

کنترل مرزی لوله قائم دریایی<sup>۱</sup> انعطاف‌پذیر با فرض پروفیل‌های خطی و

## نمایی برای جریان سطحی

ارسطو عظیمی

دانشجوی دکتری

دانشکده مهندسی مکانیک،

دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

Azimi.arastoo@aut.ac.ir

منوچهر صالحی\*

استاد دانشکده مهندسی مکانیک،

دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

msalehi@aut.ac.ir

فیروز بختیاری‌نژاد

استاد دانشکده مهندسی مکانیک،

دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

Baktiari@aut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۱۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۱/۲۵

## چکیده

در این مقاله، با استفاده از روش مستقیم لیپانوف<sup>۲</sup>، کنترل مرزی در انتهای بالایی لوله قائم انجام می‌شود تا زاویه نوک و ارتعاش عرضی لوله قائم که در معرض اغتشاش زمان متغیر قرار دارد کاهش داده شود. ابتدا، فرض می‌شود جریان سطح آب از سطح اقیانوس تا کف اقیانوس به صورت خطی کاهش یافته و به صفر برسد و سپس در حالت دوم به صورت نمایی به صفر کاهش یابد. ریز به صورت یک سامانه با پارامتر توزیع یافته با یک معادله دیفرانسیل جزئی<sup>۳</sup> (PDE) به همراه شرایط مرزی مدل می‌شود. به این دلیل که همه سیگنال‌های کنترلی را می‌توان با حسگرها اندازه‌گیری و یا با الگوریتم تفاضل برگشتی محاسبه کرد، کنترل مرزی را می‌توان با ابزار دقیق موجود به صورت عملی محقق و پیاده‌سازی کرد. روش مستقیم لیپانوف به منظور تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته به کار رفته است. در نهایت، کارایی این کنترل کننده تأیید شده و نتایج پروفیل‌های خطی و نمایی با هم مقایسه می‌شوند.

واژگان کلیدی: کنترل مرزی، لوله قائم دریایی، روش لیپانوف، پروفیل خطی، پروفیل نمایی

## ۱. مقدمه

به دلیل رشد سریع اکتشاف نفت در آب‌های عمیق، طراحی و حفظ یک لوله قائم دریایی بسیار اهمیت پیدا کرده است. لوله قائم دریایی که محل اتصال سکوی واقع در سطح آب و چشمه نفت در بستر دریا است نقشی مهم در حفاری نفت و انتقال محصولات پتروشیمی از چشمه به دکل‌های شناور دارد که در شکل ۱ مشاهده می‌شود [۱]. چنین ساختاری در معرض بارهای محیطی خشنی چون بار امواج، بار باد و

بارهای جریان اقیانوسی قرار دارد و این علاوه بر ارتعاش ناشی از گرداب<sup>۴</sup> (VIV) و موارد دیگر است. این پدیده‌ها ممکن است موجب خستگی لوله قائم شود که نتیجه آن آسیب جبران‌ناپذیر است. به همین دلیل، در دهه‌های گذشته محققان زیادی روی تحلیل ارتعاش لوله قائم تمرکز کرده‌اند. از منظر ریاضی، لوله قائم دریایی انعطاف‌پذیر را می‌توان به صورت یک سیستم پارامتر توزیع یافته با یک مجموعه معادله دیفرانسیل جزئی به همراه شرایط مرزی در نظر گرفت

تا بتوان پاسخ‌های دینامیکی را تحلیل کرد. چون نسبت قطر به طول لوله قائم کوچک است، می‌توان از روش معروف نظریه تیر اویلر-برنولی<sup>۵</sup> (EBBT) برای مدل‌سازی ریاضی لوله قائم بهره برد. چنین مدل‌های ایده‌آل تیر با شرایط مرزی مختلف تاکنون برای مطالعه و بررسی پاسخ دینامیکی چنین ساختارهایی به کار رفته‌اند [۲-۴]. به دلیل ماهیت لوله قائم، کنترل دینامیک آن به شکل معادلات دیفرانسیل جزئی کاری بسیار دشوار است. به‌طور معمول، روش‌های مرسوم که در آنها مدل بی‌شمار بعدی با یک مدل با ابعاد محدود تقریب زده می‌شود به‌منظور کنترل سیستم‌های انعطاف‌پذیر کنترلی استفاده می‌شوند [۵-۸].

این روش‌ها را مبتنی بر مدل کوتاه شده (ایتر یا ناقص) گویند که از معایب آنها را می‌توان به مودهای مدل نشده و یا باقیمانده اشاره کرد که موجب ناپایداری می‌شوند. این اثرات را آثار سرریز<sup>۶</sup> گویند. لذا، برای حصول دقتی بالا، لازم است تعداد مودهای انعطاف‌پذیر افزایش یابد. چون برای این کار نیاز به اندازه‌گیری‌های حالت کامل و مشاهده‌گران است، پیاده‌سازی کنترلی ممکن است دشوار باشد.

روش کنترل مرزی روشی مناسب برای غلبه بر ارتعاش ساختارهای الاستیک است [۹-۱۰] که با آثار سرریز مواجه نمی‌شود. همچنین این روش نیازمند تعداد کمتری حسگر و محرک در مقایسه با طرح‌های مبتنی بر مدل کوتاه شده است. در [۱۱]، یک کنترل مرزی فعال با یک قانون کنترلی مناسب جهت تضعیف و میرایی ارتعاشات نامطلوب در یک کابل ارائه شده است. کنترل مرزی فعال تیر اولر-برنولی با توانایی تولید شرط مرزی مطلوب در [۱۲] بررسی شد.

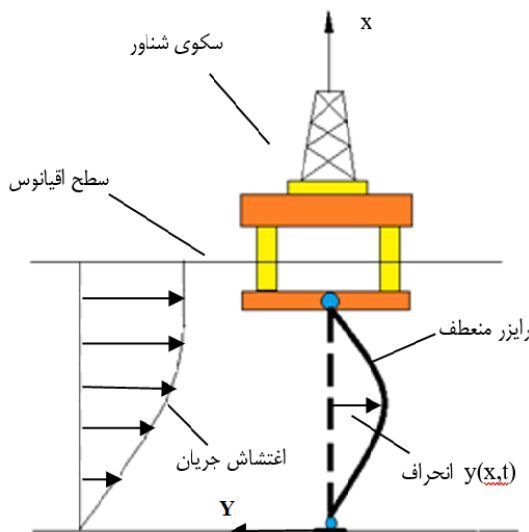
گام اول در توسعه اغتشاش جریان آب دریا این است که سرعت این جریان مدل‌سازی شود. دو حالت مختلف اتفاق می‌افتد. در حالت اول، سرعت جریان از سطح آب تا کف آب به‌صورت خطی به صفر می‌رسد و در حالت دوم این کاهش به‌صورت نمایی است.

هدف اصلی این است که زاویه نوک لوله قائم که در معرض نیروی توزیع یافته و نیز ارتعاش عرضی لوله قائم کاهش یابد. در این مقاله، از روش کنترل مرزی برای کنترل ارتعاش لوله قائم و کاهش زاویه نوک براساس هر دو حالت مذکور جهت مدل‌سازی پروفیل سرعت جریان استفاده شده است.

