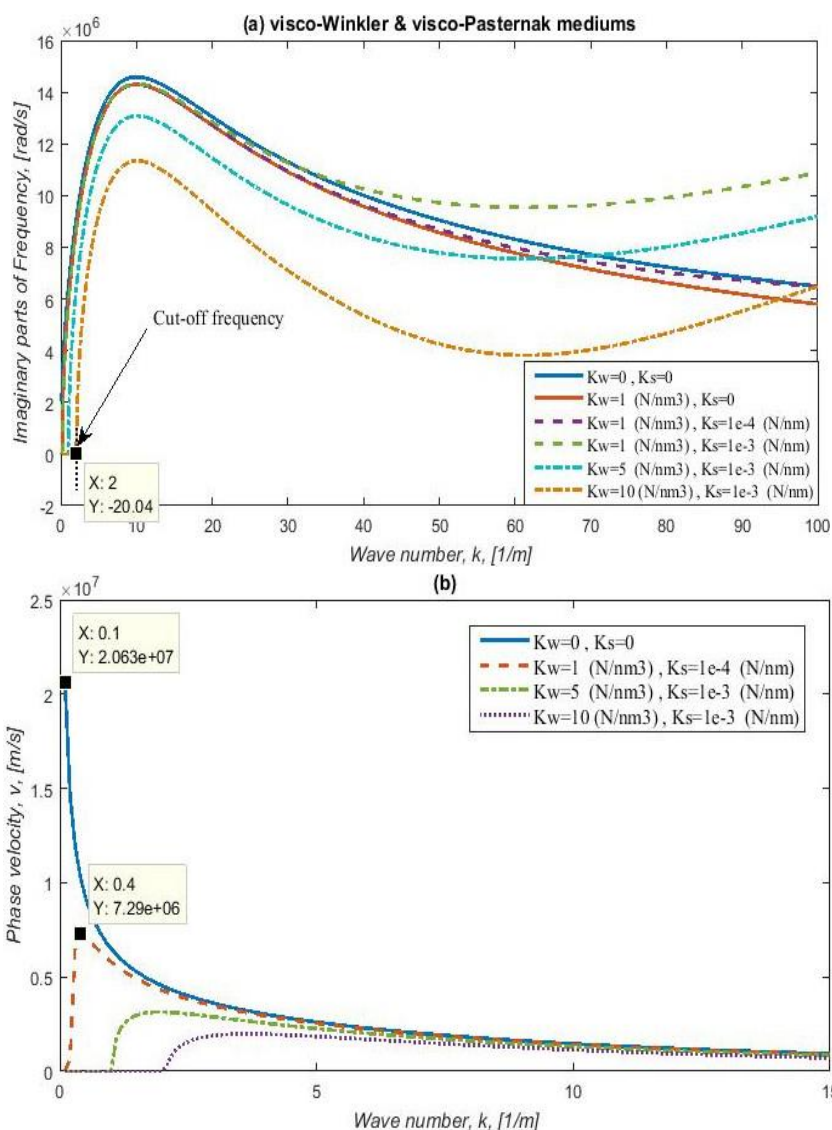
در این زیربخش پراکندگی فونون^{۲۹} نانوسیستم با در نظر گرفتن اثرات بسترهای ویسکو الاستیکی وینکلر و پاسترناک مورد بررسی قرار می‌گیرند. در اینجا به منظور بررسی اثرات هر یک از بسترهای مذکور مدول وینکلر برابر با ۰، ۱، ۵ و ۱۰ N/nm^3 و مدول برشی برابر با ۰، ۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۱ N/nm در نظر گرفته می‌شوند.

