

ارتعاشات آزاد پنل و پوسته متصل گروهی استوانه‌ای به روش مربعات

دیفرانسیلی تعمیم یافته دو بعدی

نادیا معتضدیان

دانشجوی کارشناسی ارشد

دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

nadia97mtz@yahoo.com

علی اصغر جعفری*

استاد دانشکده مکانیک

دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

ajafari@kntu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۲۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۰۷

چکیده

در این پژوهش ارتعاشات آزاد پنل و پوسته‌های ایزوتروپیک متصل به هم گروهی-استوانه‌ای بررسی شده است. پوسته و پنل‌ها به ترتیب از دوران 360° و کمتر از 360° درجه یک منحنی حول محور تقارن مرکزی ایجاد می‌شوند. با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول^۱ که اثر تغییر شکل‌های برشی و اینرسی‌های دورانی را به خوبی مدل می‌کند، و با فرضیات سینماتیکی دائل^۲ و اصل همیلتون معادلات حرکت پنل‌ها استخراج شده‌اند. معادلات با روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته^۳ در هر دو جهت θ, x و θ, φ که به ترتیب مربوط به بخش‌های استوانه‌ای و گروهی هستند گسسته‌سازی شده‌اند. پس از معادل‌سازی مشتق‌های موجود در معادلات با یک بسط چندجمله‌ای با استفاده از روش بیان شده، دستگاه معادلات دیفرانسیلی به معادلات جبری تبدیل می‌شود. این روش قدرتمند می‌تواند شروط مرزی مختلف را مدل د و به دو سر پنل اعمال کند. در گام بعد فرکانس‌های طبیعی پوسته و پنل‌های ترکیبی گروهی-استوانه‌ای به دست آمده است و درستی پاسخ‌های استخراج شده با نرم‌افزار آباکوس و مقالات معتبر بررسی شده‌اند. در نهایت اثر پارامترهایی مانند ضخامت، طول بخش استوانه‌ای و شعاع بخش گروهی بر روی فرکانس‌های طبیعی مدل مورد نظر بررسی شده است.

واژگان کلیدی: ارتعاشات آزاد، پوسته متصل گروهی استوانه‌ای، پنل متصل گروهی استوانه‌ای، مربعات دیفرانسیلی

تعمیم یافته دو بعدی، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، شروط پیوستگی پوسته‌ها

۱. مقدمه

نمونه‌های متنوع از کاربرد پوسته‌ها و پنل‌ها در صنعت و مهندسی سازه است. ترکیب پوسته‌های مخروطی، گروهی و استوانه‌ای نقش بسیار مهمی در مخازن تحت فشار، زیردریایی‌ها، صنایع هوافضا مانند موشک‌ها دارند. پوسته‌های ترکیبی اعم از استوانه-کره، استوانه-مخروط و یا اشکال دیگر بحث‌های پیچیده مربوط به خود را دارند که

پوسته و پنل‌های دورانی استفاده بسیار گسترده‌ای در شاخه‌های مختلف مهندسی دارند که بهترین عملکرد را رفتارهای دینامیکی، مقاومت و پایداری دارند. زیردریایی‌ها، بدنه موشک‌ها، مخازن تحت فشار، برج‌های خنک‌کننده، مخازن ذخیره آب، سازه‌های گنبدی شکل و اجزا توربین‌ها،

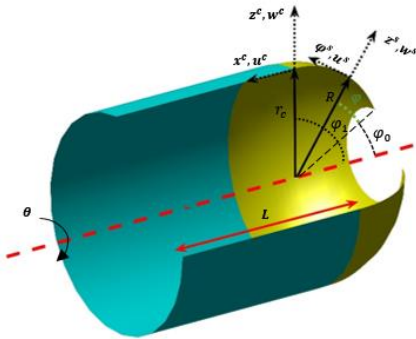
به صورت محدود توسط برخی محققین بررسی شده‌اند [۱]- [۴]. آیری و همکارانش [۵]، در سال ۱۹۸۳ با یک روش ابتکاری رفتار ارتعاشی پوسته‌های مخروطی-استوانه‌ای را بررسی کردند. آنها با استفاده از ماتریس انتقال پوسته، معادلات پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی را به دسته‌ای از معادلات دیفرانسیلی کوپل مرتبه اول تبدیل کردند. این ماتریس انتقال به راحتی توسط روش سری توانی بیان می‌شود و معادلات فرکانسی برای مجموعه‌ای از شرایط مرزی محاسبه می‌شود. لی و همکاران [۶] در سال ۲۰۰۲ اولین افرادی بودند که پوسته ترکیبی استوانه-کره را با شرایط مرزی مختلف بررسی کردند. برای استخراج معادلات حاکم بر سیستم، از تئوری فلوگه^۴ و روش انرژی ریلی استفاده کردند و با حل معادلات فرکانس با روش تحلیلی توانستند شکل مود و فرکانس های سیستم را استخراج کنند. در سال ۲۰۱۲ وو و همکارانش [۷-۸] با روش تجزیه میدان ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته مرکب مخروط-استوانه-کروی را در شرایط مرزی مختلف بررسی کردند. معادلات حاکم بر سیستم را با استفاده از تئوری نقدی-ریزنر-بری^۵ و روش انرژی استخراج کردند. سپس با استفاده از سری فوریه و چندجمله‌ای‌های متعامد چیبشوف^۶ معادلات را گسسته سازی و حل دقیق ارتعاشی سیستم را محاسبه کردند. در نهایت، نتایج حل دقیق ارتعاشی این سیستم مرکب را با حل روش‌های المان محدود مقایسه کردند. در سال ۲۰۱۳ یوسفزاد و بختیاری‌نژاد [۹] ارتعاشات آزاد پوسته مرکب استوانه-کره تقویت شده را با روش تحلیل مودال و شرط مرزی دو سر آزاد بررسی کردند. برای استخراج معادلات حاکم بر پوسته‌ها از تئوری فلوگه و روش انرژی ریلی استفاده کردند و در پایان تأثیر طول و کم عمقی پوسته استوانه‌ای بر ارتعاشات آزاد سیستم را بررسی کردند. وو و همکارانش [۱۰] ارتعاشات آزاد پوسته مرکب استوانه-کره با شرط مرزی بستر الاستیک را با در نظر گرفتن تئوری پوسته‌های نازک نقدی-ریزنر بررسی کردند. معادلات را با استفاده از سری فوریه و