ادامه مقاله بدین صورت سازماندهی شده است. در بخش‌های ۱ و ۲ در فرمولاسیون مسأله، معادلات حاکم با شرایط مرزی براساس اصل همپلتون استخراج می‌شوند. مدل‌سازی هیدرودینامیک مسأله در بخش ۳ توسعه می‌یابد.

در بخش ۴، قانون کنترل مرزی از طریق روش مستقیم لیپانوف طراحی می‌شود که در آن پایداری حلقه بسته لوله قائم تحت اغتشاشات خارجی تضمین می‌شود.

در بخش ۵، شبیه‌سازی‌های عددی براساس روش مود مفروض<sup>۷</sup> و با کمک روش رانگ-کوتا برای هر دو پروفیل کاهش خطی و نمایی سرعت جریان انجام می‌گیرند.



شکل ۱. لوله قائم دریایی معمولی

## اختصارات

واحد	توضیح	نماد
$m$	جابه‌جایی در جهت عرضی لوله قائم	$y(x, t)$
$rad$	شیب لوله قائم	$y'(x, t)$
$m$	طول لوله قائم	$L$
$N/m^2$	تنش لوله قائم	$T$
$s$	زمان	$t$
$Kg/m$	جرم یکنواخت در واحد طول لوله قائم	$m_z$
$Kg/m^3$	چگالی آب دریا	$\rho_s$
$rad/s$	فرکانس	$\omega$
$J$	انرژی جنبشی	$E_k$
$J$	انرژی پتانسیل	$E_p$
$J$	کار انجام شده	$W$
$N/m^2$	صلبیت خمشی یکنواخت	$EI$
$N$	بار توزیع یافته وابسته به زمان	$f(x, t)$
$m/s$	سرعت جریان اقیانوسی	$U(t)$
$m/s$	پروفیل جریان	$U(x, t)$
$N.m$	گشتاور کنترلی	$\tau(t)$
$m$	قطر خارجی لوله قائم	$D$
بدون بعد	ضریب دراگ	$C_D$
بدون بعد	مشتق زمانی	$(*)$
بدون بعد	مشتق مکانی	$(**)$
بدون بعد	عملگر تغییر	$\delta$
بدون بعد	ضریب میرایی ساختاری خطی	$c$

## ۲. فرمولاسیون مسأله

### ۲-۱. تحلیل دینامیکی

انرژی جنبشی لوله قائم انعطاف‌پذیر،  $E_k$ ، را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$E_k = \frac{1}{2} m_z \int_0^l \left[ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (۱)$$

که  $y(x, t)$  و  $m_z > 0$  نشان‌دهنده فضای مستقل، زمان مستقل، جابه‌جایی لوله قائم برای موقعیت  $x$  در زمان  $t$ ، جرم واحد طول لوله قائم و طول لوله قائم هستند.

انرژی پتانسیل لوله قائم انعطاف‌پذیر،  $E_p$ ، ناشی از خمش [۱۳] را می‌توان چنین بیان کرد.

$$E_p = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left[ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (۲)$$

که  $EI$  صلبیت خمشی یا سختی خمشی لوله قائم است. آشکار است که انرژی پتانسیل به دلیل انرژی کرنشی لوله قائم است.

همان‌طور که پیشتر بیان شد، بار جریان اقیانوسی به صورت اغتشاش روی لوله قائم عمل می‌کند. کار انجام شده با این اغتشاش به صورت زیر به دست می‌آید.

$$W_f = \int_0^l f(x, t) y(x, t) dx \quad (۳)$$

که  $f(x, t)$  بار عرضی توزیع یافته روی لوله قائم در اثر هیدرودینامیک است. کار انجام گرفته با میراسازی روی لوله قائم را می‌توان اینگونه محاسبه کرد:

$$W_d = - \int_0^l c \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} y(x, t) dx \quad (۴)$$

که  $c$  ضریب میرایی ویسکوز توزیع شده لوله قائم انعطاف‌پذیر است. کار انجام شده با تنش داخلی  $T(x, t)$  در طول لوله قائم با  $W_t$  نمایش داده می‌شود و برابر است با:

$$W_t = - \int_0^l \frac{1}{2} T \left[ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (۵)$$

یک محرک گشتاور در بخش بالایی لوله قائم نصب می‌شود تا ارتعاش از طریق تولید یک ممان متمرکز  $\iota(t)$  کاهش یابد. برای محاسبه کار مجازی انجام شده با ممان متمرکز [۱۳]، مشاهده می‌شود که این از طریق چرخش انجام گرفته توسط گشتاور اعمالی با عبارت زیر بیان می‌شود.

$$W_m = \iota(t) \frac{\partial y(L, t)}{\partial x} \quad (۶)$$

در نهایت، معادله  $\gamma$  کل کار انجام شده را نشان می‌دهد.

$$W = W_t + W_f + W_d + W_m \quad (7)$$

### ۲-۲. روش همیلتون و معادله حرکت

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، مدل دینامیکی لوله قائم دریایی براساس نظریه تیر اویلر-برنولی توسعه یافته است. با این فرض و برای جابه‌جایی‌های کوچک، معادلات حرکت را می‌توان از کمیت‌های انرژی به شکل ارتعاش با استفاده از اصل همیلتون استخراج کرد. این اصل [۱۴] به این صورت است:

$$\int_{t_0}^{t_f} \delta(E_k - E_p + W) dt = 0 \quad (8)$$

که  $[t_0, t_f]$  فاصله زمانی عملکرد بوده و  $\delta$  عملگر تغییر است. با اعمال عملگر تغییر با  $\delta y(x, t) = 0$  در  $t = t_0, t_f$  و با انتگرال‌گیری از معادلات ۱، ۲ و ۷ به صورت بخش به بخش نسبت به معادله ۸، معادلات حاکم این سیستم حاصل می‌شوند.

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + m_z \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} - f = 0 \quad (9)$$

که  $\forall(x, t) \in (0, L) \times [0, \infty)$  شرایط مرزی سیستم را می‌توان با صفر قرار دادن عبارات با انتگرال‌های منفرد در اصل همیلتون به دست آورد.

$$y(0, t) = 0 \quad (10)$$

$$EI \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (11)$$

$$y(L, t) = 0 \quad (12)$$

$$EI \frac{\partial^2 y(L, t)}{\partial x^2} - \tau(t) = 0 \quad (13)$$

که معادلات ۱۰ و ۱۱ بیانگر یک پشتیبانی ساده در  $x = 0$  هستند، اما معادلات ۱۲ و ۱۳ نشان‌دهنده انحراف

صفر و  $\tau(t)$  گشتاور اعمالی در  $x = L$  هستند. همچنین، لوله قائم دریایی در ابتدا در حال استراحت است.

### ۳. جریان اقیانوسی زمان متغیر

آثار جریان اقیانوسی زمان متغیر  $V(x, t)$  روی لوله قائم دریایی را می‌توان به صورت نیروی تحریک گردابی مدل کرد [۱۵-۱۶]. عبارت  $f(x, t)$  در معادله ۳ را می‌توان به صورت ترکیبی از یک نیروی دراگ میانگین و یک دراگ نوسانی منظور کرد:

$$f(x, t) = \frac{1}{2} \rho_s C_D(x, t) U^2(x, t) D + A_D \cos(4\pi f_v t + \beta) \quad (14)$$

که  $\rho_s, D, C_D(x, t)$  و  $\beta$  به ترتیب چگالی آب دریا، قطر خارجی لوله قائم دریایی، ضریب دراگ و زاویه فاز هستند. همچنین،  $A_D$  که دامنه بخش نوسانی نیروی دراگ است معمولاً برابر ۲۰٪ اولین عبارت معادله فوق در نظر گرفته می‌شود [۱۶]. فرکانس جریان گردابه بدون بُعد  $f_v$  را می‌توان چنین بیان کرد:

$$f_v = \frac{S_t U(x, t)}{D} \quad (15)$$

که  $S_t$  عدد استروهال<sup>۸</sup> بوده و ۰/۲ اختیار شده و  $f_v = 2.625$  است.

