

## بررسی روش‌های عددی در تحلیل ارتعاشات تیرهای دورانی

محمدرضا الهامی  
استادیار گروه مهندسی مکانیک  
دانشکده فنی و مهندسی  
دانشگاه جامع امام حسین (ع)  
melhami@ihu.ac.ir

سید علی موسوی\*  
دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک  
دانشکده فنی و مهندسی، مرکز تحقیقات هوایی نهاب  
دانشگاه جامع امام حسین (ع)  
amousavi@ihu.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۰۸/۲۱

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۵/۰۷

### چکیده

در این مقاله روش‌های عددی برای تعیین فرکانس‌های طبیعی تیرهای دورانی بررسی شده است. برای این منظور، ابتدا معادلات حاکم بر تیرهای دورانی ارائه می‌شود. سپس روش‌های عددی، شامل روش‌های مودهای فرضی و جرم‌های متمرکز معرفی می‌شوند؛ در این دسته‌بندی روش‌های رایلی ریتز، گالرکین و لاگرانژ زیرمجموعه روش‌های مودهای فرضی و روش‌های مایکل استاد و المان محدود زیرمجموعه روش‌های جرم‌های متمرکز می‌باشند. پس از معرفی تمامی روش‌های یادشده، در ادامه روش‌های مودهای فرضی به زبان متلب و روش‌های جرم‌های متمرکز به زبان فرترن کدنویسی می‌شوند و با مقاله‌ای که دارای نتایج تحلیلی دقیقی با استفاده از سری‌های فروبنیوس می‌باشد مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. در نهایت مشخص می‌شود که نتایج جرم‌های متمرکز تطابق خوبی دارند که از این میان، روش المان محدود بهترین روش جهت محاسبه فرکانس‌های طبیعی تیرهای دورانی است.

**واژگان کلیدی:** فرکانس طبیعی، تیرهای دورانی، رایلی ریتز<sup>۱</sup>، گالرکین<sup>۲</sup>، لاگرانژ<sup>۳</sup>، مایکل استاد<sup>۴</sup>، المان محدود

### ۱. مقدمه

پس باید فرکانس‌های طبیعی آنها به‌طور دقیقی تخمین زده شوند. به‌همین علت طی چند دهه اخیر، ارتعاشات آزاد تیرهای دورانی موضوع جذابی برای پژوهشگران بوده است. هوبولت و بروکس نخستین کسانی بودند که معادلات دیفرانسیل را برای حرکات خمش طولی، خمش عرضی و پیچش به‌همراه زاویه پیچشی اولیه را برای تیرهای دورانی به‌دست آوردند [۱]. تیر در نظر گرفته شده توسط هوبولت و بروک غیریکنواخت بود. از طرفی حل تحلیلی و دقیقی

تعیین رفتار دینامیکی تیرهای دورانی در طراحی قطعات مهندسی به‌ویژه صنایع هوافضا، عمران، خودروسازی و دیگر کاربردهای مهندسی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. فرکانس‌های طبیعی موضوع ویژه و مهمی در طراحی و استفاده این چنین سازه‌هایی است. در واقع برای جلوگیری از پدیده‌هایی چون تشدید، فلاتر و جز این‌ها در سازه‌هایی چون پره روتورها و ملخ بالگردها، پره توربین‌ها و کمپرسورها و ملخ‌های دریایی از نظریه تیرهای دورانی استفاده می‌شود.

برای معادلات فوق تقریباً ممکن نبود. لذا روش‌های متعددی برای حل تقریبی این معادلات ارائه شد. هانتز [۲] و وایت و همکاران [۳] نیز روش ماتریس انتگرالی<sup>۵</sup> را برای حل معادلات فوق ارائه نمودند. همچنین موری و همکاران [۴-۵] علاوه بر روش قبل، از روش دیگری به نام انتقال ماتریسی<sup>۶</sup> برای به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و خصوصیات دینامیکی تیر استفاده نمودند. رایت و همکاران [۶] نیز تحلیل دینامیکی تیرهای دوار همگن دارای توزیع جرم و سختی خطی را با استفاده از سری‌های فریبینوس<sup>۷</sup> انجام دادند. در این روش معادله دیفرانسیل حرکت به‌طور و جواب آن به‌صورت تابعی از سری‌های فریبینوس فرض شده است.