چندجمله‌های متعامد چیبشوف گسسته‌سازی کردند. سپس با روش عددی حل را انجام دادند و نتایج را با خروجی‌های انسیس^۷ مقایسه کردند. لی و همکارانش [۱۱] در سال ۲۰۱۵ با استفاده از تئوری پوسته‌های نازک فلوگه و روش انرژی ریلی فرکانس‌های طبیعی پوسته مرکب استوانه-کره تقویب شده عمودی را با شروط مرزی تکیه‌گاه ساده در سر استوانه‌ای و آزاد در سر کروی پوسته به دست آوردند. خروجی‌ها را با نتایج حاصل از نرم‌افزار انسیس بررسی کردند و بعد از صحت‌سنجی حل خود، شروط مرزی مختلف را نیز بررسی کردند و تأثیر کم عمق بودن پوسته کروی و نسبت طول به شعاع پوسته استوانه‌ای بر رفتار ارتعاشات آزاد را بیان کردند. آنها دریافتند با افزایش نیم زاویه کره ϕ فرکانس طبیعی سیستم کم می‌شود. همچنین با افزایش نسبت طول به شعاع پوسته استوانه‌ای تأثیر نیم زاویه ϕ پوسته کروی بر فرکانس کاهش می‌یابد.

در سال ۲۰۱۶ سو و جین [۱۲] پوسته مرکب استوانه-کروی را با روش المان طیفی فوریه بررسی کردند. آنها برای تولید این المان پوسته جدید از تئوری برشی مرتبه اول استفاده کردند و با استفاده از همین المان، فرکانس‌های طبیعی پوسته مرکب استوانه-کروی را استخراج کردند. سال ۲۰۱۷ لی [۱۳] ارتعاش آزاد پوسته متصل استوانه‌ای کروی را با استفاده از ترکیب بسط‌های فوریه و چندجمله‌ای‌های چیبشوف برای بیان جابه‌جایی‌ها و فرض حاکم بودن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بررسی کرد. همچنین در این تحقیق لی تأثیر شرایط مرزی مختلف برای سیستم را بیان کرد. در همین سال ژو و چن [۱۴] با در نظر گرفتن تئوری پوسته نازک فلوگه یک روش نیمه‌تحلیلی را معرفی کردند که می‌توان با این روش ارتعاشات اجباری و آزاد پوسته‌ها را بررسی کرد. آنها با همین روش معرفی شده ارتعاشات آزاد و اجباری یک سیستم متشکل از یک پوسته مخروطی-استوانه‌ای-کروی را با شروط مرزی مختلف مرسوم بررسی کردند. کو و کانگ [۱۵] در سال ۲۰۱۹ با استفاده از روش

ریتز سه بعدی^۸ و چندجمله‌ای‌های لژاندر^۹ به جای چندجمله‌های جبری مقالات قبل توانستند فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مختلف یک سیستم متشکل از یک پوسته استوانه‌ای که از دو سمت با دو پوسته کرووی بسته شده و ضخامت متغیر دارد را محاسبه کنند. آنها دریافتند با افزایش درجه چندجمله‌ای لژاندر می‌توانند فرکانس طبیعی سیستم را به سمت مقدار واقعی همگرا کنند. البته همگرایی حاصل در مقاله آنها تا چهار رقم اعشار برای ۵ فرکانس اول است. در نهایت با مقایسه خروجی هایشان با دیگر مقالات دریافتند این روش برای پوسته‌های بسیار ضخیم و بسیار نازک قابل استفاده است. پانگ و همکارانش [۱۶] در ۲۰۱۹ به دنبال ابداع روش حل نیمه‌تحلیلی برای تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته مرکب کرووی-استوانه‌ای-کرووی با شرایط مرزی مختلف بودند. به دلیل پیچیدگی معادلات از تئوری پوسته‌های نازک فلوگه و روش انرژی استفاده کردند. همچنین توابع جابه‌جایی را با استفاده از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی تعمیم‌یافته و سری‌های فوریه نوشتند. سپس معادلات با مشتقات جزئی را به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کردند. سپس معادلات را با روش ریلی ریتز حل کردند و در نهایت خروجی‌های حل خود را با روش‌های المان محدود صحت‌سنجی کردند. در همین سال لی و همکارانش [۱۷] با استفاده از روش ریتز برای پوسته‌های مرکب کرووی-استوانه‌ای-کرووی با ضخامت متغیر حل نیمه‌تحلیلی ارائه دادند. تئوری مورد استفاده این مقاله تغییر شکل برشی مرتبه اول بوده است. هی و همکارانش [۱۸] در سال ۲۰۲۰ ارتعاشات آزاد پوسته‌های متصل استوانه‌ای-کرووی را با فرض تئوری دانل و روش تغییرات بررسی کردند. آنها برای بررسی ارتعاشات اجباری از روش نیومارک-بتا^{۱۰} استفاده کردند. این روش بسیار زود همگرا شده و همخوانی خوبی با دیگر مقالات داشته است. پانگ و همکارانش [۱۹] در سال ۲۰۲۱ با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و فرض تابع جابه‌جایی در راستاهای طولی و جانبی به صورت