در این مقاله برای پروفیل جریان دو حالت مختلف در نظر گرفته شده است:

(الف) پروفیل خطی؛ یعنی فرض شده است جریان سطح اقیانوسی داده شده  $U(L, t)$  به صورت خطی به صفر کاهش می‌یابد، و

(ب) پروفیل نمایی؛ یعنی فرض شده است جریان سطح اقیانوسی به صورت نمایی و براساس نظریه اکمن<sup>۹</sup> [۱۷] کاهش می‌یابد. لذا، دو پروفیل متفاوت برای جریان اقیانوسی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$U(x, t) = \frac{x}{L} U(L, t) \quad (\text{الف})$$

$$U(x, t) = U(L, t)e^{(-rx/U(L, t))} \quad (\text{ب})$$

**تذکره ۱-** نمادهای  $y'(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}$  و  $\dot{y}(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}$  در بخش‌های بعدی استفاده می‌شوند.

**فرض ۱-** فرض کنید یک ثابت  $\bar{f} \in R^+$  وجود دارد، و اغتشاش پراکنده  $f(x, t)$  کراندار است، طوری که  $\forall (x, t) \in [0, L] \times [0, \infty), \|f(x, t)\| \leq \bar{f}$  این یک فرض معقول است چرا که اغتشاش زمان متغیر  $f(x, t)$  دارای انرژی محدودی بوده و لذا کراندار است.

#### ۴. طرح کنترلی

هدف اصلی این مقاله این است که زاویه بخش بالایی لوله قائم کمینه شده و نیز ارتعاش عرضی لوله قائم کاهش یابد. در این بخش، علاوه بر تحلیل پایداری حلقه بسته سیستم، از

نظریه لیاپانوف به منظور ایجاد یک قانون کنترل مرزی  $\tau(t)$  برای هدف مذکور استفاده می‌شود.

#### ۴-۱. مقدمات

به منظور طراحی کنترل کننده و تأمین پایداری سیستم، برخی لم‌ها به صورت زیر ارائه می‌شوند.

لم ۱- [۱۹، ۲۰]. برای شرایط اولیه کراندار، اگر یک  $C^1$  پیوسته وجود داشته باشد و تابع لیاپانوف معین مثبت  $V(x, t)$  طوری که در رابطه  $k_1(\|x\|) \leq V(x) \leq K_2(\|t\|)$  صدق کند، طوری که

$k_1, k_2: R^n \rightarrow R$  که  $V(x, t) \leq -\lambda V(x, t) + c$  توابع کلاس  $k$  بوده و  $c$  یک ثابت مثبت باشد، آنگاه  $x=0$  پاسخ کراندار یکنواخت است.

لم ۲- [۲۱]. فرض کنید  $\emptyset_1(x, t), \emptyset_2(x, t) \in R$ ،  $\delta > 0$  با  $x \in [0, L]$  و  $t \in [0, \infty)$ ، آنگاه نامعادلات زیر برقرار است:

$$\begin{cases} \emptyset_1 \emptyset_2 \leq |\emptyset_1 \emptyset_2| \leq \emptyset_1^2 + \emptyset_2^2, \forall \emptyset_1, \emptyset_2 \in R \\ |\emptyset_1 \emptyset_2| = \left| \left( \frac{1}{\sqrt{\delta}} \emptyset_2 \right) \right| \leq \frac{1}{\delta} \emptyset_1^2 + \delta \emptyset_2^2 \end{cases} \quad (۱۶)$$

ویژگی ۱- [۲۳]. اگر انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم لوله قائم دریایی الاستیک معادلات ۹ تا ۱۳ که با معادلات ۱ و ۲ داده می‌شوند برای  $\forall (x, t) \in [0, L] \times [0, \infty)$  کراندار باشند، آنگاه  $y'(x, t), y''(x, t), y'''(x, t), y''''(x, t)$  و  $y''''(x, t)$  کراندار هستند.

#### ۴-۲. کنترل مرزی

تابع نامزد لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) \quad (۱۹)$$

که  $V_1(t)$  بیانگر انرژی به صورت زیر باشد:

لم ۳- [۲۱]. فرض کنید  $\emptyset(x, t) \in R$  یک تابع معین در فاصله  $x \in [0, L]$  و  $t \in [0, \infty)$  باشد که در شرط مرزی زیر صدق کند.

$$\emptyset(0, t) = 0, \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (۱۷)$$

آنگاه نامعادلات زیر برقرارند:

$$\begin{cases} \int_0^L \phi^2 dx \leq L^2 \int_0^L (\phi')^2 dx \\ \phi^2 \leq L \int_0^L (\phi')^2 dx, \quad \forall x \in [0, L] \end{cases} \quad (۱۸)$$

$$V_1(t) = \frac{1}{2}m_z \int_0^l \dot{y}^2 dx + \frac{1}{2}EI \int_0^l y''^2 dx + \frac{1}{2}T \int_0^l y'^2 dx \quad (20)$$

لم ۴- تابع لیپانوف معادله ۱۹ می‌تواند به صورت کراندار از بالا و پایین باشد.

$$0 \leq \gamma_1(V_1(t) + [y'(L, t)]^2) \leq V(t) \leq \gamma_2(V_1(t) + [y'(L, t)]^2) \quad (23)$$

که  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  ثابت‌های مثبت هستند.

اثبات- با استفاده از نامعادلات ۱۶ و ۱۸ روی معادله ۲۱ چنین به دست می‌آوریم:

$$|V_2(t)| \leq \beta m_z \int_0^l (y^2 + \dot{y}^2) dx \leq \beta m_z \int_0^l \dot{y}^2 dx + \beta m_z L^2 \int_0^l y'^2 dx \leq \xi V_2(t) \quad (24)$$

لم ۵- مشتق زمانی تابع لیپانوف در معادله ۱۹ را می‌توان با عبارت زیر از بالا کراندار کرد:

$$\dot{V}(t) \leq -\gamma_3(V_1(t) + [y'(L, t)]^2) + \varepsilon \quad (28)$$

که در آن  $\gamma_3$  و  $\varepsilon$  پارامترهای مثبت هستند.

اثبات- با گرفتن مشتق زمانی از نامزد تابع لیپانوف،  $\dot{V}(t)$  داریم:

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) \quad (29)$$

عبارت اول در معادله بالا با استفاده از معادله ۹ و انتگرال گیری بخش به بخش منجر می‌شود به:

و یک عبارت عرضی کوچک با  $V_2(t)$  تعریف شود.

$$V_2(t) = \beta m_z \int_0^l y \dot{y} dx \quad (21)$$

و نیز  $V_3(t)$  به صورت زیر است:

$$V_3(t) = \frac{1}{2} \alpha [y'(L, t)]^2 \quad (22)$$

توجه شود که  $\alpha$  و  $\beta$  پارامترهای مثبت هستند.

