

کنترل پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای پیزوالکتریک مدفون تحت اثر بار گذاری متحرک

سید محمود هاشمی نژاد*
استادیار
پژوهشکده مواد و انرژی
Sm.hasheminejad@gmail.com

هانیه نعیمی کرارودی
دانشجوی کارشناسی ارشد
دانشگاه علم و صنعت ایران
hanyeh.naeimi@gmail.com

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۱۲

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۰۴

چکیده

در این پژوهش بررسی پاسخ دینامیکی و کنترل ارتعاشات یک پوسته استوانه‌ای پیزوالکتریک ساندویچی مدفون در محیط الاستیک تحت اثر بار حلقه‌ای متحرک انجام شده است. ابتدا، معادلات دینامیکی پوسته براساس تئوری پوسته‌ی جدار نازک لاو^۱ به دست آمده و سپس با معادلات حاکم محیط الاستیک اطراف کوپله شده‌اند. سپس، معادلات دیفرانسیل حاصل با استفاده از تبدیل فوریه حل شده و پس از استفاده از انتگرال عددی گوس برای تبدیل فوریه معکوس، پاسخ دینامیکی حالت پایدار سیستم به دست آمده است. برای کاهش ارتعاشات ناشی از بار متحرک، از کنترل‌کننده PID با ثوابت بهینه‌سازی شده استفاده شده است. با تحقیق گسترده انجام شده، نوآوری ارائه شده در این تحقیق کاهش فعال سطح ارتعاشات یک پوسته (لوله، تونل) مدفون هوشمند تحت اثر یک بار گذاری کاربردی متحرک است؛ به نحوی که این نوآوری در هم‌زمانی مدفون بودن در محیط الاستیک نامحدود و پیزوالکتریک بودن پوسته است. نتایج نشان می‌دهد که کنترل‌کننده پیاده‌سازی شده قادر به کاهش دامنه‌ی جابه‌جایی و تنش در سیستم است. همچنین، عملکرد لایه‌ی فعال پیزوالکتریک بر مبنای کنترلر مناسب، حساسیت سیستم به تغییرات پارامتری را کاهش می‌دهد.

واژگان کلیدی: کنترل فعال پاسخ دینامیکی، پوسته استوانه‌ای پیزوالکتریک مدفون، بار حلقه‌ای متحرک، کنترل‌کننده

PID

۱. مقدمه

پوسته در حالت کلی نام سازه‌ای است که به فضای محصور بین دو رویه اطلاق می‌شود که در آن بُعد ضخامت نسبت به سایر ابعاد بسیار کوچکتر در نظر گرفته می‌شود [۱] در حقیقت پوسته را می‌توان در قالب یک رویه میانی که از دو سمت امتداد یافته است در نظر گرفت [۲]. به موجب ویژگی‌های خاص مانند تحمل بار بالا نسبت به ابعاد، پوسته‌ها کاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف مهندسی مکانیک، هوافضا، ساختمان، خودرو و غیره دارند. از سوی دیگر در علم مکانیک پوسته‌ی مدفون اصطلاحاً به آن دسته از پوسته‌هایی اطلاق می‌شود که درون محیطی خارجی به دلایل مختلفی تعبیه شده و به آن‌ها اضافه شده یا چسبیده‌اند. انواع مختلف تونل‌ها و سازه‌های مدفون در خاک، پوسته‌های به کار رفته در سیستم‌های خنک‌کاری و پوسته‌های کامپوزیتی را می‌توان از این دسته به حساب آورد. دسته‌ی مهم دیگری از پوسته‌ها شامل پوسته‌های پیزوالکتریک هستند که در زمره ساختارهای هوشمند قرار می‌گیرند. ساختار داخلی مواد پیزوالکتریک این امکان را فراهم می‌سازد تا تنش مکانیکی تبدیل به میدان الکتریکی شود و عکس آن اتفاق بیفتد. که نحوه‌ی اتفاق افتادن این روند باعث به وجود آمدن حسگر و عملگر پیزوالکتریک می‌شود. یک نکته مهم در مدل‌سازی پوسته‌ها نحوه بارگذاری و نوع بار وارد بر آن‌هاست. یکی از انواع این بارگذاری‌ها، با عنوان بار متحرک، در مطالعه رفتار دینامیکی پوسته‌ها بسیار مورد توجه قرار گرفته است. نیروهای انفجاری و شوک درون لوله‌ها، وسایل نقلیه روی پل‌ها و ریل‌ها، جرنقیل‌های سقفی متحرک و غیره از انواع بارهای متحرک محسوب می‌شوند. بارهای متحرک به علت خاصیت پویا و متغیر با زمان خود و همچنین اثرات ارتعاشی و رزوناسی که به سازه‌ها وارد می‌سازند اهمیت

خاصی دارند. مطالعات لاو، که مبنای اصلی این پژوهش نیز است، را می‌توان به عنوان یکی از اولین و پایه‌ای‌ترین پژوهش‌ها در مورد پوسته‌ها دانست. لاو [۳] در مقاله‌ای که در سال ۱۸۸۸ میلادی منتشر کرده است تئوری جامعی در مورد پوسته‌ها ارائه داد و معادلات ارتعاشی پوسته‌های جدار نازک را بر مبنای فرضیات لاو-کیرشهف^۲ استخراج نمود. در زمینه متحرک می‌توان از پژوهش پایتون [۴] نام برد که در آن تنش‌های وارده بر پوسته‌ی استوانه‌ای الاستیک با طول بینهایت تحت بار متحرک مور مطالعه قرار گرفته‌است. روزنه وباز [۵] پاسخ دینامیکی حالت پایدار پوسته‌ای استوانه‌ای تحت بار متحرک نقطه‌ای را با استفاده از تئوری دائل-مشری^۳ و تحلیل المان محدود بررسی کردند. ژانگ و همکاران [۶] در سال ۲۰۱۴ به بررسی سرعت بحرانی بار متحرک اعمال شده بر پوسته‌ای استوانه‌ای با طول بی‌نهایت با استفاده از تئوری لاو پرداختند. سویونگ و سئوک [۷] پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بارگذاری دوگانه‌ی اعمال شده از سطح داخلی راه، با استفاده از قانون هوک و روش جداسازی متغیر و روش فروبینوس^۴، تحلیل نمودند و با استفاده از شرایط تعادل دوگانه معادله گسسته‌شده برای هر حالت را به دست آوردند. با استفاده از جواب‌های معادلات گسسته‌شده سرعت بحرانی برای نیروی متحرک دوگانه بررسی شده است. آرازم و ایپاکچی [۸] به بررسی پاسخ ارتعاشی پوسته‌ی استوانه‌ای مدرج تابعی با طول مشخص تحت اثر بار فشاری داخلی متحرک پرداخته و نتایج حل نیمه تحلیلی را با روش المان محدود مقایسه کرده‌اند و نشان داده‌اند که پارامتر نسبت طول به شعاع مقطع و فرکانس طبیعی و همچنین سرعت بحرانی و پارامتر نسبت شعاع بر ضخامت پوسته نسبت عکس با یکدیگر دارند. ایپاکچی و همکاران [۹] مقاله‌ای به منظور بررسی پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای ویسکوالاستیک تحت اثر بار فشاری

منتشر کرده که رفتار پوسته نسبت به نیروی برشی ویسکولاستیک فرض شده است. سرعت بحرانی و فرکانس طبیعی سیستم در این پژوهش بررسی شده است. هیو و همکاران [۱۰] ارتعاشات تصادفی یک پوسته‌ی ارتوتروپیک جدار نازک در شرایط پایدار و ناپایدار را با روش تحلیلی گسسته^۵ بررسی کردند. سعیدی و همکاران [۱۱] مقاله‌ای در مورد بررسی رفتار ترموالاستوپلاستیک پوسته‌ی استوانه‌ای مدوج تابعی جدار ضخیم منتشر کردند. در این پژوهش با استفاده از روش تقریب‌های متوالی^۶ پاسخ پوسته که تحت فشار داخلی و گرادیان‌های دمایی می‌باشد، بررسی شده است. در پژوهش گائو [۱۲] سرعت بحرانی پوسته‌ی دو لایه اتصال کامل^۷ تحت بارگذاری فشاری متحرک با در نظر گرفتن اینرسی چرخشی و ناهمگنی بررسی شد. چونان [۱۳] در مطالعه‌ی خود به بررسی اثر بار متحرک بر ارتعاشات پوسته‌ی جدار نازک مدفون در محیط الاستیک پرداخت. برای مدل‌سازی محیط الاستیک نیز از تئوری الاستیسیته استفاده کرد. دوویدی و سینق [۱۴] پژوهشی را که حول لوله‌های حاوی سیال مدفون نامتقارن تحت اثر بارگذاری محوری متحرک انجام شده، ارائه داده‌اند. هاشمی نژاد و کمیلی [۱۵] با استفاده از معادله‌ی کلاسیک ناویر^۸ و تئوری پوسته‌ی جدار ضخیم، پوسته‌ای با طول بی‌نهایت را که در بستر پروالاستیک مدفون بوده و تحت بارگذاری حلقه‌ای متحرک است، تحلیل کردند. پاسخ سیستم با استفاده از تبدیل فوریه و حل عددی به دست آمده است. محیط پروالاستیک نیز با استفاده از تئوری بایوت^۹ مدل‌سازی شد. یوان و همکاران [۱۶] در تحقیقی پاسخ دینامیکی یک تونل مدفون در یک لایه خاک متخلخل دو بعدی در معرض بار نقطه متحرک را مورد بررسی قرار دادند. تونل به عنوان یک تیر طویل اویلر-برنولی^{۱۰} مدل‌سازی شد. محیط پروالاستیک اشباع نیز با استفاده از تئوری

بایوت مدل می‌شود. الزبیدی [۱۷] پژوهشی مبتنی بر تحلیل المان محدود پیشرفته و یادگیری ماشین حول بهبود روش‌های طراحی لوله‌های مدفون صلب (بتنی) و ارائه داده است. اکبرف و مهدیف در مجموعه‌ای از مقالات [۱۸، ۱۹] در سال‌های ۲۰۱۸ و ۲۰۱۹ به بررسی پاسخ دینامیکی پوسته‌ی استوانه‌ای با شرایط و روش‌های مختلف حل معادلات پرداخته‌اند. تانگ و همکاران [۲۰] تأثیر بار حلقه‌ای متحرک به پوسته‌ی استوانه‌ای مدفون در بستر پروالاستیک با استفاده از تئوری بایوت غیرمحلّی را بررسی کرده‌اند. اثر پارامتر غیرمحلّی بر فشار منافذ بستر پروالاستیک آنالیز شده که نشان می‌دهد پارامتر غیرمحلّی، بیشینه فشار منفذی محیط متخلخل را افزایش می‌دهد. در مقاله‌ای که لیو و همکارانش [۲۱] منتشر کردند تأثیر پارامترهای بستر وینکلر-پاسترناک^{۱۱} بر روی رزونانس داخلی غیرخطی پوسته‌های جدار نازک متخلخل مورد ارزیابی قرار داده شده‌اند. علی بیگلو و طالبی توتی [۲۲] به بررسی پاسخ گذرای سه‌بعدی و ترموالاستیسیته‌ی کوپل‌شده‌ی پوسته‌ی مدوج تابعی جاسازی‌شده در لایه‌های پیزوالکتریک با تکیه‌گاه ساده با استفاده از تئوری لرد-شولمان^{۱۲} پرداخته و نشان دادند که ناهمگنی ماده به طور قابل‌توجهی بر رفتار ترموالاستیک جفت‌شده سیستم تأثیر می‌گذارد. گیرنیس و همکاران [۲۳] به بررسی تأثیر بار متحرک بر پوسته‌ی دو لایه‌ی مدفون در محیط الاستیک پرداختند. در این مطالعه بر تأثیر لایه‌ی بیرونی پوسته بر سرعت بحرانی تمرکز شده است. نتایج این مطالعه نشان داد ضخامت و پارامترهای لایه‌ها بر سرعت بحرانی و میزان تنش و کرنش وارده تأثیرگذار است. پژوهش سینق و همکاران [۲۴] در سال ۱۹۸۸ مطالعه‌ای مشابه پژوهش چونان [۱۳] را برای پوسته جدار نازک پیزوالکتریک، تحت بارگذاری محوری و جانبی، انجام داد. ساویز و همکاران [۲۵] به