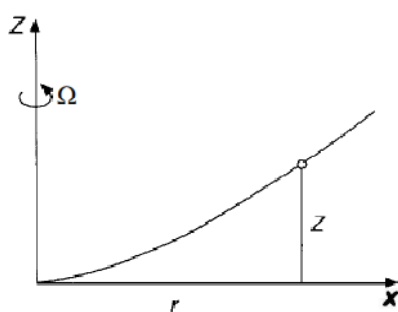
ردی [۷] روش‌های گالرکین، رایلی ریتز و باقیمانده‌های وزنی<sup>۸</sup> را برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی تیرها ارائه نمود و این روش‌ها را مورد مقایسه قرار داد. ناگولسوران [۸] نیز ارتعاش جانبی یک تیر یکنواخت اویلر - برنولی را بر مبنای حل عمومی معادله شکل مود و با استفاده از برهم‌نهی چهار تابع مستقل خطی بررسی کرد. هو و شین [۹] معادلات حرکت را برای یک تیر دوار در خمش خارج از صفحه<sup>۹</sup> و خمش درون صفحه<sup>۱۰</sup> استخراج و بسامدهای آن را محاسبه کردند. میل [۱۰] با استفاده از روش گالرکین در تیرهای دورانی به محاسبه فرکانس‌های طبیعی پره‌های هلی‌کوپتر و همچنین پایداری آنها پرداخته است. برامول [۱۱] به استخراج معادلات دیفرانسیل خارج از صفحه و داخل صفحه پره‌های روتور بالگرد پرداخته و روش‌های انرژی و مایکل استاد را برای حل این معادلات ارائه نموده است. راتو [۱۲] به روش‌های تقریبی محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها برای سیستم‌های پیوسته پرداخته و همچنین روش المان محدود را برای سیستم‌های پیوسته ارائه نموده است. تامسون [۱۳] نیز به مباحث پایه‌ای ارتعاشات و کاربردهای آن پرداخته و روش مایکل استاد را برای سیستم‌های پیوسته ارائه نموده است. فرانسیس و ایوان [۱۴] به ارائه روش‌های محاسبه فرکانس‌های طبیعی

و شکل مدها برای تیرهای دوار پرداختند. هوا [۱۵] با استفاده از این معادلات به بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای دورانی دارای جرم متمرکز و تأثیر نیروی گریز از مرکز، به روش اجزای محدود پرداخته است.

همان‌طور که در این مطالعات مشاهده می‌شود از روش‌های عددی متفاوتی برای حل ارتعاشی معادلات تیرهای دورانی استفاده شده است. در برخی منابع نیز از این معادلات جهت محاسبه بسامد پره‌های بالگرد استفاده شده است. این مطالعات نشان می‌دهد که روش حل عددی معادلات ارتعاشی با توجه به حساسیت موضوع امری مهم است که در مقاله پیش‌رو سعی شده روش‌های عددی موجود در این راستا بررسی و دقت این روش‌ها نسبت به یکدیگر مشخص شوند.

## ۲. معادلات حرکت تیرهای دورانی

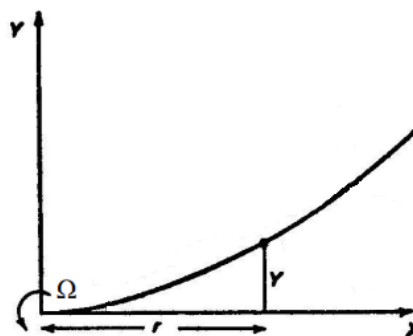
تیرهای دورانی دارای دو معادله حرکت خارج از صفحه دوران و داخل صفحه دوران هستند. حرکت خارج از صفحه دوران به‌عنوان تغییر مکان تیر در صفحه عمود بر صفحه دوران تیر تعریف می‌شود. این حرکت در شکل ۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱. حرکت خارج از صفحه دوران

در این شکل  $z$  بیانگر جابه‌جایی خارج از صفحه یک المان تیر،  $\Omega$  سرعت دورانی تیر و  $r$  مقدار فاصله از محور دوران است. در این حرکت مقدار نیروی گریز از مرکز در طول تیر تغییر می‌نماید. حرکت داخل صفحه به‌عنوان تغییر مکان تیر در صفحه افق یا صفحه دوران تیر شناخته می‌شود. در

این حرکت با توجه به اینکه جهت نیروی گریز از مرکز، شعاعی و راستای آن از محور دوران به سمت بیرون می‌باشد؛ در نتیجه علاوه بر مقدار، جهت نیروی گریز از مرکز در طول تیر تغییر می‌نماید. این حرکت در شکل ۲ نمایش داده شده است که در آن،  $Y$  بیانگر جابه‌جایی داخل صفحه یک المان تیر،  $\Omega$  سرعت دورانی تیر و  $r$  مقدار فاصله المان از محور دوران می‌باشد.



شکل ۲. حرکت داخل صفحه دوران

در این مقاله تنها به بررسی معادله خارج از صفحه دوران پرداخته شده است. معادله دیفرانسیل حرکت تیر دوار با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  در حرکت خارج از صفحه دوران به صورت معادله ۱ است.

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( EI \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( G \frac{\partial z}{\partial r} \right) + m\omega^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial f}{\partial r} \quad (1)$$

به طوری که در این رابطه  $G$  مقدار نیروی گریز از مرکز،  $EI$  مقدار سختی خمشی،  $z$  جابه‌جایی خارج از صفحه،  $r$  مقدار فاصله المان تیر از محور دوران،  $\omega$  فرکانس طبیعی تیر و  $f$  بیانگر بارهای خارجی وارده بر المان تیر است که شامل نیروهای اثرودینامیکی و اینرسی می‌باشد. این معادله یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه چهار خطی است. برای بررسی ارتعاشات آزاد تیر نیروهای خارجی برابر صفر قرار داده می‌شود و با فرض هارمونیک بودن تابع تغییر مکان و استفاده از روش جداسازی متغیرها معادله مشخصه ارتعاش

آزاد تیر دورانی در حرکت خارج از صفحه دوران در حالت بی‌بعد شده به صورت ۲ به دست می‌آید.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 S}{dx^2} \right) - R^2 \frac{d}{dx} \left( G \frac{dS}{dx} \right) - m\omega^2 R^4 S = 0 \quad (2)$$

در این رابطه  $S$  حرکت خارج از صفحه تیر است که تنها تابعی از  $x$  می‌باشد و  $R$  نیز طول کل تیر است. حل تحلیلی برای معادله ۲ وجود ندارد. در ادامه روش‌های عددی، جهت حل این معادله ارائه می‌شود. در حالت کلی این روش‌ها را می‌توان به دو دسته روش مودهای فرضی<sup>۱۱</sup> و روش جرم‌های متمرکز<sup>۱۲</sup> تقسیم‌بندی نمود.