که،  $\xi = 2\beta m_z \frac{\max\{1, L^2\}}{\min\{m_z, EI, T\}}$ ، لذا،  $\beta$  را می‌توان طبق شرط کافی زیر انتخاب کرد:

$$\beta \leq \frac{\min\{m_z, EI, T\}}{\max\{1, L^2\}} \quad (25)$$

بنابراین داریم:

$$-\xi V_1(t) \leq V_2(t) \leq \xi V_1(t) \quad (26)$$

و در نتیجه داریم:

$$\xi_1 V_1(t) \leq V_1(t) + V_2(t) \leq \xi_2 V_1(t) \quad (27)$$

که  $\xi_2 = 1 + \xi > 1$  و  $\xi_1 = 1 - \xi > 0$ .

در نهایت، با تابع معادله ۱۹ می‌توان کران بالا و پایین در

معادله ۲۳ را با  $\gamma_1 = \min\{\xi_1, 0.5\alpha\}$  و

$\gamma_2 = \max\{\xi_2, 0.5\alpha\}$  به دست آورد.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \int_0^l (m_z \dot{y} \ddot{y} + EI y'' \dot{y}'' + T y' \dot{y}') dx = \\ & \int_0^l (\dot{y}(f - c\dot{y} - EI y'''' + T y'') + EI y'' \dot{y}'' + T y' \dot{y}') dx = \quad (30) \\ & [EI y'' \dot{y}' - EI y'''' \dot{y} + T y' \dot{y}]_0^l + \int_0^l [f \dot{y} - c \dot{y}^2] dx \end{aligned}$$

همان طور که می‌دانیم، طبق معادله ۹  $m_z \dot{y} = f - c\dot{y} - EI y'''' + T y''$  با استفاده از شرایط مرزی (معادلات ۱۰ تا ۱۳) در معادله ۳۰، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= [EI y''(L, t) \dot{y}'(L, t)] + \int_0^l [f \dot{y} - c \dot{y}^2] dx = \\ & \tau(t) \dot{y}'(L, t) + \int_0^l f \dot{y} dx - c \int_0^l \dot{y}^2 dx \quad (31) \end{aligned}$$

که به دلیل شرایط مرزی داریم  $\dot{y}(0, t) = \dot{y}(L, t) = 0$  با کمک نامعادله ۱۶، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &\leq \tau(t) \dot{y}'(L, t) + \frac{1}{\delta_1} \int_0^l f^2 dx - \\ & (c - \delta_1) \int_0^l \dot{y}^2 dx \quad (32) \end{aligned}$$

که  $\delta_1$  عملگر تغییر بدون بعد مثبت است. مشتق زمانی  $V_2(t)$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= \beta m_z \int_0^l (\dot{y}^2 + y \ddot{y}) dx = \\ & \beta \int_0^l (m_z \dot{y}^2 + y(f - c\dot{y} - EI y'''' + T y'')) dx = \quad (33) \\ & \beta \int_0^l (-EI y y'''' + f y - c y \dot{y} + T y y'' + m_z \dot{y}^2) dx \end{aligned}$$

با انتگرال گیری بخش به بخش و استفاده از شرایط مرزی، عبارت اول معادله ۳۳ به صورت زیر ساده سازی می‌شود.

$$-\beta c \int_0^l y \dot{y} dx \leq \frac{\beta c}{\delta_3} \int_0^l \dot{y}^2 dx \quad (36)$$

$$+ \beta c L^2 \delta_3 \int_0^l y'^2 dx$$

که در آن  $\delta_3 > 0$  عبارت چهارم از طریق انتگرال‌گیری بخش به بخش و با استفاده از شرایط مرزی به دست خواهد آمد:

$$\beta T \int_0^l y y'' dx = \beta T [y y']_0^l \quad (37)$$

$$- \beta T \int_0^l y'^2 dx$$

با جای‌گذاری معادلات ۳۲ تا ۳۷ در معادله ۲۹، خواهیم داشت:

$$\dot{V}(t) \leq (\dot{y}'(L, t) + \beta y'(L, t)) \tau(t) -$$

$$\left( c - \beta m_z - \delta_1 - \beta \frac{c}{\delta_3} \right) \int_0^l \dot{y}^2 dx$$

$$+ \left( \frac{1}{\delta_1} + \frac{\beta}{\delta_2} \right) \int_0^l f^2 dx - \beta EI \int_0^l y''^2 dx - \quad (38)$$

$$\beta (T - c \delta_3 L^2 - \delta_2 L^2) \int_0^l y'^2 dx$$

$$+ \alpha \dot{y}'(L, t) y'(L, t)$$

که منجر به انتخاب  $\alpha$ ی برابر  $k_2 + k_1 \beta$  در معادله ۲۲ خواهد شد. با جای‌گذاری قانون کنترلی معادله ۳۹ خواهیم داشت:

$$-\beta \int_0^l EI y y''' dx \quad (34)$$

$$= \beta \tau(t) y'(L, t)$$

$$- \beta EI \int_0^l y''^2 dx$$

عبارت دوم با استفاده از نامعادله ۱۶ عبارت زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\beta \int_0^l f y dx \leq \frac{\beta}{\delta_2} \int_0^l f^2 dx \quad (35)$$

$$+ \beta L^2 \delta_2 \int_0^l y'^2 dx$$

که  $\delta_2 > 0$  از عبارت سوم در ۱۶ به دست می‌آید:

با در نظر گرفتن قانون کنترل مرزی زیر:

$$\tau(t) = -k_1 \dot{y}'(L, t) - k_2 y'(L, t) \quad (39)$$



$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -k_1[\dot{y}'(L, t)]^2 - k_2[y'(L, t)]^2 + \\ & \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{\beta}{\delta_2}\right) \int_0^l f^2 dx \\ & - \left(c - \beta m_z - \delta_1 - \beta \frac{c}{\delta_3}\right) \int_0^l \dot{y}^2 dx - \\ & \beta EI \int_0^l y''^2 dx \\ & - \beta(T - c\delta_3 L^2 - \delta_2 L^2) \int_0^l y'^2 dx \leq \\ & -\gamma_3(V_1(t) + [y'(L, t)]^2) + \varepsilon \end{aligned} \quad (40)$$

که:

$$\begin{aligned} V(t) \leq & \left(V(0) - \frac{\varepsilon}{\gamma}\right) e^{-\gamma t} + \frac{\varepsilon}{\gamma} \\ & \leq V(0) e^{-\gamma t} + \frac{\varepsilon}{\gamma} \end{aligned} \quad (43)$$

با کمک معادلات ۱۸، ۲۰ و ۲۳:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2L} T y^2(x, t) \leq & \frac{1}{2} T \int_0^l y'^2(x, t) dx \\ & \leq V_1(t) \leq \frac{1}{\gamma_1} V(t) \end{aligned} \quad (44)$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت که  $y(x, t), \dot{y}(x, t), y'(x, t)$  و  $y''(x, t)$  کراندار هستند چون  $V_1(t)$  کراندار است (با توجه به معادله ۴۴ در نتیجه، داریم:

$$|y(x, t)| \leq \sqrt{\frac{2L}{T\gamma_1} \left[ V(0) e^{-\gamma t} + \frac{\varepsilon}{\gamma} \right]} \quad (45)$$