بررسی پاسخ سه بعدی الاستیسیته پوسته‌ی استوانه‌ای پیزوالکتریک با بارگذاری دینامیک پرداختند. در این تحلیل پوسته تحت انواع بارگذاری قرار گرفته و معادلات سیستم با استفاده از بسط مثلثاتی ساده شده است. از مطالعات کنترلی مرتبط با پوسته‌های پیزوالکتریک، می‌توان از مقاله‌ی ژانگ و همکاران [۲۶]، که کنترل ارتعاش پوسته‌ی استوانه‌ای پیزوالکتریک با تکیه‌گاه ساده را تحلیل کردند، نام برد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی نشان می‌دهد که با ولتاژ کنترلی یکسان، عملگر پیزوالکتریک با تعداد لایه‌های مختلف می‌تواند عملکرد کنترلی بهتری نسبت به عملگر پیزوالکتریک تک لایه‌ای مرسوم داشته باشد و ارتعاش شعاعی پوسته به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد. شنگ و وانگ [۲۷] با استناد بر معادلات جابه‌جایی تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و به کمک اصل همپلتون و معادله‌ی ماکسول پاسخ دینامیکی پوسته‌ی مدرج تابعی پیزوالکتریک^{۱۳}، با پارامترهای وابسته به دما، تحت بارگذاری متحرک را بررسی کردند. ژانگ و همکاران [۲۸] نیز به تحقیق در مورد کنترل ارتعاشات سازه‌ی هوشمند پیزوالکتریک با استفاده از کنترل‌کننده PID^{۱۴} پرداختند. این تحقیق برای سازه‌های جدار نازک انجام شده است. عارفی و همکاران [۲۹] در سال ۲۰۱۶ پژوهشی در خصوص بررسی پاسخ ارتعاش آزاد پوسته‌ی استوانه‌ای مدرج تابعی ترکیب شده با لایه‌ی پیزوالکتریک انجام دادند. در این پژوهش از روش تنش برشی مرتبه‌ی اول^{۱۵} و اصل همپلتون^{۱۶} و معادله‌ی ناویر معادلات سیستم استخراج شده است. در انتها نیز نتایج بدست آمده از حل عددی ارائه شده است. ژو و همکاران [۳۰] پاسخ دینامیکی پوسته‌ی استوانه‌ای پیزوالکتریک را تحت اعمال بار ضربه‌ای با استفاده از روش ماتریس موج-انعکاس^{۱۷} به دست آوردند. لیو و همکاران [۳۱] تغییر شکل پوسته‌ی استوانه‌ای

کامپوزیتی پیزوالکتریک را تحت فشار و بار الکتریکی بررسی می‌کنند. تحلیل مساله به صورت سه بعدی و با استفاده از روش اجزا محدود صورت گرفته است. لی [۳۲] مقاله‌ای حول موضوع ارتعاش فعال پره‌ی توربین بادی دارای سنسورهای پیزوالکتریک منتشر کرده است. مدل یک تیغه مرکب لایه‌ای است و لایه‌های پیزوالکتریک جاسازی شده در سطوح بالا و پایین به عنوان سنسور و محرک عمل می‌کنند. برای کنترل ارتعاش از الگوریتم کنترل بازخورد سرعت منفی با بهره ثابت استفاده شده است. کنترل ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای با لایه پیزوالکتریک ناپیوسته توسط لی و همکاران [۳۳] مورد بررسی قرار گرفته است.

در این مبحث علاوه بر مقالات ذکر شده می‌توان به مراجعی اشاره کرد که شامل مطالعات کاربردی تری هستند. جنبه‌های مختلف مسئله مانند پوسته‌ی استوانه‌ای، پوسته‌ی پیزوالکتریک، بار متحرک و مدفون بودن و ترکیب آن‌ها موضوع این مقالات هستند. از جمله نمونه‌های کاربردی می‌توان به نانو لوله‌ها، تونل‌های مدفون، خطوط لوله‌ی انتقال سیالات، لوله‌های کامپوزیتی و... اشاره نمود. لازم به ذکر است که بار متحرک نیز مدل شده از نیروهای سیالات درون لوله و یا حرکت یک جسم درون تونل می‌تواند باشد. در بررسی کاربردی تر می‌توان به مقاله‌ی بن و آکاریا [۳۴] و همکاران که در مورد دینامیک مجراهای آب مدفون انجام شده‌اند، اشاره کرد. در این مقاله نشان داده شده است که بارهای ترافیکی متحرک، جابه‌جایی بیشتری را در مجراهای مدفون در مقایسه با بارهای ترافیکی ساکن ایجاد می‌کنند. فارست و هانت [۳۵] در مقاله‌ای تحلیل سه بعدی ارتعاش ایجاد شده در زمین و تونل از طرف قطار زیرزمینی، که مدل شده‌ی همان بار متحرک وارد شده بر پوسته‌ی استوانه‌ای با طول بی‌نهایت است،

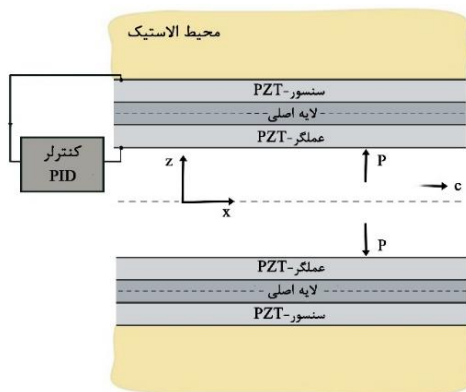
را ارائه دادند. در این مقاله بررسی با تئوری پوسته‌های جدار نازک و اعمال تبدیل فوریه بر هر دو پارامتر مکان و زمان و در نظر گرفتن زمین به عنوان بستر الاستیک انجام شده است. مقاله‌ی رحیمی و همکاران [۳۶] نیز به تحلیل ارتعاش پوسته‌ی پیزوالکتریک مدرج تابعی چرخان که تحت اثر بارهای مکانیکی، الکتریکی و دمایی درونی است، می‌پردازد. همچنین می‌توان از مقاله‌ی محمدی و همکاران [۳۷] نام برد که در مورد نانو لوله‌های مدرج تابعی مدفون در بستر پسترناک است.

در مطالعه‌ی حاضر هدف آن است که در ابتدا رفتار دینامیکی پوسته‌ی پیزوالکتریک استوانه‌ای مدفون با طول بی‌نهایت که تحت اثر بارگذاری متحرک است مدل-سازی شود و در گام بعد کنترل‌کننده‌ی بهینه‌ای به منظور کنترل آن طراحی گردد. این مدل‌سازی را می‌توان نمونه‌ای از یک لوله‌ی پیزوالکتریک که در محیطی با جنس دارای ویژگی‌های الاستیک مدفون می‌باشد، دانست. قابل ذکر است که نوآوری این پژوهش در بررسی ارتعاش پوسته‌ی طویل پیزوالکتریک مدفون در محیط نامحدود الاستیک است؛ به طوری که احاطه شدن پوسته‌ی پیزوالکتریک در مقالات دیگر عمدتاً به معنای محاط شدن لایه‌های پوسته می‌باشد اما در این مقاله مدفون بودن پوسته‌ی پیزوالکتریک، از طریق ادغام روش دو مقاله‌ی مرجع [۱۲ و ۳۶]، در محیط نامحدود بررسی شده است؛ استفاده از کنترل‌کننده پی‌آی دی به دلایل سادگی، تأثیر بالا و سهولت بکارگیری در کاربردهای صنعتی می‌باشد. همچنین، همانگونه که در متون چکیده و آخرین پاراگراف مقدمه نیز تأکید شده است نوآوری اصلی مقاله در کاهش فعال سطح ارتعاشات یک پوسته (لوله، تونل) مدفون هوشمند تحت اثر یک بارگذاری کاربردی متحرک می‌باشد. کنترل‌کننده‌های PID معمولی به دلیل ساختار خطی

ساده، مقاومت قابل قبول و عملکرد بالا نسبت به هزینه، در طیف وسیعی از شرایط عملیاتی، یکی از پرکاربردترین و کاربردی‌ترین کنترل‌کننده‌ها در محیط‌های صنعتی هستند [۳۸-۴۱]. همچنین این تحقیق با کنترل ارتعاش پوسته ادامه پیدا می‌کند. قسمت‌های مقاله به این شرح هستند: در قسمت بعد رفتار دینامیکی پوسته مدفون مدل‌سازی شده و فرضیات مدل‌سازی مطرح می‌گردند. در قسمت سوم نتایج بهینه‌سازی و شبیه‌سازی ارائه شده و در مورد جزئیات آن‌ها بحث می‌شود. در نهایت نیز یک جمع بندی از موارد مطرح شده و نتایج مقاله صورت خواهد گرفت.

۲. مدل‌سازی

در این مدل‌سازی از تئوری کلاسیک پوسته‌ی لاو استفاده می‌شود؛ لذا همانطور که در پیوست الف شرح داده شده روابط جابه‌جایی رویه‌ی میانی در سه راستای و روابط تنش و کرنش به دست می‌آید. معادلات خطی تنش-کرنش به فرم ماتریسی و روابط الکتریکی بر اساس مراجع [۴۲, ۴۳] نوشته می‌شوند که در پیوست الف این روند تشریح شده است. در ادامه‌ی روند دستیابی به معادلات سیستم از اصل همپتون برای به دست آوردن معادلات دیفرانسیل سیستم استفاده می‌کنیم.



می‌شود که در شکل زیر نشان داده شده است. این تماس موجب ایجاد تنش در سطح تماس می‌شود. این تنش‌ها خود ایجاد انرژی می‌کنند که کار مجازی آن‌ها در قالب معادلات پیش رو قابل محاسبه است:

$$\delta W_e^{\sigma_r} = 2\pi(r_c + h_2 + h_p)\sigma_r \delta z.$$

$$\delta W_e^{\tau} = 2\pi(r_c + h_2 + h_p)\tau \delta x \quad (3)$$

کار مجازی نهایی شامل مجموعه‌ی این موارد است که در ادامه ذکر شده:

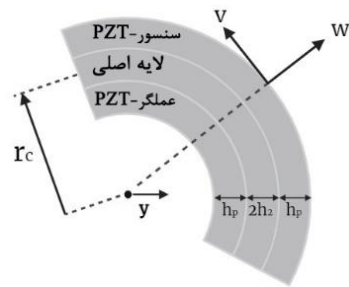
$$\delta W_e = \delta W_e^P + \delta W_e^{\sigma_r} + \delta W_e^{\tau} = 2\pi(r_c - h_2 - h_p)P \delta z. \quad (4)$$

با توجه به پیوست الف پس از استفاده از فرضیات لاو و نوشتن مؤلفه‌های انرژی و سپس استفاده از معادله‌ی همیلتون، معادلات مربوط به متغیرهای جابه‌جایی عمومی مسئله‌ی حاضر یعنی $\varphi_s, \varphi_a, W, v, x$ به صورت معادله‌ی (۵) به دست می‌آیند.

$$\left(a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{a_{66}}{r_c^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u + \frac{1}{r_c} (a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{a_{12}}{r_c} \frac{\partial w}{\partial x} + \left(1 + \frac{h_p + h_2}{r_c} \right) \tau = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{r_c} (a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \left(\frac{a_{22}}{r_c^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + a_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{d_{66}}{r_c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{d_{22}}{r_c^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v + \left(\frac{a_{22}}{r_c^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{d_{66}}{r_c^2} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{d_{12}}{r_c^2} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{d_{22}}{r_c^4} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right) w + \frac{E_{32}^a}{r_c^2} \frac{\partial \varphi_a}{\partial \theta} + \frac{E_{32}^s}{r_c^2} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta} = I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

(الف)



(ب)

شکل ۱. سیستم مورد بررسی: (الف) مختصات و هندسه‌ی پوسته؛ (ب) برشی از مقطع پوسته

۱-۲. دستگاه معادلات

اصل همیلتون برای اجسام تغییرشکل‌پذیر به صورت زیر است:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta \Pi_k - (\delta W_e + \delta \Pi_s)] dt = 0 \quad (1)$$

با علم بر اینکه در این معادله Π_k, Π_s, W_e به ترتیب کار مجازی نیروهای خارجی، انرژی کرنشی و انرژی جنبشی سیستم هستند. عبارات دقیق انرژی‌ها نیز در پیوست الف در روند بدست آوردن دستگاه معادلات دیفرانسیل سیستم آورده شده است. در این مسئله با دو دسته نیرو مواجه هستیم. نیروی اول همان نیرو ناشی از بار فشاری حلقه‌ای متحرک است. این نیرو F_p به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$F_p = 2\pi(r_c - h_2 - h_p)P_0 \delta_d(x - c_0 t) \quad (2)$$

$$\delta W_e^P = F_p \delta x = 2\pi(r_c - h_2 - h_p)P \delta z$$

قابل ذکر است که در معادله‌ی (۲)، P_0 اندازه‌ی بار فشاری و δ_d تابع دلتای دیراک و مطابق با شکل (۱)، r_c شعاع انحنا، رویه‌ی میانی پوسته الاستیک و همینطور $P = P_0 \delta_d(x - c_0 t)$ می‌باشد. از طرفی برهم کنشی بین سطح پوسته و محیط الاستیک دور آن ایجاد

حاضر در راستای θ هیچ عاملی برای ایجاد حرکت وجود ندارد و بار وارد شده نیز حلقه‌ای متقارن است، تمامی مشتقات نسبت به این راستا و مؤلفه‌ی جابه‌جایی v حذف می‌شوند.