شکل ۶-الف بیان‌گر شیوه انتشار فرکانس موج نانوپوسته دارای حرکت محوری حاوی نانوسیال نسبت به تغییر عدد موج و تحت اثر نیروهای اعمالی ناشی از بسترهای مختلف وینکلر و پاسترناک است. در این شکل می‌توان مشاهده کرد که وجود بستر وینکلر باعث کاهش فرکانس طبیعی و پایداری سیستم

می‌شود. ملاحظه می‌شود که افزایش مقدار مدول وینکلر منجر به انتقال فرکانس به مقادیر پایین‌تر می‌شود. این در حالی است که مدول برشی بستر پاسترناک موجب افزایش فرکانس موج سیستم می‌شود. با توجه به رابطه ریاضی بستر وینکلر و اینکه مدول وینکلر رابطه مستقیمی با عدد موج ندارد قابل انتظار بود که این پارامتر منجر به ظاهر شدن فرکانس برش^{۳۰} گردد. همان‌طور که در این شکل ملاحظه می‌شود با افزایش مقدار مدول وینکلر، فرکانس برش در مقدار عدد موج بیشتری رخ می‌دهد. همچنین می‌توان اظهار داشت که مدول وینکلر در اعداد موج پایین‌تر تأثیر بیشتری از خود بروز می‌دهد و برعکس، مدول برشی بستر پاسترناک با افزایش عدد موج مقدار فرکانس طبیعی سیستم را بیشتر افزایش خواهد داد. لذا می‌توان استنباط

سرعت فاز سیستم میل می‌کند. همچنین نقطه اوج سرعت فاز با در نظر گرفتن بستر ویسکو-وینکلر شدیداً کاهش می‌یابد. به عنوان مثال حداکثر مقدار سرعت فاز برای سیستم با بستر الاستیکی ویسکو پاسترناک با مدول وینکلر ۱ نسبت به حالت بدون بستر الاستیکی ۶/۶۴٪ کاهش می‌یابد. این کاهش مقدار سرعت فاز با افزایش مقدار مدول وینکلر بیشتر نیز خواهد شد. پس از نقطه اوج، سرعت فاز در همه موارد با افزایش عدد موج با شیب همواری کاهش می‌یابد.

نمود از آنجا که بستر الاستیکی ویسکو پاسترناک علاوه بر تنش‌های نرمال، پیوستگی بین المان‌های فنر و تغییر شکل‌های برشی جانبی را نیز در برمی‌گیرد، فرکانس سیستم بیشتر از زمانی است که فقط بستر مدل ویسکو وینکلر در نظر گرفته می‌شود. در شکل ۶-ب تغییرات سرعت فاز سیستم تعبیه شده بر روی بسترهای ویسکو-وینکلر و ویسکو-پاسترناک نسبت به افزایش عدد موج را نشان می‌دهد. همان‌طور که می‌توان مشاهده کرد مدول وینکلر باعث کاهش شدید سرعت فاز در عددهای موج پایین شده به‌طوری‌که دیرتر به حداکثر مقدار



شکل ۶. (الف) تغییرات فرکانس موج (ب) تغییرات سرعت فاز نسبت به تغییر عدد موج برای نانوپوسته‌های دارای حرکت محوری حامل نانوسیال عبوری با در نظر گرفتن اثرات بسترهای الاستیکی ویسکو-وینکلر و ویسکو-پاسترناک.

۶. نتیجه‌گیری

در این کار تحقیقاتی با ارائه یک مدل پیشنهادی به صورت تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای استوانه‌ای، سینوسی، غیرمحلی و استفاده از روش انرژی، معادلات حاکم بر انتشار موج نانوپوسته کربنی دارای حرکت محوری انتقال دهنده جریان نانوسیال مغناطیسی و تعبیه شده بر روی بستر ویسکو-پاسترناک الکترومغناطیسی ابداعی تحت بارهای هیدرو-مگنتو-الکترو-الاستیک استخراج شد. برای این منظور با ارائه یک بستر پیشنهادی الکترومغناطیسی ویسکوپاسترناک جدید به صورت در نظر گرفتن سیم‌پیچ‌های ایری به عنوان فنرهای وینکلر متصل به بسترهای الاستیکی پاسترناک و اعمال میدان الکتریکی به آن یک میدان مغناطیسی حاصل شد و نانوسیستم مگنتو-الکترو-الاستیکی به دست آمد. با عبور نانوسیال از درون نانوپوسته، سیستم به صورت مسئله برهم‌کنش نانوسیال-نانوسازه مورد بررسی قرار گرفت. سپس با روش حل تحلیلی ناویر، معادلات به دست آمده تغییرات فرکانس موج، سرعت فاز و شیوه انتشار موج تحت شرایط مختلف سیستم محاسبه و بررسی شد. بدین منظور هر یک از اثرات اعمال میدان مغناطیسی هم بر سازه و هم بر سیال عبوری به طور مجزا و هم‌زمان، اثرات میدان الکتریکی هم با ولتاژ مثبت و هم با ولتاژ منفی، اثرات مدول‌های وینکلر و بستر الاستیکی برای این نانوسازه دارای حرکت محوری به طور هم‌زمان برای نخستین بار مورد بحث و بررسی قرار گرفت. برخی از نتایج قابل توجه به دست آمده به اختصار عبارتند از:

- اعمال میدان الکتریکی با ولتاژ مثبت باعث کاهش سرعت فاز در هر عدد موج می‌شود و بالعکس با وارد کردن ولتاژ منفی سرعت فاز نانوسیستم مورد بررسی افزایش خواهد یافت.
- مشاهده شد میدان مغناطیسی هم بر نانوسازه به صورت نیروی لورنتس اعمال شده و هم بر نانوسیال عبوری تأثیرگذار خواهد بود. اعمال نیروی لورنتس باعث افزایش فرکانس موج و پایداری سیستم به خصوص در اعداد موج بالاتر می‌شود و عبور نانوسیال مغناطیسی موجب کاهش فرکانس طبیعی سیستم بوده و تأثیر آن در اعداد موج پایین بیشتر قابل توجه است به طوری که افزایش عدد هارتمن منجر به کاهش مقدار بزرگی فرکانس موج خواهد شد.
- علاوه بر این، به طور کلی میدان مغناطیسی موجب کاهش سرعت فاز نانوپوسته‌های دارای حرکت محوری حاوی نانوسیال مغناطیسی می‌شوند. مقدار این کاهش در اعداد موج پایین‌تر بیشتر بوده و اثر میدان مغناطیسی قابل ملاحظه‌تر است.
- مدول وینکلر باعث کاهش فرکانس و پایداری نانوسیستم به ویژه در عده‌های موج پایین شده درحالی که مدول برشی بستر پاسترناک موجب افزایش فرکانس طبیعی نانوسیستم مورد بررسی بخصوص در اعداد موج بالاتر خواهد شد. با مشاهده روابط پراکندگی فونون می‌توان دریافت که بسترهای الاستیکی ویسکو پاسترناک با افزایش مدول وینکلر باعث کاهش شدید مقدار سرعت فاز در نانوسیستم می‌شوند.
- همان‌طور که گزارش داده شد بدین ترتیب تغییرات فرکانس طبیعی و سرعت فاز نانوپوسته‌های کربنی دارای حرکت محوری حاوی نانوسیال مغناطیسی تعبیه شده بر روی بستر ویسکو-پاسترناک الکترومغناطیسی تحت اعمال هم‌زمان میدان‌های نیرویی الکتریکی و مغناطیسی را می‌توان با هر یک از وضعیت‌های دیگر نانوسیستم

- مشخص شد فرکانس موج نانوپوسته‌های کربنی دارای حرکت محوری حامل نانوسیال تحت تحریک میدان الکتریکی تغییر می‌کنند. این تغییرات به گونه‌ای است که در صورت اعمال ولتاژ مثبت یا منفی مقدار فرکانس طبیعی به ترتیب کاهش یا افزایش یافته و به عبارتی ناپایداری سیستم افزایش یا کاهش می‌یابد. تغییرات فرکانسی بر اثر اعمال میدان الکتریکی در اعداد موج بالا بیشتر مشهود و قابل ملاحظه هستند.

یعنی تحت اثر جداگانه نیروها و یا حالت بدون اعمال نیرو در هر عدد موج مورد مقایسه و بررسی قرار داد. مقایسه این نتایج حاصل شده می‌تواند در تبیین اثر هر یک از نیروهای اعمالی در پراکندگی موج‌های نانوپوسته بسیار مفید باشد.