قضیه ۲- برای سیستم توصیف شده با معادله ۹، و شرایط مرزی ۱۰ تا ۱۳، بدون حضور اغتشاش جریان اقیانوسی، یعنی با فرض  $f(x, t) = 0$ ، قانون کنترلی پیشنهادی معادله ۳۹ پایداری نمایی جابه‌جایی لوله قائم را به صورت زیر تضمین می‌کند:

$$y_3 = \min \left\{ \frac{\varepsilon_1}{m_z}, \beta, \frac{\varepsilon_2}{T}, k_2 \beta \right\} > 0,$$

$$\varepsilon = \left( \frac{1}{\delta_1} + \frac{\beta}{\delta_2} \right) \max_{t \in [0, \infty)} \int_0^l f^2 dx < \infty,$$

$$\varepsilon_1 = c - \beta m_z - \delta_1 - \beta \frac{c}{\delta_3} > 0,$$

$$\varepsilon_2 = T - c\delta_3 L^2 - \delta_2 L^2$$

با توجه به معادلات ۲۳ و ۴۰،

$$\dot{V}(t) \leq -\gamma V(t) + \varepsilon \quad (41)$$

که  $\gamma = \gamma_3 / \gamma_2$

اکنون نوبت آن است که قضیه پایداری را برای سیستم لوله قائم دریایی حلقه بسته ارائه دهیم.

قضیه ۱- برای سیستم لوله قائم دریایی بیان شده با معادله ۹ با شرایط مرزی (معادلات ۱۰ تا ۱۳) با در نظر گرفتن فرض شماره ۱ و قانون کنترلی پیشنهادی معادله ۳۹، کراندار می‌تواند سیستم حلقه بسته را می‌توان استنتاج کرد.

اثبات- با ضرب معادله ۴۱ در عبارت  $e^{\gamma t}$  خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} (V(t) e^{\gamma t}) \leq \varepsilon e^{\gamma t} \quad (42)$$

با انتگرال‌گیری از نامعادله فوق و اعمال لم ۱ داریم:

مرزی متناظر معادلات ۱۰ تا ۱۳ اعمال می‌شود تا کارایی کنترل پیشنهادی نشان داده شود. پارامترهای سیستم در جدول ۱ آمده است.

از روش مود مفروض<sup>۱۰</sup> به‌عنوان یک روشی عددی در این پژوهش استفاده شود تا معادلات مشتقات جزئی مربوط به لوله قائم دریایی انعطاف‌پذیر را حل کنیم. لذا، شبیه‌سازی‌ها با مدل روش مود مفروض انجام گرفتند تا عملکرد قانون کنترلی پیشنهادی معادله ۳۹ بررسی شود.

از یک برنامه رانگ‌کوتای<sup>۱۱</sup> مرتبه چهارم نیز برای حل عددی معادلات مشتقات معمولی برای مختصات تعمیم یافته استخراج شده توسط روش مود مفروض استفاده شد. سرعت جریان سطحی اقیانوسی  $U(L, t)$  به‌صورت زیر مدل می‌شود:

$$U(L, t) = U_{bar} + U_{osc} \sum_{i=1}^N \sin(\omega_i t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (50)$$

که  $U_{bar}$  جریان گردشی متوسط اقیانوسی بوده و  $U_{osc}$  دامنه گردش نوسانی جریان اقیانوسی است، که به ترتیب  $2m/s$  و  $0.2m/s$  در نظر گرفته شده اند. شکل ۲ پروفیل سرعت جریان سطحی آب مدل شده توسط معادله ۵۰ را نشان می‌دهد.

همان‌طور که مشخص است، وقتی فرکانس اغتشاش جریان اعمال شده به یکی از فرکانس‌های طبیعی تنظیم می‌شود، پدیده تشدید (رزونانس) اتفاق می‌افتد که منجر به ارتعاشات بزرگ می‌شود.

بنابراین، در این پژوهش، بدترین حالت که در آن فرکانس نیروی اعمالی با فرکانس‌های طبیعی سیستم برابر است در نظر گرفته می‌شود. چهار مود اول با فرکانس‌های  $\{\omega_i = 0.867, 1.827, 2.946, 4.282/s\}$  در نظر گرفته شده است و شبیه‌سازی‌ها براساس این فرکانس‌ها برای نیروی هیدرودینامیکی اعمالی انجام گرفتند.

$$|y(x, t)| \leq \sqrt{\frac{2\gamma_2 L}{T\gamma_1} \exp\left(-\frac{\gamma_3}{\gamma_2} t\right)}, \quad \forall x \in [0, L] \quad (46)$$

که  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  ثابت‌های مثبت هستند.

اثبات- با شرط ارتعاش آزاد  $\varepsilon = 0$ ، چون  $f(x, t) = 0$ ، بنابراین با در نظر گرفتن معادلات ۲۳ و ۴۱، داریم:

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{\gamma_3}{\gamma_2} V(t) \quad (47)$$

که منجر به راه حل زیر می‌شود:

$$V(t) \leq V(0) \exp\left(-\frac{\gamma_3}{\gamma_2} t\right) \leq \gamma_2 [V_1(t) + y'^2(L, t)] \exp\left(-\frac{\gamma_3}{\gamma_2} t\right) \quad (48)$$

به‌طور مشابه، با استفاده از معادلات ۱۸، ۲۰ و ۲۳، داریم:

$$\frac{1}{2L} T y^2(x, t) \leq \frac{1}{2} T \int_0^l y'^2(x, t) dx \leq V_1(t) \leq \frac{1}{\gamma_1} V(t) \quad (49)$$

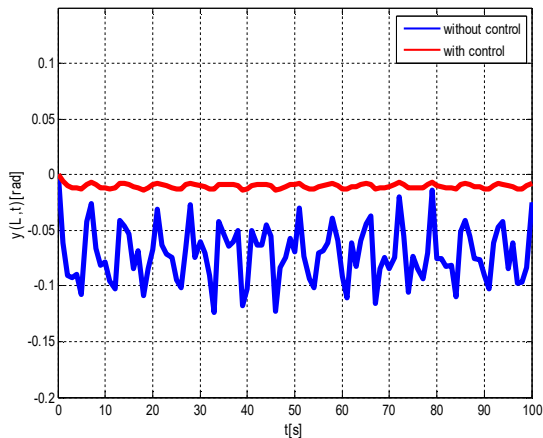
تذکر ۲- چون زاویه بالای لوله قائم،  $y'(L, t)$ ، را می‌توان به‌طور مستقیم با استفاده از زاویه‌سنج اندازه‌گیری کرد و  $y'(L, t)$  را می‌توان با گرفتن مشتق زمانی از اندازه‌گیری زاویه بالای لوله قائم به‌دست آورد، پس کنترل پیشنهادی قابل پیاده‌سازی است. همچنین، چون همه حالات لازم را می‌توان به‌طور مستقیم اندازه‌گیری و مشاهده کرد، از اثر سرریز مشاهده‌گر صرف‌نظر می‌شود.

تذکر ۳- مسأله سرریز کنترلی نیز اجتناب می‌شود چون قانون کنترل مرزی براساس معادلات مشتق جزئی و بدون استفاده از هیچ مدل کوتاه شده‌ای استخراج می‌شود.