۲-۲. اعمال شرایط مرزی

در این مرحله نکته‌ای که باقی می‌ماند محاسبه‌ی تنش‌های سطحی در ناحیه‌ی تماس پوسته و محیط الاستیک است. برای این کار باید رفتار محیط الاستیک مدل‌سازی شود. به این منظور از نظریه‌ی خطی الاستیسته استفاده شده است. معادلات مذکور برگرفته از مرجع [۱۳] است. همچنین با به کارگیری دو تابع پتانسیل $\psi(x, z, t)$ و $\chi(x, z, t)$ جابه‌جایی محیط الاستیک به این صورت قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} u_2(x, z, t) &= \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ w_2(x, z, t) &= \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\chi}{z} \end{aligned} \quad (7)$$

برای تخمین فرم کلی توابع پتانسیل، این توابع باید معادلات زیر را ارضا کنند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{\chi}{z^2} &= \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (8)$$

در جایی که:

$$c_s^2 = \frac{G_2}{\rho_2} \quad c_1^2 = \frac{2G_2(1-\nu_2)}{\rho_2(1-2\nu_2)} \quad (9)$$

در معادلات فوق G_2 مدول برشی است و زیروند ۲ به محیط الاستیک دور پوسته اشاره دارد. همچنین c_1 و c_s بیانگر سرعت امواج اتساعی و اعوجاجی در محیط الاستیک هستند. از سوی دیگر عناصر تنش براساس روابط الاستیسیته به صورتی که در پیوست الف آورده شده‌اند. در نظر گرفته می‌شوند. سپس فرض می‌شود که پوسته و محیط الاستیک توسط پیوندی نازک، الاستیک و بدون جرم با یکدیگر دارای اتصال کامل در راستای شعاعی

$$\begin{aligned} &-\frac{a_{12}}{r_c} \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{a_{22}}{r_c^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{d_{66}}{r_c^2} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{d_{12}}{r_c^2} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{d_{22}}{r_c^4} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right) v - \left(d_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2 \frac{d_{12}}{r_c^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{d_{66}}{r_c^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{d_{22}}{r_c^2} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + \frac{a_{22}}{r_c^2} \right) w \\ &+ \left(E_{31}^a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{E_{31}^a}{r_c^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi_a + \left(E_{31}^s \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{E_{31}^s}{r_c^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi_s \\ &+ q_a + \left(1 + \frac{h_p + h_2}{r_c} \right) \sigma_r + \left(1 - \frac{h_p + h_2}{r_c} \right) P = I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ &\quad \left(X_{11}^a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{X_{32}^a}{r_c^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - X_{33}^a \right) \varphi_a + \frac{E_{32}^a}{r_c^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ &\quad - \left(E_{31}^a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{E_{32}^a}{r_c^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w = 0 \\ &\quad \left(X_{11}^s \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{X_{32}^s}{r_c^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - X_{33}^s \right) \varphi_s + \frac{E_{32}^s}{r_c^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ &\quad - \left(E_{31}^s \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{E_{32}^s}{r_c^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

لازم به ذکر است مؤلفه‌های دیگر استفاده شده در معادلات در انتهای پیوست الف تشریح شده‌اند. همچنین قابل ذکر است که در معادلات حاضر q_a قسمت الکتریکی ولتاژ اعمالی در طول لایه‌ی عملگر است که برابر است با [۴۲]:

$$q_a = \frac{2}{h_p} \int_{-h_p-h_2}^{-h_2} \left(z + \frac{2h_2 + h_p}{2} \right) V_a dz \quad (6)$$

به طوری که V_a ولتاژ اعمالی عملگر پیزوالکتریک که از طرف کنترل‌کننده به آن اعمال می‌شود، می‌باشد و q_a با انتگرال‌گیری از این پارامتر در طول لایه‌ی عملگر و با در نظر گرفتن ضخامت این لایه محاسبه می‌شود. ضرایب به کار رفته در معادلات فوق نیز در پیوست الف ذکر شده است. این معادلات دیفرانسیل رفتار سیستم را به شکل کلی بیان می‌کنند. از آنجایی که در مسأله‌ی

تبدیل معکوس فوریه برای حل معادلات و دستیابی به پاسخ سیستم استفاده نمود. با استفاده از این تبدیل معادلات دیفرانسیل سیستم به معادلات جبری تبدیل شده و فرآیند حل بسیار ساده‌تر خواهد بود. [۴۴] در سیستم حاضر از مختصات متحرک برای این تبدیل استفاده می‌کنیم. در این حالت برای تبدیل فوریه و تبدیل معکوس فوریه (از حوزه فرکانس به حوزه زمان و مکان) داریم:

$$\begin{aligned} \bar{f}(z, \xi, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z, x, t) e^{-i(\xi z + \omega t)} dt dz \\ f(z, x, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(z, \xi, \omega) e^{i(\xi z + \omega t)} d\xi d\omega \end{aligned} \quad (11)$$

با فرض بر آن که در عبارات بالا ω و ξ متغیرهای مستقل در حوزه فرکانس و به ترتیب متغیرهای تبدیل نظیر زمان t و مکان x هستند. شایان ذکر است که به دلیل حضور ترم $\delta_d(x - c_0 t)$ در معادلات حوزه مکان-زمان عبارت نظیر $\delta_d(\omega + c_0 \xi)$ در حوزه فرکانس ایجاد می‌شود. در این حالت رابطه‌ی $\omega = -c_0 \xi$ برقرار خواهد بود و می‌توان معادلات را ساده‌سازی کرد [۴۵]. در این صورت برای بررسی پاسخ ماندگار می‌توانیم از تبدیل معکوس فوریه زیر استفاده کنیم [۱۵، ۴۶]:

$$f(z, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_2(z, \xi, -c_0 \xi) e^{i\xi z} d\xi \quad (12)$$

لازم به ذکر است که در معادله‌ی بالا تساوی $\bar{f}(z, \xi, \omega) = \delta_d(\omega + c_0 \xi) \cdot \bar{f}_2(z, \xi, \omega)$ برقرار می‌باشد. حال با استفاده از معادلات تبدیل فوریه، معادلات دیفرانسیل سیستم را به حوزه فرکانسی نگاشت می‌کنیم. معادلات مربوط به فضای فرکانسی پس از تبدیل نیز در پیوست الف آورده شده‌اند. لازم به ذکر است برای حل عددی تبدیل معکوس فوریه از روش انتگرال گوسی استفاده می‌شود.

هستند (که این شرایط با تغییر γ_n متفاوت می‌شود و همچنین با توجه به γ_s در نظر گرفته شده اتصال محوری پوسته و محیط از اتصال محوری دارای لغزش در $\gamma_s = 0$ تا اتصال کامل در $\gamma_s = \infty$ متغیر خواهد بود). این فرض منتج به اعمال شرط مرزی پوسته یا همان برابری تنش‌های سطحی پوسته و تنش‌های محیط الاستیک در سطح تماس با پوسته خواهد شد. با برابر قرار دادن عبارات تنش پوسته و محیط الاستیک معادلات زیر بدست خواهند آمد:

$$\begin{aligned} \sigma_2(x, z, t) \Big|_{z=h_2+h_p} &= \sigma(x, t) \\ &= \left(k_n + \eta_n \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(w_2 \Big|_{z=h_2+h_p} - w \right) \\ \tau_2(x, z, t) \Big|_{z=h_2+h_p} &= \tau(x, t) \\ &= \left(k_s + \eta_s \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ u_2 \Big|_{z=h_2+h_p} - \left[u + (h_2 + h_p) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

لازم به ذکر است که طبق این مدل‌سازی از لایه‌ی اتصال پوسته و محیط الاستیک، پارامترهای k_n و k_s نشان‌دهنده‌ی سختی پیوند در راستاهای برشی و نرمال هستند که بین صفر تا بی‌نهایت در تغییرند. (همچنین در این پژوهش از اثر میرایی این اتصال که با پارامترهای η_n و η_s طبق مرجع [۱۳] مدل‌سازی شده‌اند، صرف نظر شده و مقدار صفر را به خود اختصاص می‌دهند).

۲-۳. روش حل

با توجه به این که طول سیستم بی‌نهایت در نظر گرفته شده است، زمانی که سیستم به حالت ماندگار خود می‌رسد، تغییر شکل پوسته نسبت به دستگاه مختصاتی که هر لحظه بار متحرک را تعقیب می‌نماید ثابت خواهد بود. در این شرایط می‌توان از تبدیل فوریه و

$$\{D_z\}_s = e_{31} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + e_{32} \left[\frac{1}{r_c} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) - \frac{z}{r_c^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] - \mu_{33} \left(\frac{\pi}{h_p} \right) \sin \left[\frac{\pi}{h_p} \left(z - \frac{2h_2 + h_p}{2} \right) \right] \varphi_s \quad (14)$$

با توجه به عبارت بالا خواهیم یافت که با اعمال تبدیل فوریه بر آن، مجموعی از ضرایب پارامترهای مجهول سیستم است پس عبارت بالا را به معادلات قبل اضافه کرده و پس از اعمال تبدیل‌ها و در نظر گرفتن ولتاژهای اعمالی و ساده‌سازی یک معادله‌ی جبری جدید خواهیم داشت. در این پژوهش از کنترل‌کننده PID استفاده شده است. از آنجایی که می‌دانیم تابع کنترلی اعمالی برای این نوع کنترل‌کننده به صورت $K_p + \int K_I dt + K_D dt$ تعریف می‌شود. برای استفاده‌ی آن در فضای معادلات خود با گرفتن تبدیل فوریه نسبت به زمان عبارت مربوط به آن به صورت $K_p + K_I / i\omega + K_D i\omega$ در می‌آید. لازم به ذکر است که i ضریب واحد موهومی می‌باشد. لذا عبارت بدست آمده جای ضریب K_0 در معادله‌ی (۱۳) نشسته و ضرایب کنترلی K_p, K_I, K_D در معادله جای خواهند گرفت.

$$V_a(s) = (K_p + K_I / i\omega + K_D i\omega) V_s(s) \quad (15)$$

به طوری که ω پارامتر فرکانسی تبدیل یافته‌ی زمان است و با توجه به فرض محاسباتی پروژه خود ضریبی از پارامتر فرکانسی s است، صحت عبارت بالا را به دنبال خواهد داشت. با ارجاع به منبع [۱۳] از آنجایی که بین ω و ξ رابطه‌ی $\omega = -c_0 \xi$ برقرار است پس با توجه به رابطه‌ی ξ و s پس $\omega = -c_0 s / 2h_2$ خواهد بود.

به منظور بهینه‌سازی مقادیر ضرایب کنترل‌کننده از الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک چندهدفه استفاده شد. دو تابع هدف برای تعیین درست ضرایب مطلوب در نظر گرفته شده

در نهایت با اضافه شدن دو معادله‌ی بستر الاستیک تعداد معادلات سیستم به عدد هفت می‌رسد و معادلات جبری خواهیم داشت که می‌توان به صورت ماتریسی $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{X} = \hat{\mathbf{B}}$ آن را نشان داد به صورتی که بردار \mathbf{X} بردار مجهولات دستگاه معادلات، $\hat{\mathbf{A}}$ ماتریس ضرایب و $\hat{\mathbf{B}}$ بردار نیروهای عمومی است.