چندجمله‌ای‌های ژاکوبی و سری فوریه یک روش تحلیلی برای بررسی ارتعاشات پوسته مرکب کامپوزیتی استوانه‌ای-کرووی معرفی کردند. آنها برای اعمال شروط پیوستگی و مرزی از روش پنالتی^{۱۱} بهره جستند. در همان سال باقری و همکاران [۲۰] با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی یک بعدی ارتعاشات آزاد پوسته ترکیبی کرووی مخروطی را با شرایط مرزی مختلف بررسی کردند. تئوری مورد استفاده در این پژوهش تغییر شکل برشی مرتبه اول بوده است. سپس در سال ۲۰۲۲ وانگ و همکارانش یک پوسته‌ی کرووی-استوانه‌ای-مخروطی چرخان را در قرار دادن در محیط گرمایی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مدل‌سازی کردند. آنها با ترکیب روش تجزیه میدان با روش پنالتی توانستند معادلات حاکم بر سیستم را حل و شروط مرزی مختلف را به پوسته مورد مطالعه اعمال کنند. در نهایت اثر نیروهای دمایی، پارامترهای هندسی و سرعت دوران پوسته بر روی فرکانس‌های طبیعی توسط آنها بررسی شد [۲۱]. در سال ۲۰۲۲ گائو و همکارانش با استفاده از تئوری FSDT ارتعاشات آزاد و اجباری یک پوسته مخروطی-استوانه‌ای-کرووی را با روش تجزیه میدان بررسی کردند. اتصال این پوسته‌ها در این روش به وسیله فنرها مدل‌سازی شده است. در نهایت با تأثیر شرایط مرزی و پارامترهای ابعادی بر روی پاسخ‌های سیستم توسط آنها مطالعه شد [۲۲]. در سال ۲۰۲۳ سبحانی و همکاران با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی یک بعدی پوسته نیم‌کرووی-استوانه‌ای که بر روی یک بستر الاستیک قرار گرفته است را مورد بررسی قرار دادند. اتصال این پوسته‌ها با قرار دادن فنرهای انتقالی و پیچشی بین دو پوسته برقرار شده است. در نهایت تأثیر شروط مرزی مختلف، اتصال نیمه‌صلب پوسته‌ها و جنس مختلف پوسته‌ها بر روی سیستم را بررسی کردند [۲۳]. روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته روشی بسیار کاربردی برای گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیلی مرتبه دوم در انواع پوسته‌ها است و می‌توان به وسیله این روش عددی، مشتقات



شکل ۱. شماتیکی از پوسته متصل کرووی-استوانه‌ای و دستگاه مختصات آنها

با توجه به ضخیم بودن پوسته‌ها، برای بررسی بهتر اثرات اینرسی‌های دورانی و تنش‌های برشی در ضخامت پنل و پوسته‌ها از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای استخراج معادلات حاکم بر سیستم استفاده شده است. با توجه به این تئوری، میدان جابه‌جایی در نقطه‌ای دلخواه از پنل استوانه‌ای و کرووی را می‌توان با استفاده از میزان جابه‌جایی لایه میانی پنل به صورت روابط ۱ تا ۳ در نظر گرفت [۲۴].

$$u^i(\xi_1, \xi_2, z, t) = u_0^i(\xi_1, \xi_2, t) + z\beta_1^i(\xi_1, \xi_2, t) \quad (۱)$$

$$v^i(\xi_1, \xi_2, z, t) = v_0^i(\xi_1, \xi_2, t) + z\beta_2^i(\xi_1, \xi_2, t) \quad (۳)$$

$$w^i(\xi_1, \xi_2, z, t) = w_0^i(\xi_1, \xi_2, t) \quad (۳)$$

در روابط فوق u ، v و w به ترتیب جابه‌جایی در جهات طولی شعاعی و در جهت ضخامت است. همچنین پایین‌نویس ۰ نشان‌دهنده جابه‌جایی در صفحه میانی است. بالا نویس i می‌تواند s یا c باشد که به ترتیب نشان‌دهنده پنل کرووی و استوانه‌ای است. ξ_1, ξ_2 در بخش کرووی به ترتیب θ, φ و در بخش استوانه‌ای x, θ است.

با توجه به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، کرنش‌ها در نقطه دلخواه از پنل استوانه یا کرووی را می‌توان با استفاده از کرنش‌های صفحه میانی و تغییرات انحناها به صورت رابطه ۴ در نظر گرفت.

مرتبه اول و دوم مکانی را در معادلات دیفرانسیلی حذف کرد. در روش‌های مرسوم مانند گلرکین عموماً بخش مکانی با توجه به شرط مرزی، مشخص می‌شود و با قرار دادن این تابع بخش مکانی، مشتقات مکانی معادلات حذف می‌شوند. با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی دو بعدی انواع شروط مرزی به هر دو سر پوسته یا پنل بدون داشتن تابع تابع مکان می‌تواند اعمال شود. همچنین با گسسته‌سازی معادلات در هر دو بعد می‌توان پنل‌ها را نیز مورد بررسی قرار داد که این مهم در روش مربعات دیفرانسیلی یک بعدی میسر نیست. همچنین این روش نسبت به بقیه روش‌ها مانند المان محدود علاوه بر دقت سرعت بسیار بالایی در همگرایی دارد که می‌تواند عاملی برای کاهش هزینه محاسبات عددی باشد. در این پژوهش از این روش برای بررسی ارتعاشات آزاد پوسته و پنل‌های کرووی استوانه‌ای متصل به هم با شرایط مرزی مختلف استفاده شده است.