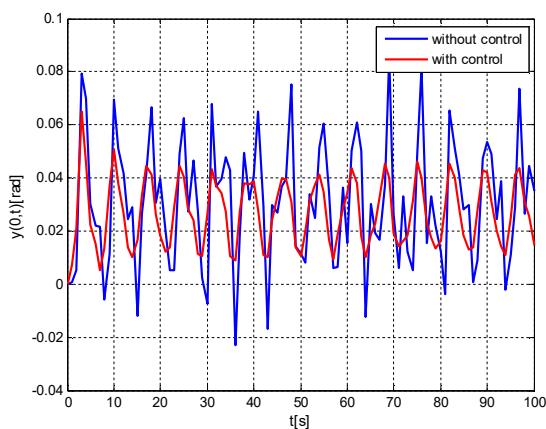
## ۵. تحلیل شبیه‌سازی

در این بخش، کنترل مرزی توسعه یافته معادله ۳۹ به سیستم حلقه بسته لوله قائم دریایی معادله ۹ با شرایط

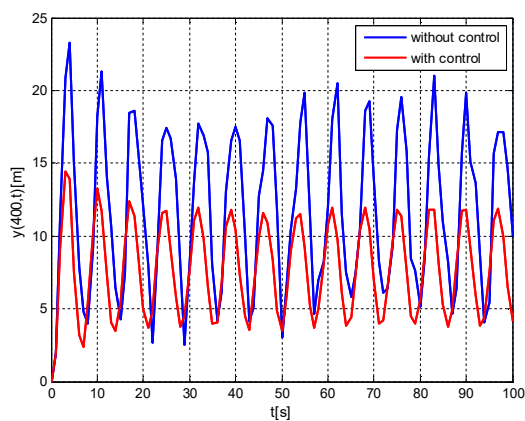
بالای لوله قائم دیده می‌شود. این به دلیل آن است که محرک در موقعیت بالای لوله قائم واقع است. پاسخ ارتعاش عرضی کنترل شده و کنترل نشده لوله قائم در  $x = 750 \text{ m}$  و  $x = 400 \text{ m}$  به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده است.



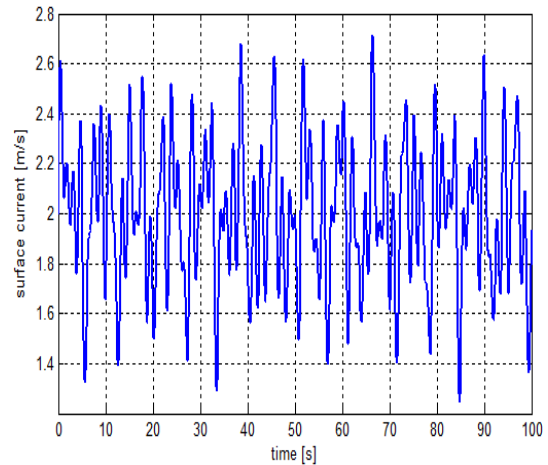
شکل ۳. زاویه بالای لوله قائم



شکل ۴. زاویه پایین لوله قائم



شکل ۵. جابه‌جایی لوله قائم در  $x = 400 \text{ m}$



شکل ۲. پروفیل سرعت جریان سطحی آب (m/s)

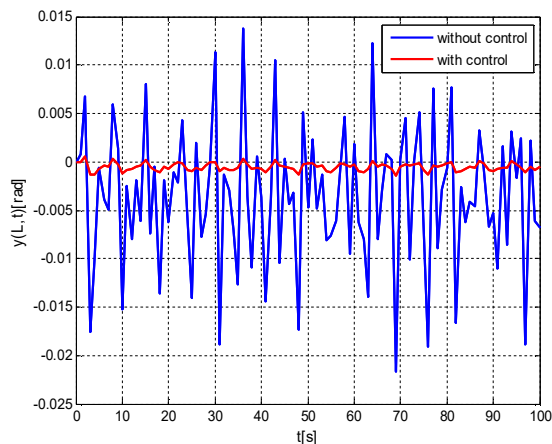
جدول ۱. مقادیر عددی پارامترهای سیستم

مقدار	پارامترهای سیستم فیزیکی
$4.0 \times 10^9 \text{ N/m}^2$	صلبیت خمشی ( $EI$ )
1000 m	طول لوله قائم ( $L$ )
15 kg/m	جرم واحد طول ( $m_z$ )
$152.4 \times 10^{-3} \text{ m}$	قطر بیرونی ( $D$ )
$1024 \text{ kg/m}^3$	چگالی آب دریا ( $\rho_s$ )
5.0 (-)	میرایی ساختاری ( $C$ )
$1.11 \times 10^6 \text{ N/m}^2$	تنش ( $T$ )
1.361 (-)	ضریب دراگ ( $C_D$ )
0.2 (-)	عدد استروهل ( $S_t$ )
2.625 rad/s	فرکانس جریان گردابه ( $f_v$ )
0	زاویه فاز سیال ( $\beta$ )

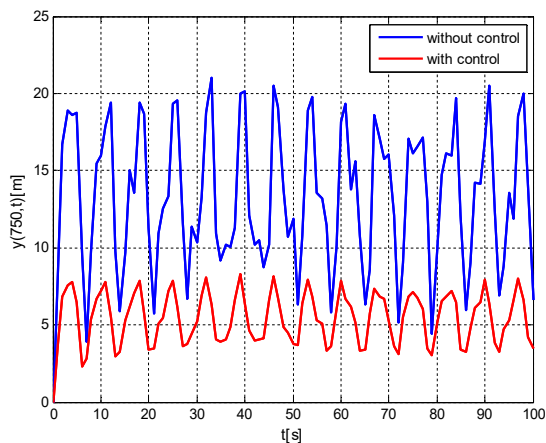
### ۱-۵. پروفیل خطی سرعت جریان

در این بخش فرض شده است سرعت جریان اقیانوسی از سطح اقیانوس تا کف آن به صورت خطی کاهش می‌یابد و شبیه‌سازی‌ها براساس این فرض انجام می‌گیرند. پارامترهای کنترلی به صورت  $k_1 = k_2 = 1 \times 10^9$  تنظیم می‌شوند.

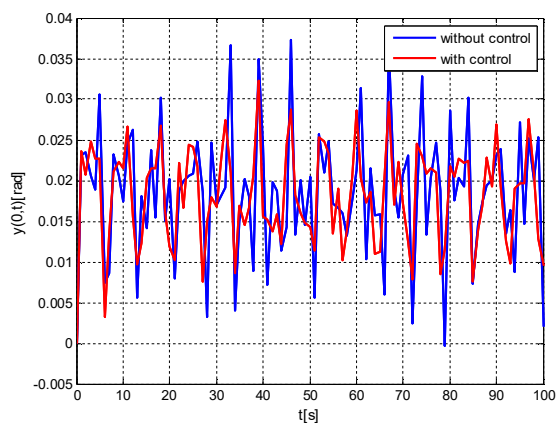
شکل‌های ۳ و ۴ نشان دهنده زوایای بالا و پایین کنترل شده و کنترل نشده لوله قائم هستند. همان‌طور که در شکل ۳ دیده می‌شود، با اعمال کنترل، بهبود چشمگیری در زاویه