### ۳. روش‌های مودهای فرضی

در روش مودهای فرضی جهت حل معادلات ارتعاشی، تابعی دلخواه که تقریبی از شکل مود سیستم باشد و شرایط مرزی را برآورده نماید انتخاب می‌گردد و در معادلات به جای تغییر مکان تیر قرار داده می‌شود و در نهایت فرکانس‌های طبیعی تیر به دست می‌آید. لازم به ذکر است هر مقدار که شکل مود فرضی دقیق‌تر باشد، نتایج نیز خطای کمتری خواهد داشت. با توجه به اینکه شکل مود تیرهای دورانی و غیردورانی بسیار به هم نزدیک‌اند از توابع شکل مود، تیرهای غیردورانی که موجودند برای شکل مود فرضی تیرهای دورانی استفاده می‌شود. در این مقاله سه روش مودهای فرضی؛ یعنی رایلی ریتز، گالرکین و لاگرانژ بررسی می‌شود.

#### ۳-۱. روش رایلی ریتز

در این روش از شکل ضعیف<sup>۱۳</sup> معادلات دیفرانسیل حرکت سیستم استفاده می‌شود [۷]. پس برای استفاده از روش رایلی ریتز ابتدا معادلات دیفرانسیل باید به شکل ضعیف آن تبدیل شود که معادله ۳ شکل ضعیف معادله حرکت تیر خارج از صفحه دوران می‌باشد. در روش رایلی ریتز از یک سری توابع تقریبی به صورت رابطه ۴ استفاده می‌شود.

به دست می‌آید و از این طریق می‌توان فرکانس‌های طبیعی تیر دورانی را استخراج نمود.

### ۳-۳. روش لاگرانژ

روش لاگرانژ متفاوت از دو روش دیگر است. روش‌های قبل به نوعی از معادله حرکت سیستم بهره می‌بردند، اما در این روش از معادلات انرژی سیستم استفاده می‌شود. به این ترتیب معادله انرژی جنبشی تیرهای دورانی عبارت است از:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^R m \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dr \quad (6)$$

همچنین انرژی پتانسیل تیر، که حاصل از انرژی کرنشی تیر است، از دو عامل خمش تیر و نیروی گریز از مرکز آن ناشی می‌شود که معادله ۷ انرژی کرنشی  $U_B$  ناشی از خمش تیر و معادله ۸ انرژی کرنشی  $U_G$  ناشی از نیروی گریز از مرکز می‌باشد.

$$U_B = \int_0^R EI \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \right)^2 dr \quad (7)$$

$$U_G = \int_0^R \left\{ G \sqrt{1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2} - G \right\} dr \quad (8)$$

در این روش توابع تقریبی شکل مود در معادلات انرژی جنبشی و پتانسیل تیر جایگذاری می‌شود و پس از آن، این معادلات در رابطه لاگرانژ (معادله ۹) جایگزین می‌گردند و ماتریس ضرایب حاصل از این روش به دست می‌آید. با مساوی صفر قراردادن دترمینان ماتریس ضرایب، معادله حاکم بر فرکانس‌های طبیعی تیر دورانی به دست می‌آید.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (9)$$

### ۴. روش‌های جرم‌های متمرکز

در این روش‌ها سازه تحت بررسی به المان‌هایی کوچکتر و مجزا تقسیم‌بندی شده و در این راستا معادلات حاکم بر یک المان به دست می‌آید و در نهایت به کل سیستم تعمیم داده می‌شود. روش‌هایی که در این قسمت مورد بحث قرار می‌گیرد دو روش مایکل استاد و المان محدود می‌باشد.

$$L = \frac{1}{2R} \int_0^1 \left[ m \omega^2 R^4 S^2 - EI \left( \frac{d^2 S}{dx^2} \right)^2 - R^2 G \left( \frac{dS}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (3)$$

$S_n(x) = A_1 \gamma_1(x) + A_2 \gamma_2(x) + \dots + A_n \gamma_n(x)$  (۴) جملات  $A_i \gamma_i(x)$  شرایط مرزی را برآورده می‌کنند. با جایگذاری این سری در معادله ۴ و با توجه به اینکه ضرایب  $A_1, A_2, \dots, A_n$  و مقادیری اختیاری هستند، شرطی که دارای یک مقدار پایا باشد آن است که:

$$\frac{\partial L}{\partial A_1} = \frac{\partial L}{\partial A_2} = \dots = \frac{\partial L}{\partial A_i} = \dots = \frac{\partial L}{\partial A_n}$$

که منجر به  $n$  معادله برای محاسبه مقادیر  $A_i$  خواهد شد. در نهایت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جهت محاسبه  $\omega_i$  به دست می‌آید. روش رایلی ریتز تعمیم کاربرد اصل رایلی است و بیانگر این است که فرکانس‌های مربوط به حل معادله ۳ دارای مقادیر ثابت هستند. بدین معنا که اگر اختلاف بین حل دقیق  $S_i$  و حل تقریبی از مرتبه اول باشد، فرکانس‌های محاسبه شده دارای خطا از مرتبه دوم خواهند بود. بنابراین انتظار می‌رود که یک تقریب ضعیف از شکل مدها تقریب خوبی برای فرکانس‌ها ارائه دهد.