۲. معادلات حاکم بر پنل و پوسته‌های متصل

در این پژوهش یک پنل متصل کرووی استوانه‌ای با جنس ماده ایزوتروپیک که ضخامت آن برابر با h است را در نظر می‌گیریم. طول پنل استوانه‌ای و شعاع بخش کرووی به ترتیب برابر با L و R است. زاویه بخش کرووی در جهت φ بین φ_0 تا φ_1 و در جهت θ بین θ_0 تا θ_1 است. شعاع بخش استوانه‌ای $r_c = R \sin \varphi_1$ که در شکل ۱ قابل مشاهده است. سیستم مختصات استوانه‌ای (x, θ, z) بر روی بخش استوانه‌ای و سیستم مختصات کرووی (φ, θ, z) در بخش کرووی استفاده شده است.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\varphi\varphi}^0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 \\ \gamma_{\varphi\theta}^0 \\ \gamma_{\varphi z}^0 \\ \gamma_{\theta z}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^i \\ \varepsilon_{22}^i \\ \gamma_{12}^i \\ \gamma_{13}^i \\ \gamma_{23}^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{i0} \\ \varepsilon_{22}^{i0} \\ \gamma_{12}^{i0} \\ \gamma_{13}^{i0} \\ \gamma_{23}^{i0} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \chi_{11}^i \\ \chi_{22}^i \\ \chi_{12}^i \\ \chi_{13}^i \\ \chi_{23}^i \end{Bmatrix} \quad (4)$$

همچنین مقادیر کرنش در صفحه میانی پوسته استوانه‌ای به فرم رابطه ۵ و تغییرات انحنا در پیل استوانه‌ای به فرم رابطه ۶ خواهد بود. کرنش صفحه میانی در پیل کروی به صورت رابطه ۷ و تغییرات انحنا در این پیل به صورت رابطه ۸ در نظر گرفته می‌شود.

$$= \begin{Bmatrix} \frac{u_{0,\varphi}}{R} + \frac{w_0}{R} \\ \frac{v_{0,\theta}}{R \sin(\varphi)} + \frac{u_0}{R} \cot(\varphi) + \frac{w_0}{R} \\ \frac{v_{0,\varphi}}{R} + \frac{u_{0,\theta}}{R \sin(\varphi)} - \frac{v_0}{R} \cot(\varphi) \\ \frac{w_{0,\varphi}}{R} + \beta_\varphi - \frac{u_0}{R} \\ \frac{w_{0,\theta}}{R \sin(\varphi)} - \frac{v_0}{R} + \beta_\theta \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{c0} \\ \varepsilon_{22}^{c0} \\ \gamma_{12}^{c0} \\ \gamma_{13}^{c0} \\ \gamma_{23}^{c0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{\theta z}^0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \chi_{\varphi\varphi} \\ \chi_{\theta\theta} \\ \chi_{\varphi\theta} \\ \chi_{\varphi z} \\ \chi_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\beta_{\varphi,\varphi}}{R} \\ \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R \sin(\varphi)} + \frac{\beta_\varphi}{R} \cot(\varphi) \\ \frac{\beta_{\theta,\varphi}}{R} + \frac{\beta_{\varphi,\theta}}{R \sin(\varphi)} - \frac{\beta_\theta}{R} \cot(\varphi) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{u_{0,x}}{R} + \frac{w_0}{R} \\ \frac{v_{0,\theta}}{R} + v_{0,x} \\ \frac{u_{0,\theta}}{R} + v_{0,x} \\ w_{0,x} + \beta_x \\ \frac{w_{0,\theta}}{R} - \frac{v_0}{R} + \beta_\theta \end{Bmatrix} \quad (5)$$

در روابط ذکر شده $(\cdot)_{,\varphi}$, $(\cdot)_{,\theta}$, $(\cdot)_{,x}$ به ترتیب بیانگر مشتق نسبت به متغیرهای مستقل φ , θ , x هستند. در مواد الاستیک خطی، رابطه بین تنش و کرنش مطابق رابطه ۹ فرمول‌بندی می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \chi_{11}^c \\ \chi_{22}^c \\ \chi_{12}^c \\ \chi_{13}^c \\ \chi_{23}^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{\theta\theta} \\ \chi_{x\theta} \\ \chi_{xz} \\ \chi_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} \\ \frac{\beta_{x,\theta}}{R} + \beta_{\theta,x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^i \\ \sigma_{22}^i \\ \tau_{12}^i \\ \tau_{13}^i \\ \tau_{23}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^i \\ \varepsilon_{22}^i \\ \gamma_{12}^i \\ \gamma_{13}^i \\ \gamma_{23}^i \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} M_{11}^i \\ M_{22}^i \\ M_{12}^i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^{i0} \\ \varepsilon_{22}^{i0} \\ \gamma_{12}^{i0} \\ \chi_{11}^i \\ \chi_{22}^i \\ \chi_{12}^i \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{13}^i \\ Q_{23}^i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa A_{44} & 0 \\ 0 & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{13}^{i0} \\ \gamma_{23}^{i0} \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \\ D_{ij} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{pmatrix} C_{ij} \\ z C_{ij} \\ z^2 C_{ij} \end{pmatrix} dz$$

در ادامه برای استخراج معادلات، از اصل همیلتون استفاده می‌کنیم که مطابق رابطه ۱۸ است که در آن K و U به ترتیب بیانگر انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم هستند. روابط انرژی جنبشی و پتانسیل به ترتیب در روابط ۱۹ و ۲۰ ارائه شده است. در رابطه انرژی جنبشی ($\dot{}$) نشان دهنده مشتق نسبت به زمان است.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K^i - U^i) dt = 0 \quad (18)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta K^i dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint \rho (\dot{u}^i \delta \dot{u}^i + \dot{v}^i \delta \dot{v}^i + \dot{w}^i \delta \dot{w}^i + \dot{\beta}_1^i \delta \dot{\beta}_1^i + \dot{\beta}_2^i \delta \dot{\beta}_2^i) dV dt = 0 \quad (19)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U^i dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint (\sigma_{11}^i \delta \varepsilon_{11}^i + \sigma_{22}^i \delta \varepsilon_{22}^i + \tau_{12}^i \delta \gamma_{12}^i + \tau_{13}^i \delta \gamma_{13}^i + \tau_{23}^i \delta \gamma_{23}^i) dV dt = 0 \quad (20)$$

با محاسبه انتگرال‌های فوق، معادلات حاکم بر سیستم برای پیل استوانه‌ای به صورت روابط ۲۱ تا ۲۵ خواهد بود.