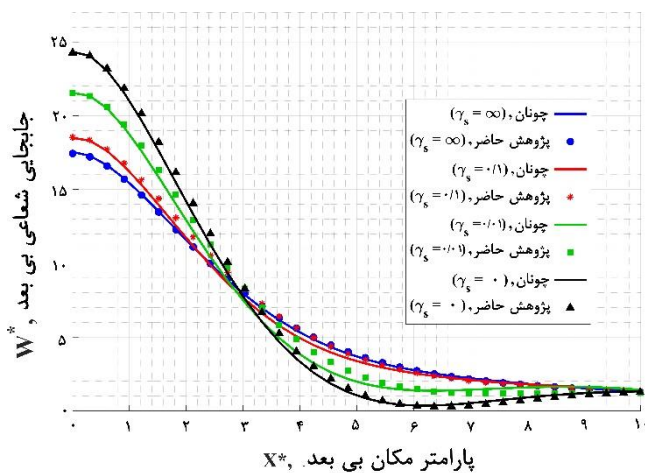
۴-۲. پیاده‌سازی کنترل‌کننده

سازه پس از رسیدن به پاسخ دینامیکی سیستم، با توجه به استفاده از لایه‌ی پیزوالکتریک در پوسته، برای روند کنترل ارتعاشات در نظر گرفته شده است که با اندازه‌گیری جابه‌جایی لایه میانی توسط لایه‌ی سنسور پیزوالکتریک و با ایجاد تغییر ولتاژ لایه‌های پیزوالکتریک منجر به ایجاد جابه‌جایی این لایه‌ها و در نتیجه ایجاد اثر خنثی بر جابه‌جایی اندازه‌گیری شده فرآیند کنترل صورت گیرد و لذا با توجه به توضیح بالا فرمان کنترلی مربوط به ولتاژ سنسور خواهد بود که به صورت بهره K_0 می‌شود. بنابراین:

$$V_a = -K_0 V_s \quad (13)$$

در حالی که ولتاژ سنسور مدار باز به صورت $V_s = R_L I_s(t)$ خواهد بود. به طوری که در آن R_L مقاومت مدار، $I_s(t) = dQ(t) / dt$ جریان خروجی از سنسور می‌باشد و بر اساس عبارت شار الکتریکی $Q(t) = \int_{h_2}^{h_p+h_2} \int_0^{2\pi} \{D_z\}_s r_{ex} d\theta dz$ بدست می‌آید. همچنین می‌دانیم $r_{ex} = r_c + h_p + h_2$ خواهد بود و با فرض قطبی شدن در جهت z ، میدان الکتریکی در لایه‌ی سنسور پیزوالکتریک همانطور که در معادلات پیوست الف اشاره شد، به صورت رابطه‌ی زیر بیان می‌شود. [۴۳، ۴۷]

برای صحت سنجی و برای حذف اثر لایه‌ی پیزوالکتریک ضخامت آن را به سمت صفر میل می‌دهیم ($h_p = 0$). نتایج به دست آمده در قالب شکل (۲) و شکل (۳) به نمایش درآمده است. نمودارها پس از بی‌بعدسازی پارامترهای جابه‌جایی، ولتاژ و موقعیت به صورت زیر خواهند بود.



شکل ۲. مقایسه‌ی نمودار جابه‌جایی-مکان تطبیقی با مقاله‌ی

چونان [۱۳] برای سرعت بی‌بعد $\lambda = 0.25$

همانگونه که در نمودار مشخص است نتایج شبیه‌سازی فعلی تطابق مطلوبی با نتایج مرجع داشته که نشان‌دهنده این مسأله است که شبیه‌سازی پوسته‌ی مدفون به شکل درستی صورت پذیرفته است. بیشترین اختلاف بین داده‌های بین نتایج پژوهش حاضر با نتایج موجود در مرجع برای نمونه‌ی 0.1 همان‌گونه که انتظار می‌رود با فاصله گرفتن از محل اعمال بار میزان جابه‌جایی نیز کمتر می‌شود. شیب کاهش جابه‌جایی ابتدا زیاده‌تر بوده و به مرور کاهش می‌یابد و به صفر می‌رسد. برای مقادیر پایین سختی برشی اتصال بین خاک و پوسته (γ_s) روند تغییرات جابه‌جایی شدت بیشتری دارد. نکته قابل توجه آن است که در حدود طول سه برابر ضخامت پوسته (۳) $x^* \approx$ شیب تغییرات جابه‌جایی روندی کاهشی به خود

است که به ترتیب عبارت‌اند از میزان انتگرال قدرمطلق خطا^{۱۸} ی جابه‌جایی شعاعی پوسته و میزان انتگرال قدرمطلق ولتاژ اعمالی به لایه‌ی عملگر. البته هر دو این مقادیر به صورت بی‌بعد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۳. نتایج

نتایج حاصله از قسمت روش حل که در نرم‌افزارهای متمتیکا^{۱۹} و متلب انجام شده است را در این قسمت بررسی می‌کنیم. در ابتدا نتایج شبیه‌سازی‌های اولیه با مراجع اصلی مقایسه می‌شود تا صحت روش حل مورد تأیید قرار بگیرد. نتایج اولیه شامل جابه‌جایی شعاعی پوسته مدفون، بدون در نظر گرفتن لایه‌ی پیزوالکتریک، و فرکانس‌های طبیعی اصلی سیستم غیرمدفون است که به ترتیب با مراجع [۴۲, ۴۳, ۴۸, ۴۹] مقایسه می‌شوند. مشخصات سیستم مورد بررسی به شرح زیر است. طول پوسته بی‌نهایت در نظر گرفته شده است. مقادیر عددی پارامترها در جدول (۱) ذکر شده‌اند. به صورتی که لایه‌ی پیزوالکتریک از PZT4 و لایه‌ی الاستیک پوسته از جنس آلومینیوم خواهد بود. شایان ذکر است که در این قسمت جابه‌جایی، ولتاژ و موقعیت بی‌بعد مورد بررسی قرار گرفته‌اند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

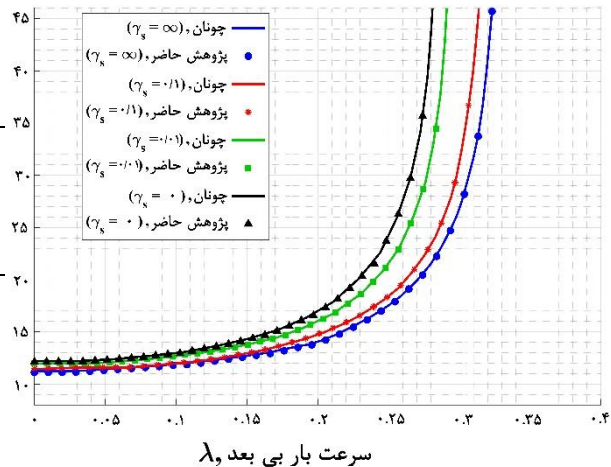
$$w^* = \left(\frac{E_s}{(1-\nu_s^2) r_c P_0} \right) w \quad V^* = \frac{V}{\sqrt{P_0 c_0 R}}$$

$$\sigma_{00}^* = \frac{\sigma_{00}}{P_0} \quad x^* = \frac{\bar{x}}{h_s} \quad \bar{x} = x - c_0 t \quad (16)$$

جدول ۱. مشخصات عددی پارامترهای سیستم

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
E	70 MPa	E_2 / E	0.125
ρ	2700 Kg / m^3	ν_2	0.33
ν_s	0.28	λ	0.25
r_c	0.1 m	λ_1	0.72
h_s / r_c	$1/20$	λ_s	0.363

می‌گیرد و این ناحیه، نقطه عطف سیستم محسوب می‌شود. نمودار جابه‌جایی نقطه اعمال بار بر اساس نسبت سرعت بار، نیز با نتایج مرجع مذکور مورد مقایسه گرفت که در ادامه به نمایش در آمده است:



شکل ۳. نمودار جابه‌جایی-سرعت بار در $x^* = 0$ تطبیقی با

مقاله‌ی چونان [۱۳]

آنچه که در این قسمت نیز مشهود است تطابق مطلوب نتایج پژوهش حاضر با مرجع است. بیشترین تفاوت نتایج برای مقادیر λ نزدیک به صفر و حدود ۵ درصد است. با افزایش مقدار λ اختلاف نتایج کمتر شده و به سمت صفر میل می‌کند. در خصوص روند نتایج نیز با توجه به آنچه مشهود است می‌توان گفت که افزایش سرعت بار متحرک به افزایش دامنه جابه‌جایی می‌شود؛ به نحوی که تابع جابه‌جایی بر حسب سرعت اکیداً صعودی است. مقدار و شیب افزایش جابه‌جایی در سیستم‌هایی با سختی برشی کمتر، بیشتر است. در ادامه به منظور صحت‌سنجی شبیه‌سازی پوسته‌ی پیروالکترونیک، فرکانس‌های طبیعی آن مراجع [۴۲, ۴۳] مقایسه می‌شود. شایان ذکر است که به منظور محاسبه فرکانس طبیعی سیستم از روش و پارامترهای عددی به کار رفته در مرجع [۴۳] استفاده شده است. همچنین مشابه مرجع [۴۲] سیستم به نحوی در نظر گرفته شده است که در آن فقط لایه عملگر تعبیه شده و از لایه سنسور

صرف نظر می‌شود. نتایج بررسی نیز شامل فرکانس طبیعی بی‌بعد است که به ترتیب با مراجع [۴۲, ۴۳, ۴۸, ۴۹] مقایسه می‌شوند:

جدول ۲. فرکانس‌های طبیعی پوسته پیروالکترونیک

n	خیبری و بنی [۴۸]	لیائو لیانگ ک و همکاران [۴۳]	وانگ و همکاران [۴۹]	هاشمی نژاد و جمال-پور [۴۲]
۱	۰/۰۱۶۳۱	۰/۰۱۶۰۸	۰/۰۱۶۱۷	۰/۰۱۶۱۶۷
۲	۰/۰۱۱۷۱	۰/۰۰۹۳۸	۰/۰۱۰۰۹	۰/۰۰۹۳۹۹
۳	۰/۰۲۴۸۵	۰/۰۲۲۱۱	۰/۰۲۴۴۱	۰/۰۲۲۱۰۹
۴	۰/۰۴۴۹	۰/۰۴۲۱	۰/۰۴۶۵۲	۰/۰۴۲۰۹۷

مقایسه‌ی صورت گرفته در این قسمت و تطابق نتایج به خوبی نشان می‌دهد که شبیه‌سازی صورت گرفته برای پوسته پیروالکترونیک به درستی انجام شده است. بیشینه تفاوت نتایج این بخش با مقاله‌ی جمال‌پور ۰/۲ درصد است.