### ۲-۳. روش گالرکین

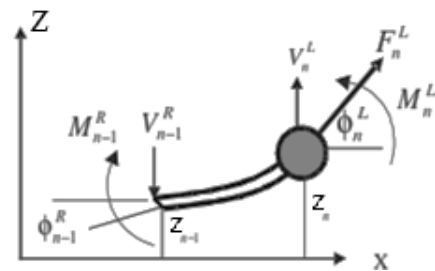
در روش گالرکین از عبارت انتگرال وزنی (باقیمانده وزنی) استفاده می‌شود [۱۰]. این روش مشابه روش رایلی ریتز است با این تفاوت که در این روش از خود معادله مشخصه استفاده می‌شود و توابع تقریبی شکل مود در انتگرال وزنی معادله مشخصه یعنی معادله ۵ قرار داده می‌شود.

$$\int_0^1 \gamma_n \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 S_n}{dx^2} \right) - R^2 \frac{d}{dx} \left( G \frac{dS_n}{dx} \right) - m \omega^2 R^4 S_n \right\} dx \quad (5)$$

در این روش، در بقیه مراحل مشابه روش رایلی ریتز عمل کرده؛ یعنی توابع تقریبی را در معادله به دست آمده قرار داده و در نهایت دستگاه معادلات دیفرانسیل جهت محاسبه  $\omega_i$

## ۱-۴. روش مایکل استاد

در این روش تیر مطابق شکل ۳ به چند المان تبدیل شده و خاصیت سختی هر المان توسط یک المان تیر بدون جرم با سختی معادل و جرم آن نیز توسط یک جرم متمرکز که در انتهای المان تیر قرار دارد در نظر گرفته می‌شود و همچنین در این روش، الزامی به یکسان بودن المان‌ها وجود ندارد. این روش در گذشته برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای پره‌های بالگرد مرسوم بوده است [۱۱].



شکل ۳. دیاگرام آزاد تیر

با اعمال معادلات تعادل برای حالت تیر بدون جرم داریم:

$$Z_n^L - Z_{n-1}^R = L_n \Phi_{n-1}^R + \left( \frac{L^2}{2EI} \right) M_n^L + \left( \frac{L^3}{3EI} \right) V_n^L - \left( \frac{L^3}{3EI} \right) F_n^L \Phi_n^L \quad (10)$$

$$\Phi_{n-1}^R = Z_n^L - \left[ L_n + \left( \frac{L^2}{6EI} \right) F_n^L \right] \Phi_n^L - \left( \frac{L^2}{2EI} \right) M_n^L + \left( \frac{L^3}{6EI} \right) V_n^L \quad (11)$$

$$M_{n-1}^R = - \left[ L_n + \left( \frac{L^3}{6EI} \right) F_n^L \right] F_n^L \Phi_n^L + \left[ 1 + \left( \frac{L^2}{2EI} \right) F_n^L \right] M_n^L + \left( \frac{L^3}{6EI} \right) V_n^L \quad (12)$$

$$V_{n-1}^R = V_n \quad (13)$$

در معادلات فوق  $V$  نیروی برشی،  $M$  گشتاور خمشی،  $\Phi$  شیب تیر،  $L$  طول تیر،  $F$  نیروی گریز از مرکز و  $Z$  جابه‌جایی عرضی تیر است. شکل ماتریسی معادلات ۱۰ تا

۱۳ که ماتریس انتقال تیر بدون جرم نام دارد به صورت معادله ماترسی ۱۴ است. به همین ترتیب برای جرم متمرکز معادلات تعادل نوشته می‌شود که ماتریس انتقال جرم متمرکز نیز به صورت معادله ۱۵ خواهد بود. با ترکیب دو معادله انتقال ۱۴ و ۱۵ ماتریس انتقال برای یک المان تیر دورانی به صورت رابطه ۱۶ به دست می‌آید. با نوشتن ماتریس انتقال برای کل تیر و اعمال شرایط مرزی، می‌توان فرکانس‌های طبیعی تیر را محاسبه نمود. از مزایای این روش می‌توان به اعمال شرایط مرزی در حالات مختلف تیر و داشتن مشخصات هندسی و نیرویی آن نام برد که در جدول ۱ شرایط مرزی حالات مختلف تیر ارائه شده است.