$$N_{xx,x}^c + \frac{N_{x\theta,\theta}^c}{R} = I_1 \ddot{u}_0^c + I_2 \ddot{\beta}_x^c \quad (21)$$

$$\frac{N_{\theta\theta,\theta}^c}{R} + N_{x\theta,x}^c + \frac{Q_{\theta z}^c}{R} = I_1 \ddot{v}_0^c + I_2 \ddot{\beta}_\theta^c \quad (22)$$

$$Q_{xz,x}^c + \frac{Q_{\theta z,\theta}^c}{R} - \frac{N_{\theta\theta}^c}{R} = I_1 \ddot{w}_0^c \quad (23)$$

مقادیر C_{ij} ضرایب سفتی کاهش یافته هستند که به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (10)$$

$$C_{12} = \frac{E\nu}{1 - \nu^2} \quad (11)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (12)$$

در ادامه برای استخراج معادلات از اصل همیلتون استفاده می‌شود. همچنین منته‌های تنش به فرم معادلات ۱۳ تا ۱۵ محاسبه خواهند شد. در رابطه ۱۵، κ ضریب تصحیح برشی است که مقدار آن برابر با نسبت ۵/۶ در نظر گرفته می‌شود.

با قرار دادن روابط ۴ الی ۸ در رابطه ۹ و سپس با جای‌گذاری رابطه ۹ در رابطه ۱۳ تا ۱۵، منته‌های تنش، قابل محاسبه خواهند بود و نتایج آن به فرم رابطه ۱۶ خواهد شد. همچنین در معادله مذکور ضرایب ثابت A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} مطابق رابطه ۱۷ به کمک ضرایب ماتریس سفتی محاسبه می‌شوند.

$$\begin{pmatrix} M_{11}^i \\ M_{22}^i \\ M_{12}^i \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} z \begin{pmatrix} \sigma_{11}^i \\ \sigma_{22}^i \\ \tau_{12}^i \end{pmatrix} dz \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} N_{11}^i \\ N_{22}^i \\ N_{12}^i \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{11}^i \\ \sigma_{22}^i \\ \tau_{12}^i \end{pmatrix} dz \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{13}^i \\ Q_{23}^i \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \kappa \begin{pmatrix} \tau_{13}^i \\ \tau_{23}^i \end{pmatrix} dz$$

$$\begin{pmatrix} N_{11}^i \\ N_{22}^i \\ N_{12}^i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} & 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^{i0} \\ \varepsilon_{22}^{i0} \\ \gamma_{12}^{i0} \\ \chi_{11}^i \\ \chi_{22}^i \\ \chi_{12}^i \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 u_0 = v_0 = w_0 = \beta_\varphi = \beta_\theta = 0 \\
 \varphi = \varphi_0 \text{ یا } \varphi = \varphi_1, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \\
 u_0 = v_0 = w_0 = \beta_\varphi = \beta_\theta = 0
 \end{aligned} \quad (33)$$

شرط مرزی تکیه‌گاه ساده (C) در پِنل کروی:

$$\theta = \theta_0 \text{ یا } \theta = \theta_1, \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \quad (34)$$

$$u_0 = v_0 = w_0 = \beta_\varphi = 0, M_{\theta\theta} = 0$$

$$\varphi = \varphi_0 \text{ یا } \varphi = \varphi_1, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \quad (35)$$

$$u_0 = v_0 = w_0 = \beta_\theta = 0, M_{\varphi\varphi} = 0$$

شرط مرزی آزاد (F) در پِنل کروی:

$$\begin{aligned}
 \theta = \theta_0 \text{ یا } \theta = \theta_1, \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \\
 N_{\theta\theta} = N_{\varphi\theta} = M_{\theta\theta} = M_{\varphi\theta} = Q_{\theta z} \\
 = 0
 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi = \varphi_0 \text{ یا } \varphi = \varphi_1, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \\
 N_{\varphi\varphi} = N_{\varphi\theta} = M_{\varphi\varphi} = M_{\varphi\theta} = Q_{\varphi z} \\
 = 0
 \end{aligned} \quad (37)$$

شرط مرزی گیردار (C) در پِنل استوانه‌ای:

$$\theta = \theta_0 \text{ یا } \theta = \theta_1, 0 \leq x \leq L \quad (38)$$

$$u_0 = v_0 = w_0 = \beta_x = \beta_\theta = 0$$

$$x = 0 \text{ یا } x = L, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \quad (39)$$

$$u_0 = v_0 = w_0 = \beta_x = \beta_\theta = 0$$

شرط مرزی تکیه‌گاه ساده (S) در پِنل استوانه‌ای:

$$\theta = \theta_0 \text{ یا } \theta = \theta_1, 0 \leq x \leq L \quad (40)$$

$$u_0 = v_0 = w_0 = \beta_x = 0, M_{\theta\theta} = 0$$

$$x = 0 \text{ یا } x = L, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \quad (41)$$

$$u_0 = v_0 = w_0 = \beta_\theta = 0, M_{xx} = 0$$

شرط مرزی آزاد (F) در پِنل استوانه‌ای:

$$\theta = \theta_0 \text{ یا } \theta = \theta_1, 0 \leq x \leq L \quad (42)$$

$$N_{\theta\theta} = N_{x\theta} = M_{\theta\theta} = M_{x\theta} = Q_{\theta z} \\
 = 0$$

$$x = 0 \text{ یا } x = L, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
 M_{xx,x}^c + \frac{M_{x\theta,\theta}^c}{R} - Q_{xz}^c \\
 = I_2 \ddot{u}_0^c + I_3 \ddot{\beta}_x^c
 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{M_{\theta\theta,\theta}^c}{R} + M_{x\theta,x}^c - Q_{\theta z}^c \\
 = I_2 \ddot{v}_0^c + I_3 \ddot{\beta}_\theta^c
 \end{aligned} \quad (25)$$

معادلات حاکم برای پِنل کروی به صورت روابط ۲۶ تا ۳۰ خواهد بود.