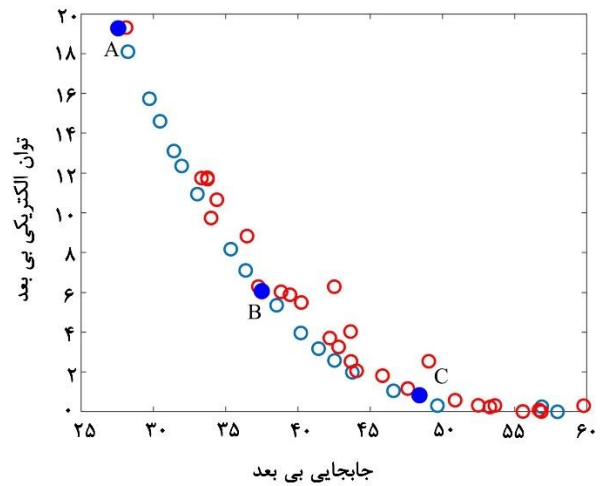
۳-۱. بهینه‌سازی

کنترل‌کننده به کار رفته در این پژوهش از نوع PID است و ضرایب آن توسط الگوریتم ژنتیک چندهدفه بهینه‌سازی شده‌اند. توابع هدف بهینه‌سازی انتگرال قدرمطلق خطای جابه‌جایی شعاعی γ_s بی‌بعد شده و انتگرال قدرمطلق توان الکتریکی بی‌بعد شده هستند که قصد در کمینه کردن آن‌ها داریم. لازم به ذکر است که فرآیند بهینه‌سازی مقید به آن است که ولتاژ سیستم از حد تعیین شده خود فراتر نرود. از طرفی بیان این نکته اهمیت دارد که بهینه‌سازی برای $\gamma_s = \infty$ انجام شده است. برای بهینه‌سازی کنترل‌کننده از الگوریتم ژنتیک چندهدفه استفاده شد. نتایج آخرین مرحله‌ی بهینه‌سازی در قالب جبهه‌ی پارتو^{۲۱} نشان داده شده در شکل (۴) ارائه شده است. سه نقطه‌ی مشخص شده A، B و C به ترتیب بیانگر سیستم‌های دارای شرایط کمینه‌ی خطای جابه‌جایی، کمینه‌ی توان مصرفی و نقطه‌ی مصالحه^{۲۲} هستند. نتایج حاصل از بهینه‌سازی نشان

۲-۳. نتایج اعمال کنترل کننده‌ها

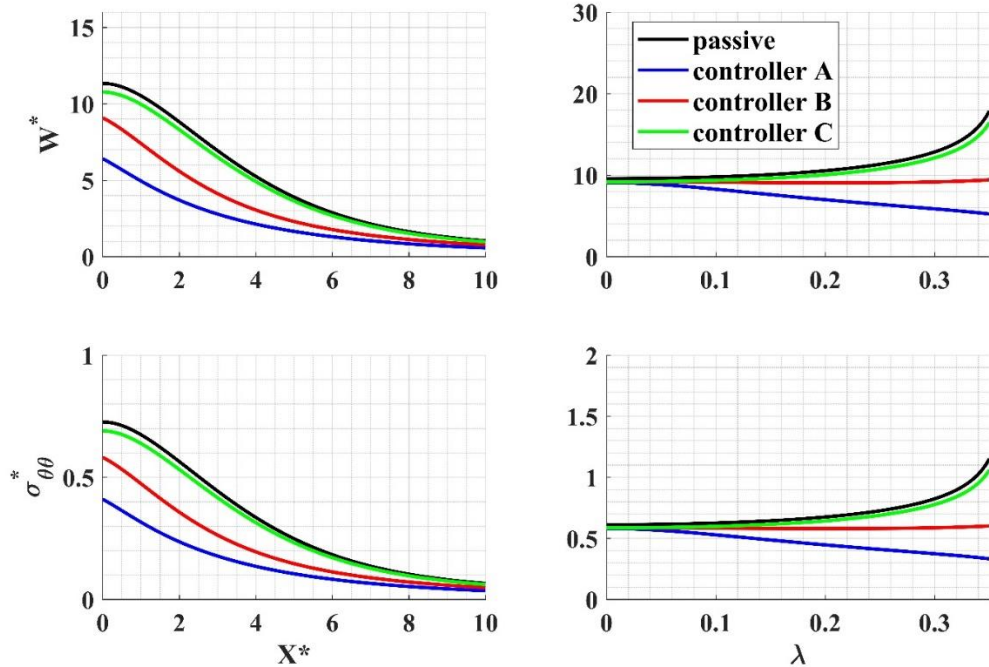
در این قسمت به بررسی نتایج حاصل از اعمال کنترل کننده‌های انتخاب شده پرداخته می‌شود. در ابتدا پاسخ سیستم غیرفعال و فعال به ازای سختی برشی بی‌نهایت مورد بررسی قرار گرفته و در قالب شکل (۵) نشان داده شده است

می‌دهد، همان‌گونه که انتظار می‌رفته، توابع هدف نسبت به هم رفتار معکوس دارند.



شکل ۴. جبهه پارتو نهایی بهینه‌سازی توابع هدف

$$\gamma_s = \infty$$



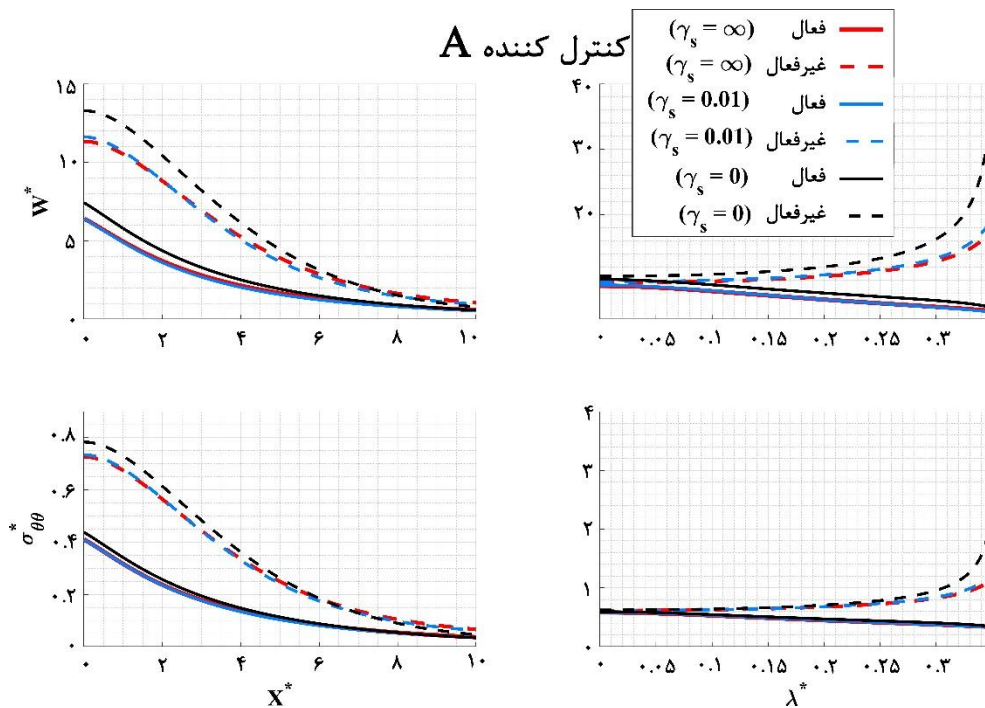
شکل ۵. نمودار نتایج پوسته‌های فعال و غیرفعال به ازای $\gamma_s = 0$

غیرفعال که به ترتیب حدوداً $11/3$ و $0/72$ واحد هستند؛ در سیستم با کنترل کننده‌ی A به ترتیب به مقادیر $6/4$ و $0/41$ می‌رسند. همین مقادیر در سیستم با کنترل کننده‌ی C به ترتیب $10/9$ و $0/69$ واحد و در سیستم

با توجه به شکل بالا می‌توان نتیجه گرفت که دامنه‌ی جابه‌جایی و تنش سیستم در حضور کنترل کننده‌ی A حدوداً نصف پوسته‌ی غیرفعال است به نحوی که به عنوان مثال در $X^* = 0$ دامنه‌ی جابه‌جایی و تنش پوسته‌ی

با کنترل کننده‌ی B به ترتیب برابر ۹/۱ و ۰/۵۸ واحد هستند. روند تغییرات جابه‌جایی و تنش نسبت به تغییر سرعت بار متحرک در پوسته‌های فعال و غیرفعال متفاوت است؛ به نحوی که در پوسته‌ی غیرفعال و پوسته‌ی فعال با کنترل کننده‌ی C دامنه‌ی این متغیرها با افزایش سرعت افزایش می‌یابد اما در پوسته با کنترل کننده‌ی B روند تغییرات ابتدا ثابت سپس با شیب اندک افزایشی می‌شود. همچنین در پوسته با کنترل-

کننده‌ی A متغیرها روندی کاهشی دارند. در سرعت-های پایین ($\lambda < 0.06$) دامنه‌ی جابه‌جایی و تنش در پوسته‌های فعال و غیرفعال بسیار به هم نزدیک بوده و با افزایش سرعت اختلاف بین آن‌ها زیاد می‌شود. در ادامه اثر پارامتر سختی برشی بر رفتار سیستم در حضور کنترل کننده A مورد بررسی قرار گرفته که نتایج آن در قالب شکل (۶) نمایش داده شده است.



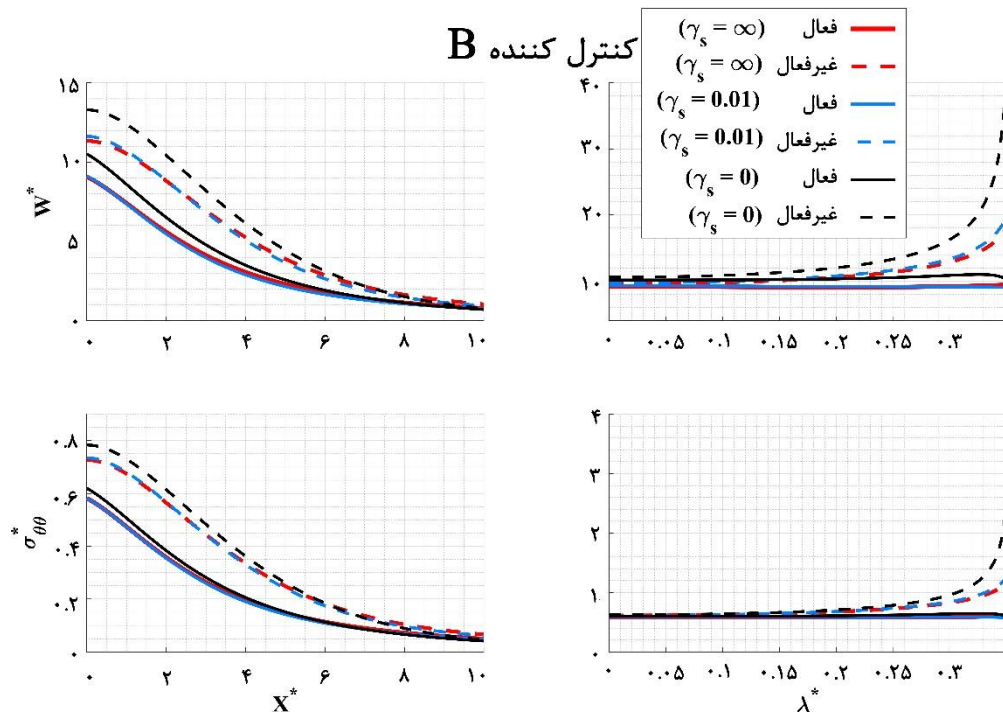
شکل ۶. نمودار نتایج پوسته‌های فعال و غیرفعال برای سختی‌های برشی متفاوت با اعمال کنترل کننده‌ی A

سیستم با اعمال کنترل کننده‌ی A بیشترین کاهش در پاسخ را چه در جابه‌جایی و چه در تنش تجربه می‌کند. نمودارهای پاسخ مکانی حاکی از آن هستند که دامنه‌ی جابه‌جایی و تنش در محل اعمال بار ($X^* = 0$) حدوداً نصف حالت غیرفعال شده‌اند که با فاصله گرفتن از این نقطه خود به مرور کاهش می‌یابند و به مقادیر ثابت تقریباً ۱ برای W^* و ۰/۰۵ برای $\sigma_{\theta\theta}^*$ می‌رسند. همانطور که در نتایج مکانی دیده می‌شود، اختلاف بین

پاسخ‌های سیستم به ازای مقادیر مختلف سختی برشی در حالت غیرفعال بیشتر از اختلاف آن‌ها پس از اعمال کنترل کننده‌ی A است. به عنوان مثال اختلاف بین دامنه جابه‌جایی در نقطه اعمال بار، به ازای سختی‌های برشی صفر و بی‌نهایت، برای پوسته‌ی غیرفعال حدود ۲ واحد و برای پوسته‌ی فعال A حدود ۱/۱ واحد است. این اختلاف چه در پوسته‌ی غیرفعال و چه در پوسته با کنترل کننده‌ی A با فاصله گرفتن از محل اعمال بار

نصف مقدار اولیه کاهش یافته است که نتیجه‌ی قابل توجهی برای دینامیک سیستم می‌باشد. در مرحله بعد اثر سختی برشی بر پاسخ سیستم در حضور کنترل کننده B بررسی شده که در قالب نمودارهای شکل (۷) نشان داده شده است.