## ۲-۴. روش المان محدود

روش المان محدود یک روش عددی است که برای حل دقیق مسائل پیچیده ارتعاشات به کار می‌رود. در روش مایکل استاد تیر به تعدادی المان تقسیم می‌شد و ضرورتی نداشت که طول همه آنها یکسان باشد اما در روش المان محدود طول المان‌ها باید یکسان باشد و همچنین برخلاف روش مایکل استاد جرم در انتهای المان متمرکز نمی‌شود؛ بلکه به صورت گسترده در طول المان در نظر گرفته می‌شود [۱۲]. با کاهش اندازه المان‌ها و تحلیل آنها، حل دقیق کل سازه به دست می‌آید. در روش المان محدود، تعادل نیروها در گره‌ها و سازگاری تغییر مکان‌ها در بین المان‌ها نیز در نظر گرفته می‌شود. در این روش، المان‌های متفاوتی جهت حل مسائل وجود دارد و با توجه به مسئله موجود، از المان تیر استفاده می‌شود. با توجه به شکل ۴ یک المان یکنواخت تیر تحت نیروی عرضی  $f(x, t)$  قرار دارد. گره‌های این المان دارای تغییر مکان‌های خطی و زاویه‌ای هستند. این تغییر مکان‌های مجهول با  $w_1(t)$ ،  $w_2(t)$ ،  $w_3(t)$  و  $w_4(t)$  نشان داده شده است. در این شکل، نیروهای خطی  $f_1(t)$  و  $f_3(t)$ ، به ترتیب مربوط به تغییر مکان‌های خطی  $w_1(t)$  و  $w_3(t)$  هستند و نیروهای

پیچشی  $f_2(t)$  و  $f_4(t)$  نیز به ترتیب مربوط به تغییر مکان‌های زاویه‌ای  $w_2(t)$  و  $w_4(t)$  هستند.

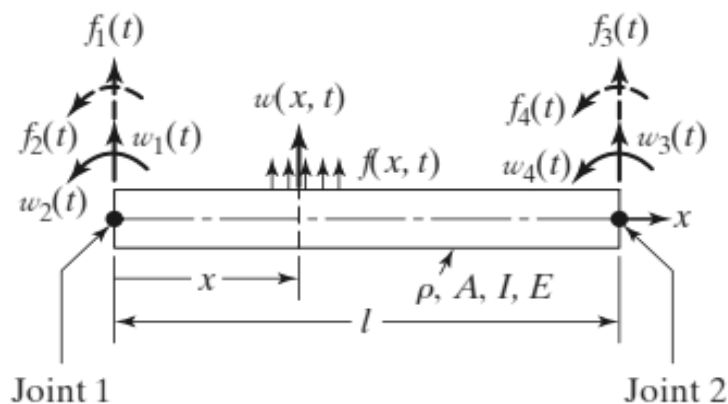
جدول ۱. نوع شرایط مرزی تیر

نوع تیر	V	M	$\Phi$	Z
یکسر گیردار	-	-	0	0
یکسر لولا	-	0	-	0
آزاد	0	0	-	-

$$\begin{bmatrix} Z \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^R = \begin{bmatrix} 1 & -\left(L + \frac{3L^3}{6EI}\right) & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 + \frac{FL^2}{2EI} & -\frac{L}{EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & -\left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right)F & 1 + \frac{FL^2}{2EI} & \left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^L \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} Z \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^R \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} Z \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^R = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\omega^2 mL^3}{6EI}\right) & -\left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right) & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} \\ -\frac{\omega^2 mL^2}{2EI} & 1 + \frac{FL^2}{2EI} & -\frac{L}{EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ \omega^2 m \left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right) & -\left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right)F & 1 + \frac{FL^2}{2EI} & \left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right) \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^R \quad (16)$$



شکل ۴. المان تیر یکنواخت

$$[m] = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

### ۵. تأثیر سرعت دورانی

در اثر سرعت دورانی و ایجاد نیروهای گریز از مرکز در تیر تنش‌های اضافی ایجاد می‌گردد که افزایش سفتی تیر را در پی دارد. این نیرو تنش‌های  $\sigma_x$  در صفحه خنثی ایجاد می‌کند و انرژی کرنشی که از این نیرو در المان ذخیره می‌شود از انرژی کرنشی خمشی در المان، بیشتر می‌باشد [۱۵]. با قرار دادن توابع شکل در معادله ۲۲ ماتریس سفتی نیروی گریز از مرکز به صورت زیر به دست می‌آید.

$$V_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \sigma_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx'$$

$$\equiv \frac{1}{2} \bar{w}(t)^T [k_{cf}] \bar{w}(t) \quad (22)$$

مطابق شکل ۵ نیروی گریز از مرکز به المان بی‌نهایت کوچک  $dx$  وارد می‌شود. این نیرو که به هر مقطع از انتهای سمت چپ المان در فاصله  $X$  اعمال می‌شود به صورت زیر است (مختصات پرایم‌دار مختصات محلی المان می‌باشند):

$$F_x = A \int_{x'}^l \rho \Omega^2 (r + nl + x') dx' +$$

$$+ A \int_{(n+1)l}^{ml} \rho \Omega^2 (r + x) dx \quad (23)$$

که  $n$  تعداد المان‌های موجود قبل از المان تحت بررسی است و  $m$  تعداد کل المان‌های تیر است. ترم اول معادله مربوط به نیروی وارده به المان است و ترم دوم، نیرویی که از سمت راست هر المان وارد می‌شود. با جایگزینی معادله ۱۹ و ۲۳ در معادله ۲۲ و محاسبه انتگرال، ماتریس سفتی نیروی گریز از مرکز به صورت ۲۴ به دست می‌آید.