در این تحقیق سعی شد بررسی جامع و مکفی بر روی تأثیر میدان‌های نیرویی هیدرو-الکترو-مغناطیسی بر رفتار مکانیکی انتشار موج در یکی از موارد کاربردی نانوسیستم‌ها یعنی

نانوپوسته‌های دارای حرکت محوری حامل جریان نانوسیال انجام شود. امید است نتایج این مقاله برای مطالعات آتی محققین و دانشجویان این حوزه رو به رشد و نیز در طراحی و ساخت بهینه حسگرهای نانومقیاس، نانومحرک‌ها و سایر تجهیزات مورد استفاده برای صنایع گوناگون مانند تجهیزات پزشکی، وسایل نانوالکترو-مکانیکی برای استحصال انرژی و لوازم تحقیقاتی در مقیاس نانو مثر ثمر واقع شود.

۷. مأخذ

- [1] Kolesnikov, Alexander I., George F. Reiter, Narayani Choudhury, Timothy R. Prisk, Eugene Mamontov, Andrey Podlesnyak, George Ehlers, Andrew G. Seel, David J. Wesolowski, and Lawrence M. Anovitz, "Quantum tunneling of water in beryl: a new state of the water molecule", *Physical review letters*, 2016, Vol.116, no.16, p.167802.
- [2] Craighead, Harold G., "Nanoelectromechanical systems", *Science*, 2000, Vol.290, no.5496, pp.1532-1535.
- [3] Mattia, Davide, and Yury Gogotsi, "Static and dynamic behavior of liquids inside carbon nanotubes", *Microfluidics and Nanofluidics*, 2008, Vol.5, no.3, pp.289-305.
- [4] Sawano, Shunichi, Takayuki Arie, and Seiji Akita, "Carbon nanotube resonator in liquid", *Nano Letters*, 2010, Vol.10, no.9, pp.3395-3398.
- [5] Rao, C. N. R., and A. K. Cheetham. "Science and technology of nanomaterials: current status and future prospects." *Journal of Materials Chemistry* 11, no. 12 (2001): 2887-2894.
- [6] Oveissi, Soheil, Davood Toghraie, and Seyyed Ali Eftekhari, "Longitudinal vibration and stability analysis of carbon nanotubes conveying viscous fluid", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2016, Vol.83, pp.275-283.
- [7] Ansari, R., Pourashraf, T., and Gholami, R., "An exact solution for the nonlinear forced vibration of functionally graded nanobeams in thermal environment based on surface elasticity theory", *Thin-Walled Structures*, 2015, Vol.93, pp.169-176.
- [8] Liu, C., Yu, J., Xu, W., Zhang, X., and Wang, X., "Dispersion characteristics of guided waves in functionally graded anisotropic micro/nano-plates based on the modified couple stress theory", *Thin-Walled Structures*, 2021, Vol.161, pp.107527.
- [9] Karami, B., Janghorban, M., and Tounsi, A., "Variational approach for wave dispersion in anisotropic doubly-curved nanoshells based on a new nonlocal strain gradient higher order shell theory", *Thin-Walled Structures*, 2018, Vol.129, pp.251-264.
- [10] Oveissi, S., Toghraie, D., and Eftekhari, S.A., "Analysis of transverse vibrational response and instabilities of axially moving CNT conveying fluid", *International Journal of Fluid Mechanics Research*, 2017, Vol.44, no.2, pp.115-129.
- [11] Mahmoudpour, E., and Esmaili, M., "Nonlinear free and forced vibration of carbon nanotubes conveying magnetic nanoflow and subjected to a longitudinal magnetic field using stress-driven nonlocal integral model", *Thin-Walled Structures*, 2021, Vol.166, pp.108134.
- [12] Shen, Z.B., Sheng, L.P., Li, X.F., and Tang, G.J., "Nonlocal Timoshenko beam theory for vibration of carbon nanotube-based biosensor", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2012, Vol.44, no.7-8, pp.1169-1175.
- [13] Ecsedi, I., and Baksa, A., "Free axial vibration of nanorods with elastic medium interaction based on nonlocal elasticity and Rayleigh model", *Mechanics Research Communications*, 2017, vol.86, pp.1-4.