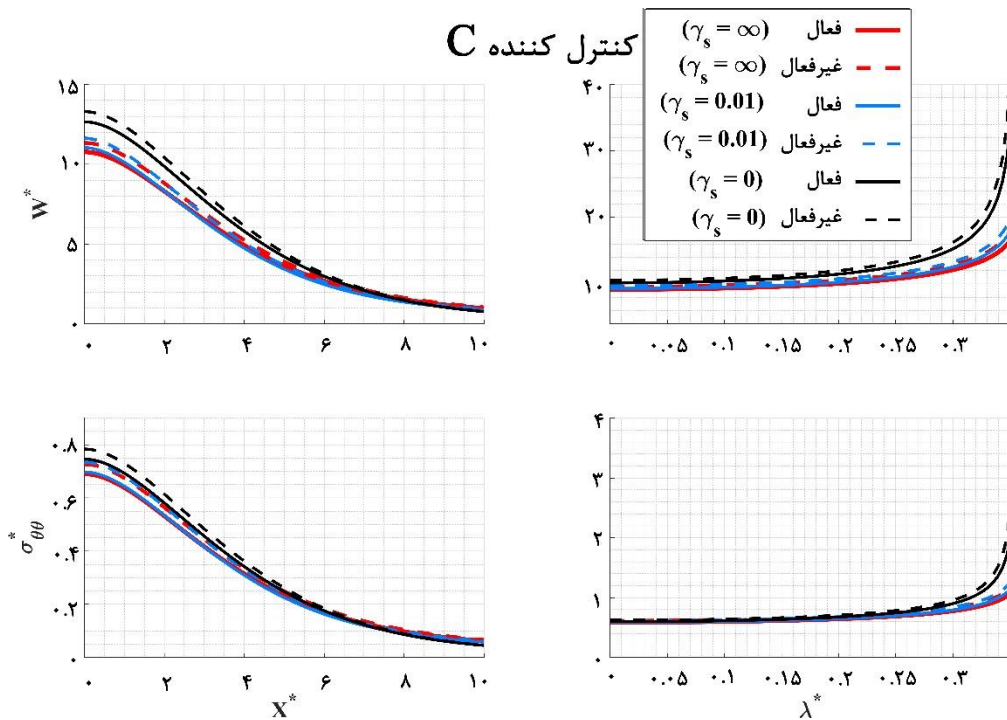
کاهش یافته و به مرور به سمت صفر میل می‌کند. با افزایش سرعت بار در حالت غیرفعال مقادیر جابه‌جایی و تنش تا زمان رسیدن به سرعت بحرانی افزایش می‌یابند اما با اعمال کنترل کننده‌ی A نتایج در محدوده‌ی مطالعه به صورت نزولی ظاهر می‌شوند. با بررسی دقیق‌تر می‌توان دریافت که مقدار سرعت بحرانی به



شکل ۷. نمودار نتایج پوسته‌های فعال و غیرفعال برای سختی‌های برشی متفاوت با اعمال کنترل کننده‌ی B

بحرانی سیستم در مقادیر بالای ۰/۳ است. اختلاف پاسخ‌ها (نسبت به تغییرات سختی برشی) در این حالت بیشتر از سیستم A است به نحوی که در نقطه اعمال بار اختلاف دامنه‌ی جابه‌جایی بین دو حالت با سختی‌های برشی صفر و بی‌نهایت حدود ۱/۳ واحد است. در نهایت نیز پاسخ سیستم در حضور کنترل کننده C و به ازای مقادیر مختلف سختی برشی بررسی شده و در قالب شکل (۸) به نمایش درآمده است.

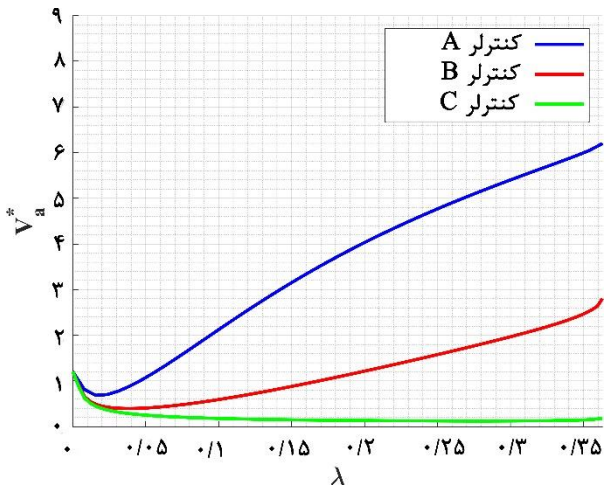
با توجه به شکل می‌توان گفت که بیشینه میزان کاهش دامنه در زمان اعمال کنترل کننده‌ی B حدود ۳۰ درصد است که نسبت به پاسخ‌هایی که در مورد پوسته با کنترل کننده‌ی A دیده می‌شود، کمتر است. تغییر روند ایجاد شده برای نمودارهای جابه‌جایی-سرعت بار و تنش-سرعت بار که برای سیستم A مشاهده شده بود، برای سیستم پس از اعمال کنترل کننده‌ی B نیز اتفاق می‌افتد. اما کاملاً مشهود است که مقدار سرعت بحرانی، برخلاف زمان اعمال کنترل کننده‌ی A، نسبت به حالت غیرفعال کاهش کمتری داشته و حدود سرعت



شکل ۸. نمودار نتایج پوسته‌های فعال و غیرفعال برای سختی‌های برشی متفاوت با اعمال کنترل کننده‌ی C

سیستم کنترل کننده‌ی C عملکرد ضعیفی داشته و حدوداً کاهشی ۱۵ درصدی را به همراه دارد. البته باید این را نیز در نظر داشت که این تغییر کم ناشی از میزان کمتر ولتاژ اعمالی نسبت به دو کنترل کننده دیگر است. سختی برشی در این حالت بیشترین تأثیر را در میان پوسته‌های فعال دارد به نحوی که به عنوان مثال در نقطه اعمال بار، اختلاف دامنه جابه‌جایی ناشی از اختلاف سختی برشی حدود ۲ واحد (حدوداً برابر با پوسته غیرفعال) است. از سوی دیگر اعمال کنترل-کننده‌ی C باعث کاهش ناچیز سرعت بحرانی شده به طوری که نمودارهای جابه‌جایی و تنش همانند حالت غیرفعال در بازه‌ی مورد نظر صعودی بوده و حاشیه امنی برای تغییر سرعت بار ایجاد می‌کند. همان‌طور که انتظار می‌رود دامنه‌ی جابه‌جایی و تنش سیستم به‌ازای کنترل کننده‌ی A در کمترین حالت خود است. در مقابل کنترل کننده C کمترین تغییرات را نسبت به پوسته‌ی

غیرفعال دارد. روند تغییرات این متغیرها نسبت به تغییرات موقعیت در پوسته‌های فعال و غیرفعال مشابه است. روند تغییرات نمودارهای جابه‌جایی و تنش بسیار مشابه یکدیگر هستند. علت این مسئله آن است که با توجه به معادلات پوسته و روند ساده‌سازی آن برای دستیابی به معادلات پوسته‌ی جدار نازک حاضر، عبارت تنش ساده‌شده عمده‌تحت تأثیر متغیر جابه‌جایی شعاعی می‌شود. در نتیجه این تشابه قابل انتظار بوده و مطابق با روند مدل‌سازی سیستم می‌باشد. نزدیکی پاسخ سیستم فعال در سرعت‌های پایین نشان‌دهنده‌ی آن است که اعمال کنترل کننده به منظور کاهش جابه‌جایی زمانی که سرعت بار متحرک همواره از حد مشخصی پایین‌تر باشد، به‌صرفه نیست. همچنین با توجه به نتایج گفته شده درمی‌یابیم که توانایی کنترل کننده در کاهش دامنه ارتعاشات و تنش با مقدار سرعت بحرانی بار اعمالی رابطه‌ی عکس دارد. لذا برای کاهش ارتعاشات با

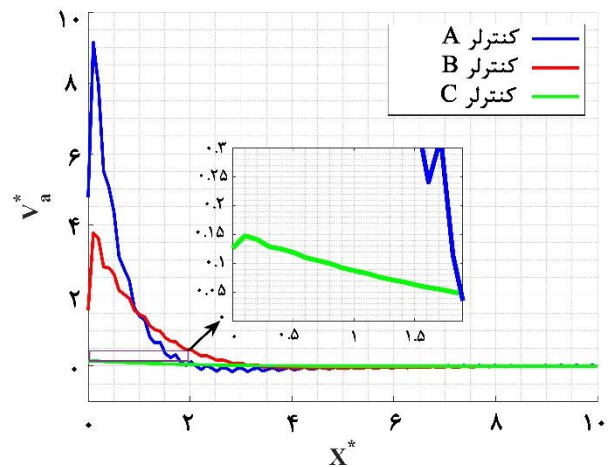


شکل ۸. نمودار ولتاژ بی بعد اعمالی به لایه‌ی عملگر بر حسب سرعت بی بعد بار متحرک برای پوسته‌های فعال

روند کلی تغییرات دامنه‌ی ولتاژ اعمالی به لایه‌ی عملگر در سه کنترل کننده بر حسب تغییرات موقعیت شکل مشابهی دارد. در هر سه مورد ولتاژ اعمالی ابتدا با شیب بالایی زیاد شده و سپس کاهش یافته و به سمت صفر میل می‌کند. برای سیستم فعال A ولتاژ در $X^* = 0$ حدود $4/7$ واحد است که در حدود $X^* = 0/1$ به مقدار $9/3$ واحد رسیده و حدوداً دو برابر می‌شود. از این به بعد روند ولتاژ این سیستم نزولی بوده و به سمت صفر میل می‌کند. دامنه‌ی این متغیر در این حالت در $X^* > 0/3$ نوسانی می‌شود. دامنه‌ی نوسانات با نزدیک شدن مقدار متغیر به صفر کاهش یافته و از حدود $X^* > 4/5$ ولتاژ به مقدار نهایی خود (صفر) نشست می‌کند. در سیستم B مقدار ولتاژ بی بعد در مبدأ حدود $1/6$ واحد است که ابتدا در روندی افزایش و در حدود $X^* = 0/1$ به مقدار $4/8$ واحد رسیده و سپس افت می‌کند. در این حالت روند کاهشی ولتاژ شدت و شیب کمتری نسبت به حالت A دارد؛ به نحوی که دامنه‌ی ولتاژ سیستم B از ۱ $X^* >$ از حالت A پیشی می‌گیرد. در سیستم C دامنه‌ی تغییرات ولتاژ نسبت به دو مورد دیگر کمتر است. در این حالت ولتاژ در مبدأ حدود $0/12$ است و سپس در روندی آرام کاهش یافته و در حدود $X^* = 2$ به صفر می‌رسد.

استفاده از کنترل کننده‌ها باید با توجه به سه پارامتر کاهش جابه‌جایی و تنش، محدوده‌ی مناسب سرعت بار و توان یا ولتاژ اعمالی به سیستم، بهترین ضرایب کنترل کننده را انتخاب کرد. پس می‌توان نتیجه گرفت که کاهش جابه‌جایی و تنش به تنهایی نمی‌توانند معیار انتخاب و اعمال کنترل کننده باشند. دیگر نکته حایز اهمیت آن است که اثر سختی برشی بر پوسته‌ی فعال کمتر از پوسته‌ی غیرفعال است؛ و در میان خود پوسته‌های فعال نیز هرچه کنترل کننده قوی‌تر باشد، تأثیر سختی برشی بر پاسخ کمتر است. از نگاهی دیگر می‌توان گفت که یک کنترل کننده با عملکرد قوی در کاهش ارتعاشات و تنش، می‌تواند حساسیت پاسخ ارتعاشی سیستم نسبت به مرز خود با محیط الاستیک را کاهش و مقاومت آن را افزایش دهد.