تغییر مکان‌ها در المان تیر را می‌توان به صورت رابطه ۱۷ نشان داد. در این رابطه  $w(x,t)$  تغییر مکان کلی تیر است.

$$w(x,t) = (1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3})w_1(t)$$

$$+ (\frac{x}{l} - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3})lw_2(t)$$

$$+ (3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3})w_3(t) + (-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3})lw_4(t) \quad (17)$$

این معادله را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^4 N_i(x)w_i(t) \quad (18)$$

که در آن توابع شکل هستند:

$$N_1(x) = 1 - 3(\frac{x}{l})^2 + 2(\frac{x}{l})^3$$

$$N_2(x) = x - 2l(\frac{x}{l})^2 + l(\frac{x}{l})^3$$

$$N_3(x) = 3(\frac{x}{l})^2 - 2(\frac{x}{l})^3$$

$$N_4(x) = -l(\frac{x}{l})^2 + l(\frac{x}{l})^3 \quad (19)$$

با قراردادن این توابع شکل در معادلات انرژی جنبشی و انرژی کرنشی خمشی المان تیر، ماتریس سختی و ماتریس جرم المان به صورت زیر به دست می‌آید:

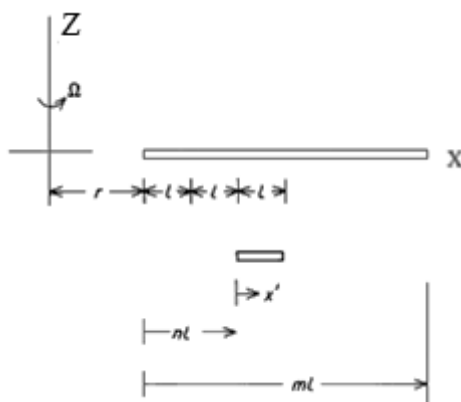
$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l m \left\{ \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right\}^2 dx$$

$$\equiv \frac{1}{2} \dot{\bar{w}}(t)^T [m] \dot{\bar{w}}(t) \quad (20)$$

$$V_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left\{ \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right\}^2 dx$$

$$\equiv \frac{1}{2} \bar{w}(t)^T [k] \bar{w}(t) \quad (21)$$

به طوری که در این روابط  $m$  جرم المان،  $E$  مدول یانگ و  $I$  ممان اینرسی مقطع عرضی تیر است. ماتریس‌های اینرسی و سفتی نیز به صورت روابط پیش رو تعریف و محاسبه می‌شوند.



شکل ۵. المان دورانی تیر و مختصات آن

$$[k_{cf}] = m\Omega^2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{5}c + \frac{3}{5}d - \frac{6}{35} & \frac{c}{10} + \frac{d}{10} - \frac{1}{28} & -\frac{6}{5}c - \frac{3}{5}d + \frac{6}{35} & \frac{c}{10} + \frac{1}{70} \\ \frac{c}{10} + \frac{d}{10} - \frac{1}{28} & \frac{2}{10}c + \frac{d}{30} - \frac{1}{105} & -\frac{c}{10} - \frac{d}{10} + \frac{1}{28} & -\frac{c}{30} - \frac{1}{60}d + \frac{1}{140} \\ -\frac{6}{5}c - \frac{3}{5}d + \frac{6}{35} & -\frac{c}{10} - \frac{d}{10} + \frac{1}{28} & \frac{6}{5}c + \frac{3}{5}d - \frac{6}{35} & -\frac{c}{10} - \frac{1}{70} \\ \frac{c}{10} + \frac{1}{70} & -\frac{c}{30} - \frac{1}{60}d + \frac{1}{140} & -\frac{c}{10} - \frac{1}{70} & \frac{2}{15}c + \frac{d}{10} - \frac{3}{70} \end{bmatrix}$$

$$c = R(m-n) + \frac{1}{2}(m^2 - n^2), \quad d = R+n, \quad R = r/l \quad (24)$$

طبیعی آن استخراج شده است به عنوان ورودی برای روش‌های عددی معرفی شده انتخاب گردید و در ضمن از یک شکل مود استفاده شد که مقدار درصد خطای بسامد دو مود اول و دوم آنها در شکل‌های ۶ و ۷ مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. لازم به ذکر است که روش‌های مودهای فرضی با توجه به داشتن عملیات ریاضی به زبان متلب و روش‌های جرم‌های متمرکز با توجه به نیاز به عملیات تکرار و همچنین جهت افزایش سرعت محاسبات به زبان فترن کدنویسی شدند.

با توجه به نتایج، در مورد روش‌های مودهای فرضی می‌توان این‌گونه بیان کرد که این روش‌ها دارای خطاهای محسوسی در مود اول هستند و از طرفی این خطاها با افزایش سرعت دورانی تیر افزایش می‌یابد؛ یعنی خطاها به‌طور مداوم افزایش می‌یابند به طوری که در سرعت دورانی ۵۰ رادیان بر ثانیه مقدار این خطا، برای روش لاگرانژ به ۵

اکنون مسئله مقدار مشخصه، برای تیر را می‌توان به صورت رابطه ۲۵ نوشت:

$$([K] + [K_{cf}] - \omega^2[M])\{w\} = 0 \quad (25)$$

که در نتیجه با حل آن می‌توان مقدار تقریبی فرکانس‌های طبیعی تیر دوار را محاسبه نمود.