- [14] Wang, Q., and Varadan, V.K., "Application of nonlocal elastic shell theory in wave propagation analysis of carbon nanotubes", *Smart Materials and Structures*, 2007, vol.16, no.1, pp.178.
- [15] Rezaiee-Pajand, M., Sobhani, E., and Masoodi, A.R., "Semi-analytical vibrational analysis of functionally graded carbon nanotubes coupled conical-conical shells", *Thin-Walled Structures*, 2021, vol.159, pp.107272.
- [16] Silvestre, N., Wang, C.M., Zhang, Y.Y., and Xiang, Y., "Sanders shell model for buckling of single-walled carbon nanotubes with small aspect ratio", *Composite Structures*, 2011, vol.93, no.7, pp.1683-1691.
- [17] Eringen, A.C., "Relation between non-local elasticity and lattice dynamics", *Crystal Lattice Defects*, 1977, vol.2, no.7, pp.51-57.
- [18] Oveissi, S., and Ghassemi, A., "Longitudinal and transverse wave propagation analysis of stationary and axially moving carbon nanotubes conveying nano-fluid", *Applied Mathematical Modelling*, 2018, vol.60, pp.460-477.
- [19] Arefi, M., "Electro-mechanical vibration characteristics of piezoelectric nano shells", *Thin-Walled Structures*, 2020, vol.155, pp.106912.
- [20] Adab, N., Arefi, M., and Amabili, M., "A comprehensive vibration analysis of rotating truncated sandwich conical microshells including porous core and GPL-reinforced face-sheets", *Composite Structures*, 2022, vol.279, pp.114761.
- [21] Arefi, M., and Amabili, M. "A comprehensive electro-magneto-elastic buckling and bending analyses of three-layered doubly curved nanoshell, based on nonlocal three-dimensional theory", *Composite Structures*, 2021, vol.257, pp.113100.
- [22] Arefi, M., & Zenkour, A. M. "Wave propagation analysis of a functionally graded magneto-electro-elastic nanobeam rest on Visco-Pasternak foundation", *Mechanics Research Communications*, 2017, vol.79, pp.51-62.
- [23] Behdad, S., and Arefi, M. "A mixed two-phase stress/strain driven elasticity: In applications on static bending, vibration analysis and wave propagation", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2022, vol.94, pp.104558.
- [24] Arefi, M., and Zenkour, A.M. "Influence of micro-length-scale parameters and inhomogeneities on the bending, free vibration and wave propagation analyses of a FG Timoshenko's sandwich piezoelectric microbeam", *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 2019, vol.21, no.4, pp.1243-1270.
- [25] Arefi, M. "Surface effect and non-local elasticity in wave propagation of functionally graded piezoelectric nano-rod excited to applied voltage", *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, vol.37, no.3, pp.289-302.
- [26] Arefi, M., and Zenkour, A M. "Free vibration, wave propagation and tension analyses of a sandwich micro/nano rod subjected to electric potential using strain gradient theory", *Materials Research Express*, 2016, vol.3, no.11, pp.115704.
- [27] Bisheh, H.K., and Wu, N., "Wave propagation in piezoelectric cylindrical composite shells reinforced with angled and randomly oriented carbon nanotubes", *Composites Part B: Engineering*, 2019, vol.160, pp.10-30.
- [28] Arani, A.G., Haghparast, E., and Zarei, H.B.A., "Nonlocal vibration of axially moving graphene sheet resting on orthotropic visco-Pasternak foundation under longitudinal magnetic field", *Physica B: Condensed Matter*, 2016, vol.495, pp.35-49.
- [29] Karami, B., Shahsavari, D., and Li, L., "Hygrothermal wave propagation in viscoelastic graphene under in-plane magnetic field based on nonlocal strain gradient theory", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2018, vol.97, pp.317-327.
- [30] Suiker, A.S.J., Metrikine, A.V., and De Borst, R., "Dynamic behaviour of a layer of discrete particles, part 1: Analysis of body waves and eigen modes", *Journal of Sound and Vibration*, 2001, vol.240, no.1, pp.1-18.
- [31] Suiker, A.S.J., Metrikine, A.V., and De Borst, R., "Comparison of wave propagation characteristics of the Cosserat continuum model and corresponding discrete lattice models", *International Journal of Solids and Structures*, 2001, vol.38, no.9, pp.1563-1583.