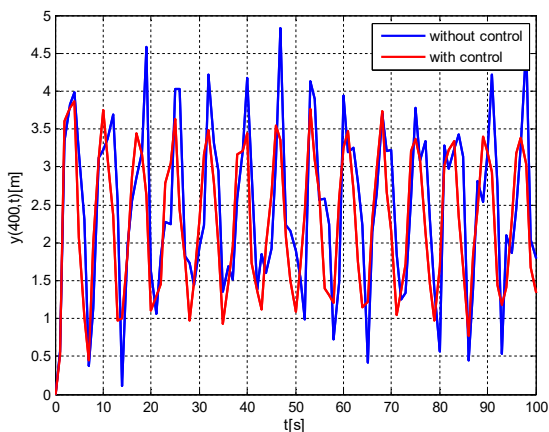
شکل ۷. زاویه بالای لوله قائم



شکل ۶. جابه‌جایی لوله قائم در  $x = 750 m$



شکل ۸. زاویه پایین لوله قائم



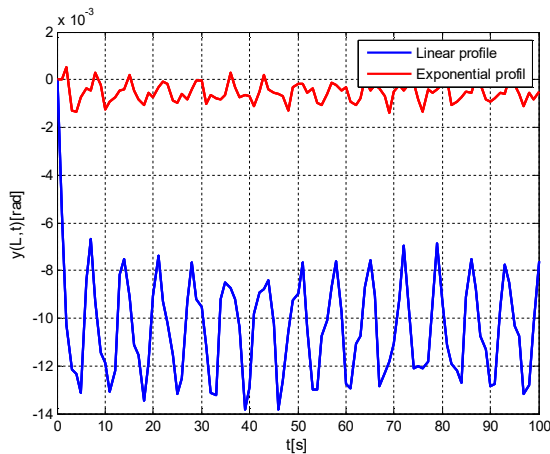
شکل ۹. جابه‌جایی لوله قائم در  $x = 400 m$

مشاهده می‌شود که در حالت کنترل شده اوج دامنه‌های ارتعاش در هر دو مکان کاهش یافته است.

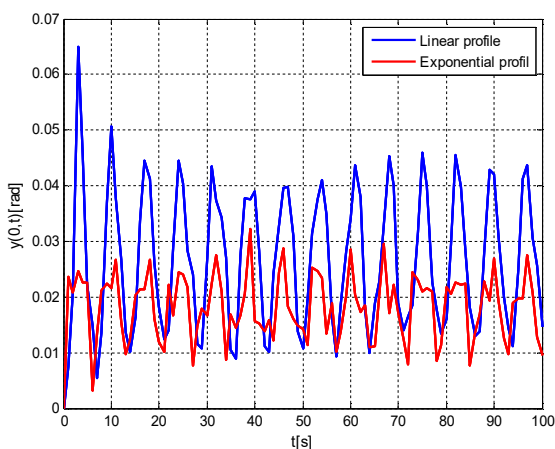
## ۵-۲. پروفیل نمایی سرعت جریان

در این بخش شبیه‌سازی مبتنی بر نظریه اکمن هستند که در آن سرعت جریان اقیانوسی فرض شده است از سطح تا کف اقیانوس به صورت نمایی کاهش می‌یابد. پارامترهای کنترلی مشابه حالت قبلی هستند. زوایای بالا و پایین لوله قائم در حالت با و بدون کنترل کننده به ترتیب در شکل‌های ۷ و ۸ نشان داده شده‌اند. مشابه بخش قبلی، اصلاحات قابل توجهی در پاسخ زاویه بالا موقع اعمال کنترل مشاهده می‌شود.

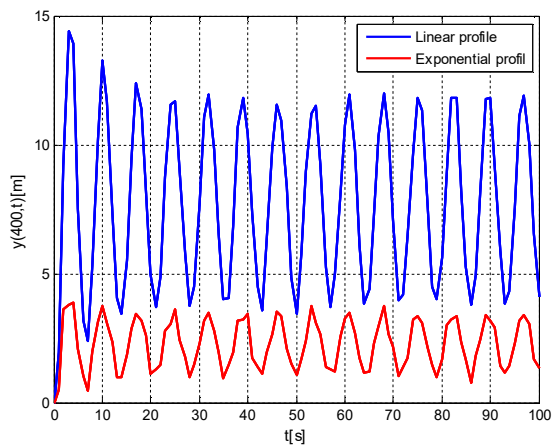
شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان دهنده جابه‌جایی‌های کنترل شده و کنترل نشده لوله قائم به ترتیب  $x = 400 m$  و  $x = 750 m$  هستند.



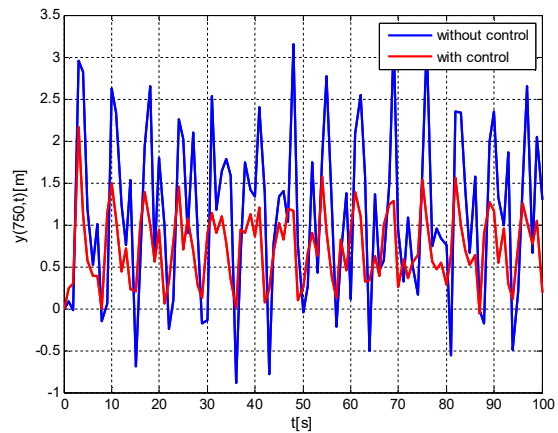
شکل ۱۱. زاویه بالای لوله قائم



شکل ۱۲. زاویه پایین لوله قائم



شکل ۱۳. جابه‌جایی لوله قائم در  $x = 400 m$



شکل ۱۰. جابه‌جایی لوله قائم در  $x = 750 m$

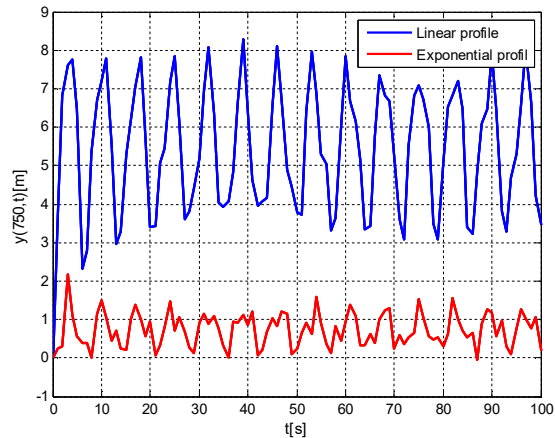
### ۳-۵. مقایسه پروفیل‌های خطی و نمایی

همان‌طور که پیش‌تر ذکر شد، دو مدل‌سازی سرعت جریان اقیانوسی و نیز نیروی دراگ دو حالت مختلف وجود دارد. در حالت اول، نیروی توزیع شده وابسته به زمان براساس پروفیل کاهش خطی سرعت جریان توسعه می‌یابد و در حالت دوم براساس پروفیل کاهشی نمایی. شکل‌های ۱۱ و ۱۲ به ترتیب زوایای بالا و پایین کنترل شده لوله قائم را متناسب با پروفیل‌های خطی و نمایی نمایش می‌دهند. توجه شود که شکل قانون کنترلی و پارامترهای کنترلی در هر دو مورد فوق مشابه است. طبق شکل ۱۰ مشاهده می‌شود که کنترل کننده در حالت نمایی در نزدیک صفر کردن دامنه زاویه بالای لوله قائم کارآمدتر از حالت خطی است. لذا چنین استنتاج می‌شود که با مدل‌سازی سرعت جریان با کمک پروفیل کاهشی نمایی، تلاش کنترلی کمتری برای حصول همان پاسخ متناظر با پروفیل خطی لازم است. پاسخ ارتعاشی عرضی لوله قائم در  $x = 400 m$  و  $x = 750 m$  با در نظر گرفتن هر دو مورد به ترتیب در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ دیده می‌شود. ورودی‌های کنترلی متناظر با پروفیل‌های خطی و نمایی نیز در شکل ۱۵ مشاهده می‌شود.