## ۶. نتیجه‌گیری

روش‌های معرفی شده در این مقاله با مرجع [۶] مقایسه شدند. در این مرجع به تحلیل دینامیکی تیرهای دواری که دارای توزیع جرم و سفتی یکنواخت هستند، پرداخته شده و مقدار دقیق فرکانس‌های طبیعی مود اول و دوم یک تیر دوار به صورت دقیق با استفاده از سری‌های فریبوس محاسبه شده است. با توجه به این مرجع، تیر یکسرگرداری با سطح مقطع مستطیلی به مساحت ۱ متر مربع و جرم بر واحد طول ۱ کیلوگرم بر متر که فرکانس‌های



درصد و برای دو روش دیگر به بالای ۱۰ درصد می‌رسد و از طرفی دیگر این روش‌ها به‌طور کامل توانایی همگرایی و پوشش کل مودها را ندارند. همان‌طور که از شکل‌های زیر مشخص است، روش لاگرانژ در مود اول و روش گالرکین و رابلی ریتز در مود دوم نتایج بهتری می‌دهند. در کل روش‌های مودهای فرضی دارای سرعت محاسباتی بسیار بالایی می‌باشند. پس بهتر است از این روش‌ها برای محاسبه بسامدهای طبیعی تیرهای غیر دورانی استفاده کرد و یا از این روش‌ها برای تیرهای دوار در سرعت‌های زیر ۲۰ رادیان بر ثانیه بهره برد، به‌دلیل اینکه سرعت محاسباتی بالایی دارند و جواب دقیقی را در این محدوده می‌دهند.

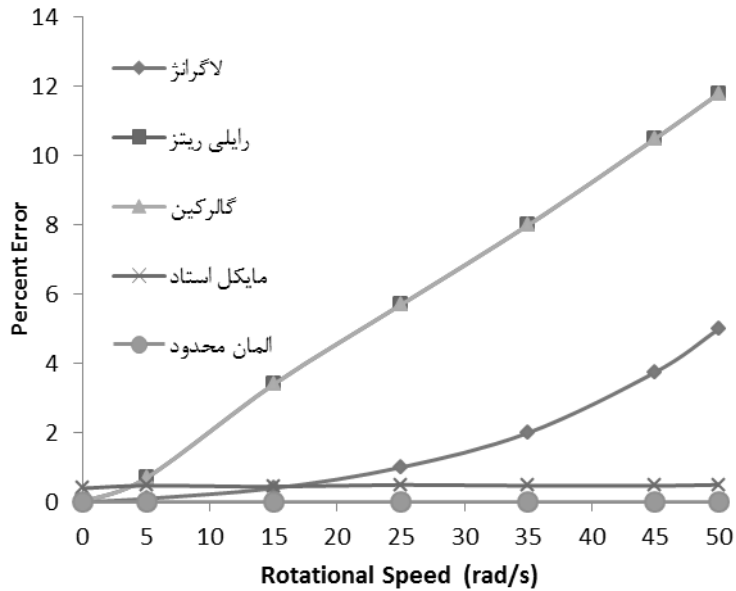
یکی دیگر از ضعف‌های استفاده از روش‌های مودهای فرضی، نیاز به پیش‌بینی اولیه شکل مود مسئله توسط کاربر می‌باشد. به‌دلیل آنکه تابع فرضی انتخابی تأثیر بسزایی در دقت جواب دارد. کاربر باید از قبل پیش‌بینی درستی از شکل مود سازه جهت ورود به مسئله را داشته باشد که این یکی از معایب این روش‌ها می‌باشد.

مطابق شکل‌های ۶ و ۷ روش‌های جرم‌های متمرکز دقت قابل قبولی دارند (به‌خصوص در مود اول که مود اصلی است) و در صورت داشتن خطای قابل ملاحظه، می‌توان با افزایش تعداد المان‌ها، دقت لازم را برای مسئله به‌دست آورد. در مسئله پیش‌رو نتایج روش مایکل استاد با ۳۰۰ المان و روش المان محدود با ۱۵ المان همگرا گردید. این روش‌ها برای همه مودهای سیستم پاسخگو می‌باشند و همه مودها را پوشش می‌دهند.