- [32] Bin, W., Jiangong, Y., and Cunfu, H., "Wave propagation in non-homogeneous magneto-electro-elastic plates", *Journal of Sound and Vibration*, 2008, vol.317, no.1-2, pp.250-264.
- [33] Lee, Y.C., and Kuo, S.H., "Leaky Lamb wave of a piezoelectric plate subjected to conductive fluid loading: Theoretical analysis and numerical calculation", *Journal of Applied Physics*, 2006, vol.100, no.7, pp.073519.
- [34] Wang, Q., and Varadan, V.K., "Wave characteristics of carbon nanotubes", *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol.43, no.2, pp.254-265.
- [35] Shirai, Y., Osgood, A.J., Zhao, Y., Kelly, K.F., and Tour, J.M., "Directional control in thermally driven single-molecule nanocars", *Nano Letters*, 2005, vol.5, no.11, pp.2330-2334.
- [36] Morin, J.F., Shirai, Y., and Tour, J.M., "En route to a motorized nanocar", *Organic letters*, 2006, vol.8, no.8, pp.1713-1716.
- [37] Wang, Y.Q., Liang, C., and Zu, J.W., "Wave propagation in functionally graded cylindrical nanoshells based on nonlocal Flügge shell theory", *The European Physical Journal Plus*, 2019, vol.134, no.5, pp.1-15.
- [38] Nayfeh, J.F., and Riveccio, N.J., "Nonlinear vibration of composite shell subjected to resonant excitations", *Journal of Aerospace Engineering*, 2000, vol.13, no.2, pp.59-68.
- [39] Amabili, M., "Nonlinear vibrations and stability of shells and plates", London: Cambridge University Press, 2008.
- [40] Amabili, M., and Reddy, J., "A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2010, vol.45, no.4, pp.409-418.
- [41] Mantari, J., and Soares, C.G., "Finite element formulation of a generalized higher order shear deformation theory for advanced composite plates", *Composite Structures*, 2013, vol.96, pp.545-553.
- [42] Oveissi, S., Toghraie, D., Eftekhari, S.A., and Chamkha, A.J. "Instabilities of SWCNT Conveying Laminar, Incompressible and Viscous Fluid Flow: Effects of Knudsen number, the Winkler, the Pasternak Elastic, and the Viscoelastic Medium", *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2019, vol.30, no.4, pp.1773-1794.
- [43] Liu, Z., Styers-Barnett, D.J., Puzetky, A.A., and et Al., "Pulsed laser CVD investigations of single-wall carbon nanotube growth dynamics", *Applied Physics A*, 2008, vol.93, no.4, pp.987-993.
- [44] Salehi-Khojin, A., and Jalili, N., "Buckling of boron nitride nanotube reinforced piezoelectric polymeric composites subject to combined electro-thermomechanical loadings", *Compos. Sci. Technol.*, 2008, vol.68, pp.1489-1501.
- [45] Sai, N., and Mele, E.J., "Microscopic theory for nanotube piezoelectricity", *Physical Review B*, 2003, vol.68, no.24, pp.241405.
- [46] Ke, L.L., Wang, Y.S., Yang, J., and Kitipornchai, S., "The size-dependent vibration of embedded magneto-electro-elastic cylindrical nanoshells", *Smart Materials and Structures*, 2014, vol.23, no.12, pp.125036.
- [47] Wang, Q., "On buckling of column structures with a pair of piezoelectric layers", *Engineering structures*, 2002, vol.24, no.2, pp.199-205.
- [48] Kraus, J., "Electromagnetics", USA: McGraw-Hill Inc., 1984.
- [49] White, F.M., "Fluid Mechanics", New York: McGraw-Hill, 1982.
- [50] Karniadakis, G., Beskok, A., and Aluru, N., "Microflows and nanoflows: Fundamentals and simulation", New York: Springer, Science-Business Media, vol.29, 2006.
- [51] Oveissi, S., Ghassemi, A., Salehi, M., Eftekhari, S.A., and Ziae, S., "Hydro-Hygro-Thermo-Magneto-Electro elastic wave propagation of axially moving nano-cylindrical shells conveying various magnetic-nano-fluids resting on the electromagnetic-visco-Pasternak medium", *Thin-Walled Structures*, 2022, vol.173, pp.108926.
- [52] Sadeghi-Goughari, M., Jeon, S., and Kwon, H.J., "Fluid structure interaction of cantilever micro and nanotubes conveying magnetic fluid with small size effects under a transverse magnetic field", *Journal of Fluids and Structures*, 2020, vol.94, pp.102951.
- [53] Malekzadeh, A., Heydarinasab, A., and Dabir, B., "Magnetic field effect on fluid flow characteristics in a pipe for laminar flow", *J. Mech. Sci. Technol.*, 2011, vol.25, no.2, pp.333-339.