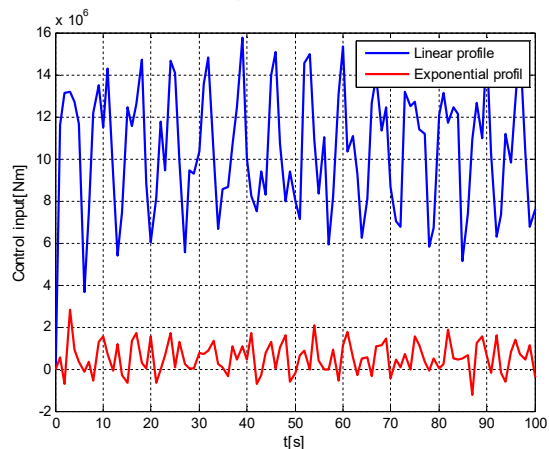
## ۶. نتیجه گیری

در این پژوهش، پاسخ ارتعاش عرضی و زوایای انتهایی لوله قائم دریایی انعطاف پذیر مقید به نیروی جریان توزیع شده وابسته زمانی براساس روش های نظریه تیر اویلر-برنولی و روش مود مفروض با کمک اصل همپلتون بررسی شدند. محرک گشتاور در نوک لوله قائم قرار دارد تا زاویه بالایی لوله قائم و پاسخ ارتعاش عرضی کاهش یابد. کنترل کننده مرزی براساس معادلات مشتقات جزئی لوله قائم دریایی انعطاف پذیر با کمک روش مستقیم لیپانوف طراحی شد.

لذا، مسائل مربوط به طرح های مبتنی بر مدل کوتاه شده دیگر وجود ندارند. پایداری حلقه بسته سیستم به طور مستقیم با اعمال کنترل پیشنهادی اثبات شد. هر دو پروفیل سرعت جریان خطی و نمایی به منظور مدل سازی هیدرودینامیک در نظر گرفته شدند. بررسی های عددی نشان می دهد که اصلاح چشم گیری در نزدیک صفر کردن دامنه زاویه بالایی لوله قائم حاصل شده است. همچنین، در حالت نمایی، با قانون کنترلی و پارامترهای کنترلی یکسان با کنترل کننده خطی، کنترل کننده نسبت به حالت خطی کارآمدتر است.



شکل ۱۴. جابه جایی لوله قائم در  $x = 750 m$



شکل ۱۵. ورودی کنترلی در مرز.

## ۷. مأخذ

- [1] Chen, Yung-Hsiang, and Fu-Ming Lin, "General drag-force linearization for nonlinear analysis of marine risers", *Ocean engineering*, 1989, Vol.16, no.3, pp.265-280.
- [2] Young, R. D., Joe R. Fowler, E. A. Fisher, and R. R. Luke, "*Dynamic analysis as an aid to the design of marine risers*", 1978, pp: 200-205.
- [3] Patel, M. H., and A. S. Jesudasan, "Theory and model tests for the dynamic response of free hanging risers", *Journal of sound and vibration*, 1987, Vol.112, no.1, pp.149-166.
- [4] Kaewunruen, Sakdirat, Julapot Chiravatchradej, and Somchai Chucheeprakul, "Nonlinear free vibrations of marine risers/pipes transporting fluid", *Ocean Engineering*, 2005, Vol.32, no.3-4, pp.417-440.
- [5] Siciliano, Bruno, and Wayne J. Book, "A singular perturbation approach to control of lightweight flexible manipulators", *The International Journal of Robotics Research*, 1988, Vol.7, no.4, pp.79-90.
- [6] Vandegrift, M. W., Frank L. Lewis, and S. Q. Zhu, "Flexible-link robot arm control by a feedback linearization/singular perturbation approach", *Journal of Robotic Systems*, 1994, Vol.11, no.7, pp.591-603.
- [7] Christofides, Panagiotis D., and Antonios Armaou, "Global stabilization of the Kuramoto-Sivashinsky equation via distributed output feedback control", *Systems & Control Letters*, 2000, Vol.39, no.4, pp. 283-294.

- [8] Ge, Shuzhi Sam, Tong Heng Lee, and Z. P. Wang, "Model-free regulation of multi-link smart materials robots", *IEEE/ASME transactions on mechatronics*, 2001, Vol.6, no.3, pp.346-351.
- [9] Shahruz, S. M., and L. G. Krishna, "Boundary control of a non-linear string", *Journal of Sound and Vibration*, 1996, Vol.195, no.1, pp.169-174.
- [10] Shahruz, Shahram M., "Suppression of vibration in stretched strings by the boundary control", In *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, 1997, vol.1, pp.535-536. IEEE, 1997.
- [11] Baicu, C. F., Christopher D. Rahn, and B. D. Nibali, "Active boundary control of elastic cables: theory and experiment", *Journal of Sound and Vibration*, 1996, Vol.198, no.1, pp.17-26.
- [12] Tanaka, Nobuo, and Hiroyuki Iwamoto, "Active boundary control of an Euler-Bernoulli beam for generating vibration-free state", *Journal of sound and vibration*, 2007, Vol.304, no.3-5, pp.570-586.
- [13] Sakawa, Y., Matsuno, F., and Fukushima, S., *Modeling and Feedback Control of a Flexible Arm. Journal of Robotic Systems*, 1985.2 (4): p. 453-472.
- [14] Weaver Jr, William, Stephen P. Timoshenko, and Donovan Harold Young, "Vibration problems in engineering", John Wiley & Sons, 1990.
- [15] Goldstein, Herbert, Ch Poole, and J. Safko, "Classical Mechanics Addison-Wesley", Reading, MA, 1980, p.426.
- [16] Blevins, Robert D., "Flow-induced vibration", New York, 1977.
- [17] Faltinsen, Odd, "Sea loads on ships and offshore structures", Vol.1, Cambridge university press, 1993.
- [18] Feng, S. Z., F. Q. Li, and S. J. Li, "An introduction to marine science", China Higher Education Press, Beijing, China, 1999.
- [19] Dawson, D. M., Z. Qu, F. L. Lewis, and J. F. Dorsey, "Robust control for the tracking of robot motion", *International Journal of Control*, 1990, Vol.52, no.3, pp.581-595.
- [20] Ge, Shuzhi Sam, and Cong Wang, "Adaptive neural control of uncertain MIMO nonlinear systems", *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2004, Vol.15, no.3, pp.674-692.
- [21] Rahn, Christopher D., and C. D. Rahn, "Mechatronic control of distributed noise and vibration", New York, NY: Springer-Verlag, 2001.
- [22] Hardy, G., J. Littlewood, and G. Polya, "Inequalities", cambridge univ. Press, Cambridge, 1952.
- [23] De Queiroz, Marcio S., Darren M. Dawson, Siddharth P. Nagarkatti, and Fumin Zhang. "Lyapunov-based control of mechanical systems", Springer Science & Business Media, 2012.

پی نوشت:

1. Marine Riser
2. Lyapunov
3. partial differential equation
4. Vortex-induced vibration
5. Euler- Bernoulli beam theory
6. spillover
7. Assumed mode method (AMM)
8. Strouhal number
9. Ekman's theory
10. Assumed mode method
11. Runge-Kutta