$$\begin{aligned}
 \frac{N_{\varphi\varphi,\varphi}^s}{R} + \frac{N_{\varphi\theta,\theta}^s}{R \sin(\varphi)} + \frac{N_{\varphi\varphi}^s - N_{\theta\theta}^s}{R} \cot(\varphi) \\
 + \frac{Q_{\varphi z}^s}{R} = I_1 \ddot{u}_0^s + I_2 \ddot{\beta}_\varphi^s
 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{N_{\theta\theta,\theta}^s}{R \sin(\varphi)} + \frac{N_{\varphi\theta,\varphi}^s}{R} + 2 \frac{N_{\varphi\theta}^s}{R} \cot(\varphi) \\
 + \frac{Q_{\theta z}^s}{R} = I_1 \ddot{v}_0^s + I_2 \ddot{\beta}_\theta^s
 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{Q_{\varphi z,\varphi}^s}{R} + \frac{Q_{\theta z,\theta}^s}{R \sin(\varphi)} - \frac{N_{\varphi\varphi}^s + N_{\theta\theta}^s}{R} \\
 + \frac{Q_{\varphi z}^s}{R} \cot(\varphi) = I_1 \ddot{w}_0^s
 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{M_{\varphi\varphi,\varphi}^s}{R} + \frac{M_{\varphi\theta,\theta}^s}{R \sin(\varphi)} \\
 + \frac{M_{\varphi\varphi}^s - M_{\theta\theta}^s}{R} \cot(\varphi) - Q_{\varphi z}^s \\
 = I_2 \ddot{u}_0^s + I_3 \ddot{\beta}_\varphi^s
 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{M_{\theta\theta,\theta}^s}{R \sin(\varphi)} + \frac{M_{\varphi\theta,\varphi}^s}{R} + 2 \frac{M_{\varphi\theta}^s}{R} \cot(\varphi) \\
 - Q_{\theta z}^s \\
 = I_2 \ddot{v}_0^s + I_3 \ddot{\beta}_\theta^s
 \end{aligned} \quad (30)$$

در روابط معادلات حاکم مقادیر اینرسی به صورت زیر محاسبه خواهد شد.

$$\begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \rho \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \quad (31)$$

۳. شرایط مرزی و پیوستگی

در چهار لبه پِنل‌ها می‌توان هر یک از ۳ نوع شرط مرزی گیردار، تکیه‌گاه ساده و آزاد را مشاهده کرد که روابط ریاضیاتی آن به صورت تعریف خواهد شد.

$$\theta = \theta_0 \text{ یا } \theta = \theta_1, \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \quad (32)$$

اعمال شروط مرزی ذکر شده باید از شروط سازگاری که در ادامه آمده‌اند استفاده نمود. شروط سازگاری در پوسته کروی با فرض $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
 u_0^s(\varphi, 0, t) &= u_0^s(\varphi, 2\pi, t) \\
 v_0^s(\varphi, 0, t) &= v_0^s(\varphi, 2\pi, t) \\
 w_0^s(\varphi, 0, t) &= w_0^s(\varphi, 2\pi, t) \\
 \beta_\varphi^s(\varphi, 0, t) &= \beta_\varphi^s(\varphi, 2\pi, t) \\
 \beta_\theta^s(\varphi, 0, t) &= \beta_\theta^s(\varphi, 2\pi, t) \\
 N_{\varphi\varphi}^s(\varphi, 0, t) &= N_{\varphi\varphi}^s(\varphi, 2\pi, t) \\
 N_{\varphi\theta}^s(\varphi, 0, t) &= N_{\varphi\theta}^s(\varphi, 2\pi, t) \\
 M_{\varphi\varphi}^s(\varphi, 0, t) &= M_{\varphi\varphi}^s(\varphi, 2\pi, t) \\
 M_{\varphi\theta}^s(\varphi, 0, t) &= M_{\varphi\theta}^s(\varphi, 2\pi, t) \\
 Q_{\varphi z}^s(\varphi, 0, t) &= Q_{\varphi z}^s(\varphi, 2\pi, t)
 \end{aligned} \quad (46)$$

همچنین شروط سازگاری در پوسته استوانه‌ای با فرض $0 \leq x \leq L$ به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
 u_0^c(\varphi, 0, t) &= u_0^c(\varphi, 2\pi, t) \\
 v_0^c(\varphi, 0, t) &= v_0^c(\varphi, 2\pi, t) \\
 w_0^c(\varphi, 0, t) &= w_0^c(\varphi, 2\pi, t) \\
 \beta_x^c(\varphi, 0, t) &= \beta_x^c(\varphi, 2\pi, t) \\
 \beta_\theta^c(\varphi, 0, t) &= \beta_\theta^c(\varphi, 2\pi, t) \\
 N_{xx}^c(\varphi, 0, t) &= N_{xx}^c(\varphi, 2\pi, t) \\
 N_{x\theta}^c(\varphi, 0, t) &= N_{x\theta}^c(\varphi, 2\pi, t) \\
 M_{xx}^c(\varphi, 0, t) &= M_{xx}^c(\varphi, 2\pi, t) \\
 M_{x\theta}^c(\varphi, 0, t) &= M_{x\theta}^c(\varphi, 2\pi, t) \\
 Q_{xz}^c(\varphi, 0, t) &= Q_{xz}^c(\varphi, 2\pi, t)
 \end{aligned} \quad (47)$$

۴. روش حل

به کمک روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته می‌توان مشتقات مکانی موجود در معادلات حاکم و شرایط مرزی را به بسط چندجمله‌ای تبدیل کرد. این بسط برحسب جابه‌جایی‌های سیستم نوشته می‌شود. به عبارتی معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر مسئله به یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل خواهد شد. سپس با هارمونیک فرض کردن بخش زمانی آن، دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی به دستگاه معادلات جبری برحسب فرکانس طبیعی سیستم تبدیل می‌شود. این روش اولین بار توسط شو [۲۵] توسعه داده شد. با استفاده از این روش، معادلات حرکت دیفرانسیلی حاکم بر سیستم که در روابط ۲۱ تا ۳۰ بیان

$$\begin{aligned}
 N_{xx} &= N_{x\theta} = M_{xx} = M_{x\theta} = Q_{xz} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

در مرز اتصال دو پنل ۵ شرط پیوستگی جابه‌جایی و ۵ شرط پیوستگی متجه‌های نیرو و ممان باید ارضا شوند که روابط ریاضی آن به صورت زیر خواهد بود.