۳-۳. نتایج ولتاژ اعمالی به عملگر



شکل ۹. نمودار ولتاژ بی بعد اعمالی به لایه‌ی عملگر بر حسب موقعیت بی بعد برای پوسته‌های فعال

در مورد تغییرات ولتاژ بر حسب سرعت بار متحرک قضیه شکل متفاوتی دارد. نکته‌ی مهم آن است که زمانی که سرعت سیستم صفر باشد تفاوتی بین ولتاژ اعمالی سه کنترل‌کننده مشاهده نمی‌شود و مقادیر هر سه حالت $1/2$ واحد است. علت این امر آن است که در این حالت متغیرهای فیزیکی مسأله نیز مقادیر یکسانی دارند. همچنین اختلاف ولتاژهای اعمالی در سرعت‌های پایین‌تر کمتر بوده و با افزایش سرعت این اختلاف نیز زیاد می‌شود. روند کلی تغییرات به این صورت است که با افزایش سرعت بار اعمالی میزان ولتاژ اعمالی ابتدا کاهش و سپس افزایش پیدا می‌کند ولی شیب تغییرات در سه سیستم متفاوت از یکدیگر است. در سیستم A که کنترل‌کننده بیشترین مقدار ولتاژ اعمالی را دارد، شیب تغییرات تغییر ولتاژ در 0.02 ازای این سرعت است (حدود 0.7 واحد). در سرعت‌های بالاتر شیب نمودار برای این سیستم مثبت بوده و ولتاژ کاری افزایش می‌یابد. در مورد سیستم B نیز وضعیت مشابه است؛ با این تفاوت که شیب کاهش‌ی اولیه نسبت به حالت A بیشتر است و ولتاژ سیستم در $X^* = 0.03$ به حدود 0.4 واحد می‌رسد و بعد از با شیب کمتری نسبت به حالت A افزایش می‌یابد. در مورد پوسته‌ی فعال C نیز بنابر آنچه مشاهده می‌شود می‌توان گفت شیب در قسمت کاهش‌ی بیشتر از دو مورد دیگر بود، ولی پس از آن به میزان زیادی ثابت بوده و در سرعت‌های نزدیک به 0.36 دوباره شروع به افزایش می‌کند.

۴. جمع‌بندی

در این مقاله مدل‌سازی و کنترل رفتار دینامیکی یک پوسته‌ی پیزوالکتریک استوانه‌ای مدفون در محیط الاستیک با طول بی‌نهایت و بارگذاری متحرک مورد

بررسی قرار گرفت. برای مدل‌سازی پوسته از تئوری کلاسیک لاو و برای مدل‌سازی محیط الاستیک از تئوری الاستیسیته استفاده شده است. با استفاده از تبدیل فوریه معادلات از فرم دیفرانسیلی به فرم جبری در حوزه فرکانس انتقال یافته و نتایج آن‌ها پس از حل توسط تبدیل فوریه معکوس به حوزه‌ی زمان منتقل شدند. از روش انتگرال‌گیری گوسین به منظور حل تبدیل فوریه معکوس استفاده شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های اولیه با مراجع مقایسه شد و صحت شبیه‌سازی به اثبات رسید. سپس با استفاده از الگوریتم ژنتیک چندهدفه، تعدادی کنترل‌کننده بهینه برای کاهش جابه‌جایی پوسته و ولتاژ اعمالی طراحی شد. نتایج به ازای کنترل‌کننده‌های مختلف و همچنین سختی‌های برشی مختلف بررسی و نشان داده شد که اهداف طراحی حاصل شده است. لازم به ذکر است که نوآوری این تحقیق نسبت به پژوهش‌های گذشته که در طول متن به آن‌ها اشاره شد، مدفون بودن یک پوسته‌ی پیزوالکتریک تحت تأثیر بار متحرک و اعمال کنترل‌کننده بر آن می‌باشد. از نتایج مهم این مطالعه می‌توان به کنترل و کاهش موفقیت‌آمیز ارتعاشات پوسته‌ی هوشمند مدفون با اعمال کنترل‌کننده‌های بهینه‌ی در نظر گرفته شده، اشاره کرد به طوری که در صورت اعمال کنترل‌کننده و با استفاده از لایه‌ی پیزوالکتریک می‌توان دامنه جابه‌جایی را تا حدود 50 درصد کاهش داد. از سوی دیگر تأثیر پارامتر سختی برشی لایه‌ی مرزی بین پوسته و محیط الاستیک نیز بر پاسخ ارتعاشی سیستم مورد نظر بررسی شده است؛ که نتایج مذکور، همانند آنچه در بسیاری از پژوهش‌ها دیده شده است، حاکی از آن است که دامنه‌ی ارتعاشات پوسته با افزایش میزان سختی برشی شعاعی کاهش می‌یابد. از دیگر مشاهدات مهم آن بوده است که استفاده از کنترل‌کننده‌هایی که دامنه‌ی ارتعاشات را به

پوسته حساسیت کمتری نسبت تغییرات پارامتری سیستم (در اینجا سختی برشی اتصال پوسته به محیط الاستیک) دارد که نشان می‌دهد در حضور این لایه، مقاومت سیستم افزایش می‌یابد.

شدت کاهش می‌دهند الزاماً مطلوب نیست؛ زیرا علاوه مصرف توان الکتریکی بیشتر موجب کاهش سرعت بحرانی سیستم می‌شوند. همچنین با توجه به نتایج دیده می‌شود که در حضور لایه‌ی پیزوالکتریک ارتعاشات

مآخذ

- [1] *Shell theory*. Springer, European Mathematical Society, 2014. *Encyclopedia of Mathematics*. [accessed 23 February 2024] Available from: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Shell_theory&oldid=33309.
- [2] Naghdi, P., On the theory of thin elastic shells. *Quarterly of applied Mathematics*, 1957, 14(4): pp.369-380.
- [3] Love, Augustus Edward Hough. "XVI. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell." *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. (A.)* 179, 1888, pp.491-546.
- [4] Payton, R., Dynamic membrane stresses in a circular elastic shell. 1961.
- [5] Ruzzene, M. and A.M. Baz. Dynamic stability of periodic shells with moving loads. in *Smart Structures and Materials 2001: Smart Structures and Integrated Systems*. 2001. SPIE.
- [6] Zhang, J.D., B. Zhen, and X. Li, The Critical Velocity for an Infinite Cylindrical Shell under a Moving Load. *Applied Mechanics and Materials*, 2014, 441: pp.461-464.
- [7] Lee, S. and J. Seok, Dynamic analysis of a hollow cylinder subject to a dual traveling force imposed on its inner surface. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 340: pp.283-302.
- [8] Arazm, M., H. Eipakchi, and M. Ghannad, Vibrational behavior investigation of axially functionally graded cylindrical shells under moving pressure. *Acta Mechanica*, 2019, 230: pp.3221-3234.
- [9] Eipakchi, H., F.M. Nasrekani, and S. Ahmadi, An analytical approach for the vibration behavior of viscoelastic cylindrical shells under internal moving pressure. *Acta Mechanica*, 2020, 231: pp.3405-3418.
- [10] Huo, H., et al., Exact benchmark solutions of random vibration responses for thin-walled orthotropic cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, 207: pp.106644.
- [11] Saeedi, Soheil, Mohsen Kholdi, Abbas Loghman, Hossein Ashrafi, and Mohammad Arefi. "Thermo-elasto-plastic analysis of thick-walled cylinder made of functionally graded materials using successive approximation method." *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 194, 2021, 104481.
- [12] Gao, X.-L., Critical velocities of a two-layer composite tube under a moving internal pressure. *Acta Mechanica*, 2023, 234(5): pp.2021-2043.
- [13] Chonan, S., Dynamic response of a cylindrical shell imperfectly bonded to a surrounding continuum of infinite extent. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, 78(2): pp.257-267.
- [14] Dwivedi, J., V. Singh, and P. Upadhyay, Nonaxisymmetric dynamic response of imperfectly bonded buried fluid-filled orthotropic cylindrical shells. 1996.

- [15] Hasheminejad ,S.M. and M. Komeili, Effect of imperfect bonding on axisymmetric elastodynamic response of a lined circular tunnel in poroelastic soil due to a moving ring load. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, 46(2): pp.398-411.
- [16] Yuan, Z., et al., Dynamic response of a tunnel buried in a saturated poroelastic soil layer to a moving point load. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2015, 77: pp.348-359.
- [17] Alzabeebee, S.I.A., Enhanced design approaches for rigid and flexible buried pipes using advanced numerical modelling. 2017, University of Birmingham.
- [18] Akbarov, S., M. Mehdiyev, and M. Ozisik, Three-dimensional dynamics of the moving load acting on the interior of the hollow cylinder surrounded by the elastic medium. *Structural Engineering and Mechanics*, 2018, 67(2): pp.185-206.
- [19] Akbarov, S.D. and M.A. Mehdiyev, 3D dynamics of the oscillating-moving load acting in the interior of the hollow cylinder surrounded with elastic medium. *Structural Engineering and Mechanics*, 2019, 71(6): pp.713-738.
- [20] Tong, L., et al., Dynamic effect of a moving ring load on a cylindrical structure embedded in poroelastic space based on nonlocal Biot theory. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2020, 128: p.105897.
- [21] Liu, Y., Z. Qin, and F. Chu ,Nonlinear dynamic responses of sandwich functionally graded porous cylindrical shells embedded in elastic media under 1: 1 internal resonance. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, 42(6): pp.805-818.
- [22] Alibeigloo, A., M. Talebitooti, Three-dimensional transient coupled thermoelasticity analysis of FGM cylindrical panel embedded in piezoelectric layers. *Mechanics of Smart Structures*, 2021.
- [23] Girnis, S., et al. Action of Moving Load on a Two-Layer Shell in Elastic Medium. in International Scientific Conference on Agricultural Machinery Industry “Interagromash”. 2022. Springer.
- [24] Singh, V., P. Upadhyay, and B. Kishor, On the dynamic response of buried orthotropic cylindrical shells under moving load. *International journal of mechanical sciences*, 1988, 30(6): pp.397-406.
- [25] Saviz, M., M. Shakeri, and M. Yas, Three-dimensional elasticity analysis of a laminated cylindrical shell with piezoelectric layer under dynamic loads. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2007, 221(12): pp.1507-1519.
- [26] Zhang, Y., S. Xie, and X. Zhang, Vibration control of a simply supported cylindrical shell using a laminated piezoelectric actuator. *Acta Mechanica*, 2008, 196(1): pp.87-101.
- [27] Sheng, G. and X. Wang, Response and control of functionally graded laminated piezoelectric shells under thermal shock and moving loadings. *Composite Structures*, 2010, 93(1): pp.132-141.
- [28] Zhang, S., R. Schmidt, and X. Qin, Active vibration control of piezoelectric bonded smart structures using PID algorithm. *Chinese journal of aeronautics*, 2015, 28(1): pp.305-313.
- [29] Arefi, M., R. Karroubi, and M. Irani-Rahaghi, Free vibration analysis of functionally graded laminated sandwich cylindrical shells integrated with piezoelectric layer. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37: pp.821-834.
- [30] Zhou, Y., J. Zhu, and D. Liu, Dynamic analysis of laminated piezoelectric cylindrical shells. *Engineering Structures*, 2020, 209: p. 109945.
- [31] Liu, J., et al., Deformation of laminated and sandwich cylindrical shell with covered or embedded piezoelectric layers under compression and electrical loading. *Composite Structures*, 2020, 240: p. 112041.
- [32] Lee, S.-L., Active vibration suppression of wind turbine blades integrated with piezoelectric sensors. *Science and Engineering of Composite Materials*, 2021, 28(1): pp.402-414.

- [33] Li, C., P. Li, and X. Miao, Research on nonlinear vibration control of laminated cylindrical shells with discontinuous piezoelectric layer. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 104(4), pp.3247-3267.
- [34] Acharya, R., et al., Structural response of a low-fill box culvert under static and traffic loading. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 2016, 30(1): p. 04014184.
- [35] Forrest, J. and H. Hunt, A three-dimensional tunnel model for calculation of train-induced ground vibration. *Journal of sound and vibration*, 2006, 294(4-5): pp.678-705.
- [36] Rahimi, G., M. Arefi, and M. Khoshgoftar, Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, 32: pp.997-1008.
- [37] Mohammadi, M., et al., Higher-order thermo-elastic analysis of FG-CNTRC cylindrical vessels surrounded by a Pasternak foundation. *Nanomaterials*, 2019, 9(1): p. 79.
- [38] Visioli, Antonio. *Practical PID control*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [39] Sathe, M.P., et al., Speed Control of DC Motor using PID Controller-A Review, 2019.
- [40] Dubey, V., H. Goud, and P.C. Sharma, Role of PID control techniques in process control system: a review. *Data Engineering for Smart Systems: Proceedings of SSIC 2021, 2022*: pp.659-670.
- [41] Abdennour, A. and F.A. Alturki, A Comparative Study of PI/PID Classical and Intelligent Tuning Methods. *Journal of Engineering and Computer Sciences*, 2008, 1(1): pp.29-42.
- [42] Hasheminejad, S.M. and A. Jamalpoor, Control of sound transmission into a hybrid double-wall sandwich cylindrical shell. *Journal of Vibration and Control*, 2022, 28(5-6): pp.689-706.
- [43] Ke, L., Y. Wang ,and J. Reddy, Thermo-electro-mechanical vibration of size-dependent piezoelectric cylindrical nanoshells under various boundary conditions. *Composite Structures*, 2014, 116: pp.626-636.
- [44] Lu, J.-F., et al., Response of a circular tunnel embedded in saturated soil to a series of equidistant moving loads. *Acta Mechanica*, 2017. 228: pp.3675-3693.
- [45] Steele, C., Beams and shells with moving loads. *International Journal of Solids and Structures*, 1971, 7(9): pp.1171-1198.
- [46] Lu, Jian-Fei, and Dong-Sheng Jeng. "Dynamic response of a circular tunnel embedded in a saturated poroelastic medium due to a moving load." 2006, pp.750-756.
- [47] Hwang, W.-S., H.C. Park, and W. Hwang, Vibration control of a laminated plate with piezoelectric sensor/actuator: finite element formulation and modal analysis. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1993, 4(3): pp.317-329.
- [48] Kheibari, Forough, and Yaghoub Tadi Beni. "Size dependent electro-mechanical vibration of single-walled piezoelectric nanotubes using thin shell model." *Materials & Design*, 114, 2017, pp.572-583.
- [49] Wang, Y.Q., Y.F. Liu, and J.W. Zu, Analytical treatment of nonlocal vibration of multilayer functionally graded piezoelectric nanoscale shells incorporating thermal and electrical effect. *The European Physical Journal Plus*, 134, 2019, pp.1-15.