- [54] Pollard, W., and Present, R.D., "On gaseous self-diffusion in long capillary tubes", *Physical Review*, 1984, vol.73, no.7, pp.762.
- [55] Ventsel, E., and Krauthammer, T., "Thin plates and shells: theory: analysis, and applications", New York: Marcel Dekker, 2001.
- [56] Shen, H.S., "Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells", CRC press, Taylor & Francis Group, 2016.
- [57] Zhang, Y., Wang, C., and Tan, V., "Assessment of Timoshenko beam models for vibrational behavior of single-walled carbon nanotubes using molecular dynamics", *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol.1, no.1, pp.89-106.
- [58] Ansari, R., Ajeti, S., and Arash, B., "Vibrations of single-and double-walled carbon nanotubes with layerwise boundary conditions: a molecular dynamics study", *Current Applied Physics*, 2012, vol.12, no.3, pp.707-711.
- [59] Wen, H., He, M.F., Huang, Y., and Chen, J. "Free vibration analysis of single-walled carbon nanotubes based on the nonlocal higher-order cylindrical beam model", *Acta Acustica united with Acustica*, 2018, vol.104, no.2, pp.284-294.
- [60] Mirsky, I., and Herrmann, G., "Nonaxially symmetric motions of cylindrical shells", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1958, vol.31, no.2, pp.250.
- [61] Reddy, J.N., "Exact solutions of moderately thick laminated shells", *Journal of Engineering Mechanics*, 1984, vol.110, no.5, pp.794-809.
- [62] Khalili, S., Davar, A., and Fard, K.M., "Free vibration analysis of homogeneous isotropic circular cylindrical shells based on a new three-dimensional refined higher-order theory", *International journal of Mechanical sciences*, 2012, vol.56, no.1, pp.1-25.
- [63] Armenàkas, Anthony E., Denos C. Gazis, and George Herrmann. "Free vibrations of circular cylindrical shells", New York: Elsevier, 2016.
- [64] Shokrgozar, A., Safarpour, H., and Habibi, M., "Influence of system parameters on buckling and frequency analysis of a spinning cantilever cylindrical 3D shell coupled with piezoelectric actuator", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2020, vol.234, no.2, pp.512-529.

1. Oak Ridge National Laboratory (ORNL)
2. Single-Layered Graphene Sheet (SLGS)
3. Rice University
4. Fulleren
5. Functionally Graded Materials (FGMs)
6. Flügge
7. Amabili-Reddy theory
8. Nano-Fluid-Structure Interaction problem (Nano-FSI)
9. Winkler springs
10. Airy coils
11. magnetic-electric-elastic nanosystem (MEE nano-system)
12. Cylindrical-Sinusoidal-Nonlocal Higher-Order Shear Deformation Theory (CSN-HSDT)
13. Lorentz force
14. Carbon Nano Shell (CNS)
15. Velocity Correction Factor (VCF)
16. Hartmann number
17. Knudsen number
18. Modified Bessel function
19. Pollard
20. $U_{\text{strain energy}}$
21. $U_{\text{virtual work}}$
22. $U_{\text{kinetic energy}}$
23. Molecular Dynamics (MD)
24. Nonlocal Timoshenko beam (NT)
25. Nonlocal Higher-order shell cylindrical beam (NH)
26. Single-Walled Carbon NanoTubes (SWCNTs)

-
27. Tersoff-Brenner
 28. Lennard Jones
 29. Phonon dispersion
 30. Cut-off frequency