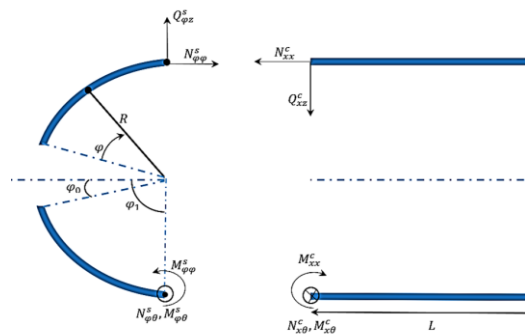
۵ شرط جابجایی:

$$\begin{aligned}
 u_0^s \sin(\varphi_1) - w_0^s \cos(\varphi_1) &= u_0^c \\
 u_0^s \cos(\varphi_1) - w_0^s \sin(\varphi_1) &= w_0^c \\
 v_0^s &= v_0^c \\
 \beta_\varphi^s &= \beta_\varphi^c \\
 \beta_\theta^s &= \beta_\theta^c
 \end{aligned} \quad (44)$$

۵ شرط متجه نیرو و ممان‌ها:

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi\varphi}^s \sin(\varphi_1) - Q_{\varphi z}^s \cos(\varphi_1) &= N_{xx}^c \\
 N_{\varphi\varphi}^s \cos(\varphi_1) + Q_{\varphi z}^s \sin(\varphi_1) &= Q_{xz}^c \\
 M_{\varphi\varphi}^s &= M_{xx}^c \\
 N_{\varphi\theta}^s &= N_{x\theta}^c \\
 M_{\varphi\theta}^s &= M_{x\theta}^c
 \end{aligned} \quad (45)$$

تصویر نحوه اتصال پنل‌ها و پیوستگی نیرو و ممان‌ها در شکل ۲ قابل مشاهده است.



شکل ۲. شماتیکی از شرایط پیوستگی نیرو و ممان‌های پوسته کروی-استوانه‌ای

علاوه بر شرایط مرزی که در لبه‌های پنل‌ها قابل تعریف هستند در صورتی که پنل‌ها به صورت پوسته بسته باشند و لبه‌های $\theta = 2\pi$ و $\theta = 0$ روی هم قرار گیرند به جای

شده‌اند، تبدیل به معادلات جبری به فرم رابطه ۵۷ می‌شوند. نخست برای حل به کمک این روش، بازه متغیرهای مستقلی که مشتق برحسب آنها است را شبکه بندی می‌کنیم. سپس به‌وسیله نقاط به‌دست آمده، ضرایب وزنی مورد نیاز برای آن را محاسبه می‌کنیم. بهترین روش شبکه‌بندی بازه متغیرها، که در این پژوهش نیز استفاده شده است، چبیشف-گوس-لوباتو^{۱۲} نام دارد. فرمول آن به فرم رابطه ۴۸ تعریف خواهد شد.

$$r_i = \frac{1 - \cos\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right)}{2}, i = 1, 2, \dots, N. \quad (48)$$

در صورت وجود تابع $\Phi(x, y)$ که دارای متغیرهای مستقل x و y است با توجه به روش GDQ به ترتیب مشتق مرتبه m نسبت به x و مشتق مرتبه m نسبت به y به صورت روابط ۴۹ و ۵۰ تعریف خواهد شد. مشتق ترکیبی نسبت به x و y نیز به صورت رابطه ۵۱ تعریف خواهد شد.

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \Phi(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(n)} \Phi_{kj} ; i = 1, 2, 3, \dots, N_x ; j = 1, 2, 3, \dots, N_y \quad (49)$$

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m} \Phi(x_i, y_j) = \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(m)} \Phi_{il} ; i = 1, 2, 3, \dots, N_x ; j = 1, 2, 3, \dots, N_y \quad (50)$$

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial y^m \partial x^n} \Phi(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(n)} \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(m)} \Phi_{kl} ; i = 1, 2, 3, \dots, N_x ; j = 1, 2, 3, \dots, N_y \quad (51)$$

در معادلات بالا $A_{ik}^{(n)}$ و $B_{jl}^{(m)}$ ضرایب وزنی روش GDQ هستند. برای محاسبه این ضرایب وزنی همان‌طور که پیش‌تر گفته شد نیاز است که دامنه تابع مورد نظر گره‌گذاری شود.

جهات x و y را با استفاده از رابطه ۴۸ به صورت روابط ۵۲ و ۵۳ گره‌بندی می‌کنیم:

$$x_i = \frac{1 - \cos\left(\frac{i-1}{N_x-1}\pi\right)}{2}, i = 1, 2, \dots, N_x. \quad (52)$$

$$y_j = \frac{1 - \cos\left(\frac{j-1}{N_y-1}\pi\right)}{2}, j = 1, 2, \dots, N_y. \quad (53)$$

ماتریس‌های ضرایب وزنی GDQ با معادلات ۵۴ و ۵۶ تعریف می‌شوند:

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{L^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)L^{(1)}(x_j)}, i, j = 1, 2, \dots, N_x \text{ and } i \neq j. \quad (54)$$

$$L^{(1)}(x_j) = \prod_{i=1, i \neq j}^{N_x} (x_j - x_i) \quad (55)$$

$$B_{ij}^{(1)} = \frac{G^{(1)}(y_i)}{(y_i - y_j)G^{(1)}(y_j)}, i, j = 1, 2, \dots, N_y \text{ and } i \neq j. \quad (56)$$

$$G^{(1)}(y_j) = \prod_{i=1, i \neq j}^{N_y} (y_j - y_i) \quad (57)$$

در ماتریس‌های ضرایب درایه‌های قطری به صورت روابط ۵۸ و ۵۹ تعریف می‌شوند:

$$\sum_{j=1}^{N_x} A_{ij}^{(1)} = 0 \Rightarrow A_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_x} A_{ij}^{(1)}, i, j = 1, 2, \dots, N_x \quad (58)$$

$$\sum_{j=1}^{N_y} B_{ij}^{(1)} = 0 \Rightarrow B_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_y} B_{ij}^{(1)}, i, j = 1, 2, \dots, N_y \quad (59)$$