پیوست الف

بر اساس تئوری جدار نازک لاو، مؤلفه‌های جابه‌جایی سه بعدی پوسته PZT مربوطه به ترتیب با جابه‌جایی‌های سطح میانی مرتبط در جهات θ, x و شعاعی از طریق روابط کلاسیک مرتبط هستند. [۴۳]

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, \theta, z, t) &= u(x, \theta, t) - z \frac{\partial w(x, \theta, t)}{\partial x} \\ \bar{v}(x, \theta, z, t) &= v(x, \theta, t) - z \frac{\partial w(x, \theta, t)}{\partial \theta} \\ \bar{w}(x, \theta, z, t) &= w(x, \theta, t)\end{aligned}\quad (الف-۱)$$

همچنین، روابط کرنش-جابه‌جایی مربوطه در پوسته‌ی الاستیک و لایه‌های پوسته‌ی PZT از طریق روابط زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r_c} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w - \frac{z}{r_c} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{z}{r_c} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \varepsilon_{x\theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r_c} \frac{\partial u}{\partial \theta} - 2 \frac{z}{r_c} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{z}{r_c} \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\quad (الف-۲)$$

علاوه بر این، روابط سازنده خطی برای پوسته‌ی الاستیک و لایه‌های پیزوالکتریک را می‌توان به شکل ماتریسی زیر بیان کرد. [۲۷]

$$\begin{aligned}\sigma_c &= \mathbf{Q}_c \varepsilon_c \\ \sigma_i^p &= \mathbf{Q}_p \varepsilon_c - \mathbf{e} \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{D}_i = \mathbf{e}^T \varepsilon_c + \mu \mathbf{E}_i\end{aligned}\quad (الف-۳)$$

به طوری که بالانویس "T" نشان دهنده ترنسپوز یک ماتریس است. همچنین $i = a, s$ به ترتیب به لایه‌های عملگر و سنسور اشاره دارد، \mathbf{D}_i بردار جابه‌جایی الکتریکی، $\mathbf{E}_i = -\nabla \Phi_i$ بردار میدان الکتریکی است و $\Phi_{a,s}$ پتانسیل الکتریکی کل لایه‌های عملگر و سنسور است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Phi_s = -\cos \left\{ \frac{\pi}{h_p} \left(z - \frac{2h_2 + h_p}{2} \right) \right\} \varphi_s(x, \theta, t)$$

$$\begin{aligned}\Phi_a &= -\cos \left\{ \frac{\pi}{h_p} \left(z + \frac{2h_2 + h_p}{2} \right) \right\} \varphi_a(x, \theta, t) \\ &+ \frac{2}{h_p} \left(z + \frac{2h_2 + h_p}{2} \right) V_a(x, \theta, t)\end{aligned}\quad (الف-۴)$$

علاوه بر این، ماتریس ضرایب پوسته‌ی الاستیک و لایه‌های پیزوالکتریک، $\mathbf{Q}_{c,p}$ ماتریس کاهش یافته کوپلینگ الکترومکانیکی، \mathbf{e} ، ماتریس گذردهی دی الکتریک کاهش یافته، μ ، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_c &= \begin{bmatrix} \frac{E_2}{(1-\nu_2^2)} & \frac{\nu_2 E_2}{(1-\nu_2^2)} & 0 \\ \frac{\nu_2 E_2}{(1-\nu_2^2)} & \frac{E_2}{(1-\nu_2^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_2}{2(1+\nu_2)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_p &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mu &= \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(الف-۵)

همچنین، پارامترهای پیزوالکتریک کاهش یافته نیز به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}c_{11} &= \tilde{c}_{11} - \frac{\tilde{c}_{13}^2}{\tilde{c}_{33}} & c_{12} &= \tilde{c}_{12} - \frac{\tilde{c}_{13}^2}{\tilde{c}_{33}} & c_{22} &= \tilde{c}_{22} - \frac{\tilde{c}_{23}^2}{\tilde{c}_{33}} \\ c_{66} &= \tilde{c}_{66} & e_{31} &= \tilde{e}_{31} - \frac{\tilde{c}_{13}^2 \tilde{e}_{33}}{\tilde{c}_{33}} & e_{32} &= \tilde{e}_{32} - \frac{\tilde{c}_{23}^2 \tilde{e}_{33}}{\tilde{c}_{33}} \\ \mu_{11} &= \tilde{\mu}_{11} & \mu_{22} &= \tilde{\mu}_{22} & \mu_{33} &= \tilde{\mu}_{33} - \frac{\tilde{e}_{33}^2}{\tilde{c}_{33}}\end{aligned}\quad (الف-۶)$$

اکنون، تغییرات انرژی کرنش، انرژی جنبشی و کار نیروهای غیر پایستار برای پوسته استوانه‌ای ساندویچی پیزوالکتریک را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\delta \Pi_f = \int_A (p_2^T + p_2^R) \delta w dA - \int_A p_3^T \delta w dA$$

$$(a_{11}, d_{11}) = \int_{-h_p-h_2}^{-h_2} (1, z^2) c_{11} dz + \int_{h_2}^{h_p+h_2} (1, z^2) c_{11} dz + \int_{-h_2}^{h_2} \frac{E_c (1, z^2)}{1 - \nu_c^2} dz$$

$$(a_{12}, d_{12}) = \int_{-h_p-h_2}^{-h_2} (1, z^2) c_{12} dz + \int_{h_2}^{h_p+h_2} (1, z^2) c_{12} dz + \int_{-h_2}^{h_2} \frac{\nu_c E_c (1, z^2)}{1 - \nu_c^2} dz$$

$$(a_{22}, d_{22}) = \int_{-h_p-h_2}^{-h_2} (1, z^2) c_{22} dz + \int_{h_2}^{h_p+h_2} (1, z^2) c_{22} dz + \int_{-h_2}^{h_2} \frac{E_c (1, z^2)}{1 - \nu_c^2} dz$$

$$(a_{66}, d_{66}) = \int_{-h_p-h_2}^{-h_2} (1, z^2) c_{66} dz + \int_{h_2}^{h_p+h_2} (1, z^2) c_{66} dz + \int_{-h_2}^{h_2} \frac{E_c (1, z^2)}{2(1 + \nu_c)} dz$$

$$(E_{31}^a, E_{32}^a) = \int_{-h_p-h_2}^{-h_2} (e_{31}, e_{32}) \left(\frac{\pi z}{h_p} \right) \sin \left[\frac{\pi}{h_p} \left(z + \frac{2h_2 + h_p}{2} \right) \right] dz,$$

$$(E_{31}^s, E_{32}^s) = \int_{h_2}^{h_p+h_2} (e_{31}, e_{32}) \left(\frac{\pi z}{h_p} \right) \sin \left[\frac{\pi}{h_p} \left(z + \frac{2h_2 + h_p}{2} \right) \right] dz.$$

$$X_{11}^a = \int_{-h_p-h_2}^{-h_2} \mu_{11} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{h_p} \left(z + \frac{2h_2 + h_p}{2} \right) \right] \right\}^2 dz$$

$$X_{22}^a = \int_{-h_p-h_2}^{-h_2} \mu_{22} \left\{ \frac{1}{r_c + z} \cos \left[\frac{\pi}{h_p} \left(z + \frac{2h_2 + h_p}{2} \right) \right] \right\}^2 dz$$

$$X_{33}^a = \int_{-h_p-h_2}^{-h_2} \mu_{33} \left\{ \frac{\pi}{h_p} \sin \left[\frac{\pi}{h_p} \left(z + \frac{2h_2 + h_p}{2} \right) \right] \right\}^2 dz$$

$$X_{11}^s = \int_{-h_p-h_2}^{-h_2} \mu_{11} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{h_p} \left(z - \frac{2h_2 + h_p}{2} \right) \right] \right\}^2 dz$$

$$X_{22}^s = \int_{-h_p-h_2}^{-h_2} \mu_{22} \left\{ \frac{1}{r_c + z} \cos \left[\frac{\pi}{h_p} \left(z - \frac{2h_2 + h_p}{2} \right) \right] \right\}^2 dz$$

$$X_{33}^s = \int_{-h_p-h_2}^{-h_2} \mu_{33} \left\{ \frac{\pi}{h_p} \sin \left[\frac{\pi}{h_p} \left(z - \frac{2h_2 + h_p}{2} \right) \right] \right\}^2 dz$$

$$I_1 = \int_{-h_p-h_2}^{-h_2} \rho_p dz + \int_{-h_2}^{h_2} \rho_2 dz + \int_{h_2}^{h_p+h_2} \rho_p dz$$

$$\delta \Pi_s = \int_A \int_{-h_p-h_2}^{-h_2} (\sigma_a^p \delta \epsilon_c - \mathbf{D}_a \delta \mathbf{E}_a) dz dA$$

$$+ \int_A \int_{-h_p-h_2}^{-h_2} \sigma_c \delta \epsilon_c dz dA$$

$$+ \int_A \int_{h_2}^{h_p+h_2} (\sigma_s^p \delta \epsilon_c - \mathbf{D}_s \delta \mathbf{E}_s) dz dA$$

$$\delta \Pi_K = \int_A \int_{-h_p-h_2}^{-h_2} \rho_p (\dot{u} \delta u + \dot{v} \delta v + \dot{w} \delta w) dz dA$$

$$+ \int_A \int_{-h_2}^{h_2} \rho_2 (\dot{u} \delta u + \dot{v} \delta v + \dot{w} \delta w) dz dA$$

$$+ \int_A \int_{h_2}^{h_p+h_2} \rho_p (\dot{u} \delta u + \dot{v} \delta v + \dot{w} \delta w) dz dA$$

(الف-۷)

در این مرحله، با استفاده از روابط انرژی‌ها (الف-۷) با

توجه به معادلات تنش (الف-۲) و روابط الکتریکی

(الف-۳) مربوط به پیزوالکتریک در اصل همیلتون

، پس از انتگرال‌گیری در ابعاد زمان و مکان، در

نهایت به سیستم معادلات دینامیکی دست می‌یابیم.

معادلات حرکت برای پوسته استوانه‌ای ساندویچی

PZT در شکل نهایی همانطور که در رابطه‌ی (۵)

ارائه شده است که در آن پارامترهای

$a_{ij}, d_{ij}, E_{ij}, X_{ij}, I_1$ به صورت تعریف شده‌اند.

-
1. Love thin shell theory
 2. Love-Kirchhoff assumptions
 3. Donnell-Moshtari theory
 4. Frobenius method
 5. Discrete Analytical Method (DAM)
 6. Successive Approximation Method (SAM)
 7. Perfect bonded
 8. Navier's equation
 9. Biot theory
 10. Euler-Bernoulli
 11. Winkler-Pasternak foundation
 12. Lord-Shulman theory
 13. Functionally Graded Piezoelectric Material (FGPM)
 14. Proportional-Integral-Derivative
 15. First-order Shear Deformation Theory (FSDT)
 16. Hamilton's principle
 17. wave propagation matrix
 18. Integral of absolute error (IAE)
 19. Mathematica
 20. Integral of absolute radial displacement error
 21. pareto front
 22. trade-off