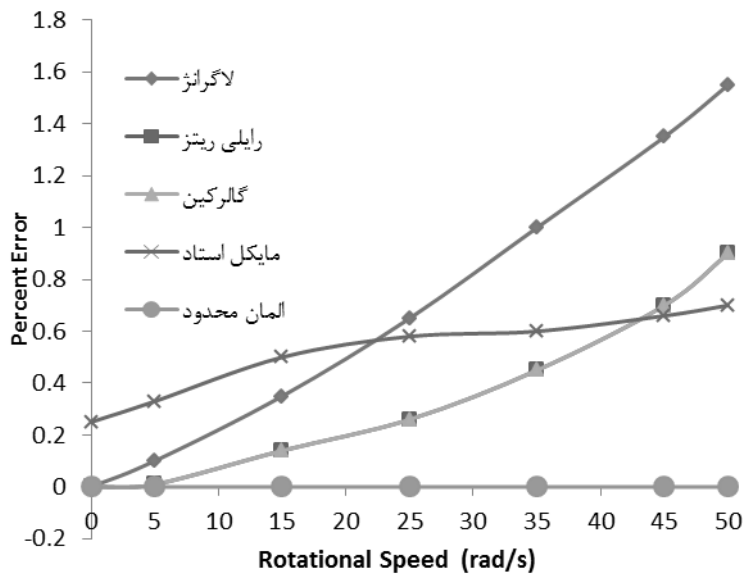
در روش جرم‌های متمرکز، روش المان محدود دارای همگرایی و دقت بسیار بالایی می‌باشد که حتی مطابق شکل‌های زیر سایر روش‌ها و حتی روش مایکل استاد با ۳۰۰ المان به دقت روش المان محدود با ۱۵ المان هم نمی‌رسد و دلیل آن این است که در این روش همان‌طور که بیان شد توزیع جرم، سفتی و نیروی گریز از مرکز در طول هر المان دیده می‌شود و این روش تقریب بسیار دقیقی را حتی با تعداد ۱۵ المان دارا می‌باشد، به‌طوری‌که برای همه سرعت‌های دورانی تیر خطایی کمتر از ۰/۰۰۴ درصد مشاهده می‌شود. پس روش المان محدود بهترین روش می‌باشد.

روش مایکل استاد نیز همانند روش المان محدود دقت قابل قبولی دارد. در این روش برخلاف روش‌های مودهای فرضی خطا با افزایش سرعت دورانی تیر افزایش نمی‌یابد و تقریباً مقدار ثابتی باقی می‌ماند به‌طوری‌که در سرعت ۵۰ رادیان بر ثانیه مود اول این روش خطایی زیر ۰/۵ درصد و مود دوم نیز خطایی زیر ۱ درصد را دارا می‌باشد.

در کل می‌توان بیان کرد که روش‌های جرم‌های متمرکز با توجه به دقتی که دارند برای محاسبه بسامدهای طبیعی تیرهای دورانی و غیردورانی مناسب‌اند، اما در مورد تیرهای غیردورانی از جهت سرعت محاسباتی، روش‌های مودهای فرضی مناسب‌ترند. با این‌وجود روش‌های جرم‌های متمرکز به‌خصوص روش المان محدود بهترین روش در حل مسائل می‌باشند؛ به‌همین دلیل است که پایه و اساس نرم‌افزارهای زیادی همچون آباکوس، انسیس و جز این‌ها مبتنی بر روش المان محدود است.



شکل ۶. بسامد مود اول



شکل ۷. بسامد مود دوم

## ۷. مأخذ

- [1] Houbolt, J. C., G.W.B., "Differential equations of motions for combined flap wise bending and torsion of twisted non-uniform rotor blades", NACA Report 1346, 1958.
- [2] Hunter, W.F., "The Integrating Matrix Method for Determining the Natural Vibration Characteristics of Propeller Blades", NASA TN D-6064, 1970.
- [3] White, W. F., R.E.M., "A Numerical Method for Determining the Natural Vibration Characteristics of Rotating Nonuniform Cantilever Blades", NASA TM X-72,751, 1975.

- [4] Murthy, V.R. "Dynamic characteristics of rotor blades." *Journal of Sound and Vibration*, 1976. Vol.49: p. 483-500.
- [5] Murthy, V.R., "Dynamic characteristics of rotor blades, Integrating matrix method." *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal(AIAA)*, 1977. Vol. 115(4): p. 595-597.
- [6] Wright, A. D., E.S., R. W.Thresher, J. L. C.Wang, "Vibration modes of centrifugally stiffened beams." *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1982. Vol.49(3): p. 197-202.
- [7] Reddy, J.N., *An Introduction to Finite Element Method*, 2<sup>nd</sup> ed. Vol. 1, 2000.
- [8] Naguleswaran, S. "Lateral Vibration of a Centrifugally Tensioned Euler-Bernoulli Beam." *Journal of Sound and Vibration*, 1994. 176: p. 613-624.
- [9] Yoo, H. H., S.H.S. "Vibration analysis of rotating cantilever beams." *Journal of Sound and Vibration*, 1998. 212(5): p. 807-828.
- [10] Mil, M.L., *Helicopter, Calculation And Design (Vibrations and Dynamic Stability)* Vol. 2. 1968, Moscow: Mashinostroyeniye Press.
- [11] Bramwell, A.R.S., *Helicopter Dynamic's*. 2001.
- [12] Rao, S., *Mechanical Vibrations*. Fifth ed, Singapore: Pearson Education, Inc., 2010.
- [13] Thomson, W. T., D.M., *Theory of Vibration with Applications*. Fifth ed, prentice-Hall, Inc, 2002.
- [14] Francis S. Tse, I.M., Rolland T.Hinkle, , *Mechanical Vibrations Theory and Applications*. 1978.
- [15] Hoa, S.V. "Vibration Of Rotating Beam With Tip Mass." *Journal of Sound and Vibration*, 1979. 67(3): p. 369-381.

پی نوشت

- 
1. Rayleigh Ritz
  2. Galerkin
  3. Lagrange
  4. Myklestad
  5. IMM
  6. TMM
  7. Frobenius
  8. Weighted residual
  9. Flapwise bending
  10. Lagwise bending
  11. Assumed Modes
  12. Lumped Parameters
  13. Weak Form