مشتقات مراتب بالاتر در روش مربعات دیفرانسیلی به صورت زیر خواهد بود:

$$[A^{(n)}] = [A^{(1)}][A^{(n-1)}] \quad (60)$$

$$[B^{(m)}] = [B^{(1)}][B^{(m-1)}] \quad (61)$$

۵. حل عددی

با توجه به معادلات حاکم بر مسئله، برای از بین بردن مشتق‌های زمانی در معادلات ۲۱ تا ۳۰ جابه‌جایی‌های بخش کروی را به فرم روابط ۶۲

$$\begin{aligned} u &= U(\varphi, \theta)e^{i\omega t} \\ v &= V(\varphi, \theta)e^{i\omega t} \\ w &= W(\varphi, \theta)e^{i\omega t} \\ \beta_\varphi &= B_\varphi(\varphi, \theta)e^{i\omega t} \\ \beta_\theta &= B_\theta(\varphi, \theta)e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (62)$$

و برای بخش استوانه‌ای جابه‌جایی‌ها به فرم روابط ۶۳ در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} u &= U(x, \theta)e^{i\omega t} \\ v &= V(x, \theta)e^{i\omega t} \\ w &= W(x, \theta)e^{i\omega t} \\ \beta_x &= B_x(x, \theta)e^{i\omega t} \\ \beta_\theta &= B_\theta(x, \theta)e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (63)$$

که مشتقات مرتبه اول و دوم مکانی معادلات روی بخش‌های $U, V, W, B_\varphi, B_\theta, B_x$ اعمال می‌شوند. سپس با استفاده از توابع وزنی حاصل از روش مربعات دیفرانسیلی می‌توان مشتق‌های مکانی را در راستاهای مختلف گسسته‌سازی کرد. پس از گسسته‌سازی مشتق‌های مذکور، معادلات دیفرانسیلی سیستم به حالت یک دستگاه معادلات جبری به فرم رابطه ۶۴ تبدیل خواهد شد.

$$K\Delta = \omega^2 M\Delta \quad (64)$$

در رابطه ۶۴، K و M به ترتیب بیانگر ماتریس سفتی سیستم و ماتریس جرم سیستم، همچنین ω^2 مجذور فرکانس‌های طبیعی سیستم هستند. ابعاد ماتریس‌های مربعی جرم و سفتی $10N^2$ خواهد بود که N معرف تعداد نقاط در هر یک از

جهات φ, x و θ است. همچنین در رابطه ۶۴، Δ بیانگر بردار جابه‌جایی در سیستم که شامل متغیرهای مستقل $U^s, V^s, W^s, \beta_\varphi^s, \beta_\theta^s$ در بخش کروی و $U^c, V^c, W^c, \beta_x^c, \beta_\theta^c$ در بخش استوانه‌ای است. به‌طور کلی ابعاد بردار Δ برابر $10N^2$ با درایه است. پس از برقراری معادله بالا می‌توان مسئله مقدار ویژه را در نرم‌افزار متلب^{۱۳} حل نمود و فرکانس‌های طبیعی سیستم را به دست آورد. از آنجایی که در شرایط مرزی، پیوستگی و سازگاری ترم‌های مربوط به ماتریس جرم (M) وجود ندارند در صورت اعمال این شروط به صورت مستقیم، سیستم حالت تکین^{۱۴} خواهد شد که پاسخ‌های مسئله مقدار ویژه را غیردقیق خواهد کرد. برای رفع این مشکل، می‌توان معادلات کل سیستم را پس از گسسته‌سازی به فرم رابطه ۶۵ بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bd} \\ K_{db} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_b \\ \Delta_d \end{bmatrix} \\ = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_b \\ \Delta_d \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (65)$$

در ماتریس و بردارهای بالا زیرنویس‌های b و d به ترتیب نشان‌دهنده نقاط مرزی و داخلی سیستم هستند. به نقاط مرزی شروط مرزی یا پیوستگی یا سازگاری گسسته شده و به نقاط داخلی معادلات گسسته شده اعمال می‌شود. با جداسازی معادلات مرزی و داخلی سیستم، مسئله مقدار ویژه به صورت رابطه ۶۶ خواهد شد.

$$\begin{aligned} (K_{dd} - K_{db}(K_{bb})^{-1}K_{bd})\Delta_d \\ = \omega^2 M_{dd}\Delta_d \end{aligned} \quad (66)$$

در نتیجه فرکانس‌های طبیعی سازه با صفر در نظر گرفتن رابطه ۶۷ قابل محاسبه خواهد بود.

$$|(K_{dd} - K_{db}(K_{bb})^{-1}K_{bd}) - \omega^2 M_{dd}| \quad (67)$$

۶. نتایج عددی و صحت‌سنجی

تحقیق حاضر ارتعاشات آزاد پنل و پوسته‌ی کروی-استوانه‌ای متصل به هم با جنس ایزوتروپیک را بررسی می‌کند. نخست با استفاده از نتایج مراجع [27-26] و

نرم افزار آباکوس^{۱۵} درستی مدل سازی تحقیق حاضر صحت سنجی شده است. در جدول ۱، ویژگی های مکانیکی در نظر گرفته شده برای استخراج نتایج ارائه شده است.

جدول ۱. مشخصات مکانیکی مرتبط با پنل و پوسته مورد تحلیل

خواص	واحد	مقدار
چگالی جرمی	kg/m ³	۷۸۰۰
مدول یانگ	GPa	۲۱۰
ضریب پواسون	-	۰/۳

همچنین مشخصه های هندسی پنل های مورد بررسی در پژوهش به صورت زیر تعریف شده است.

پنل نیم کروی:

$$\theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = 120^\circ \quad (68)$$

$$\varphi_0 = 30^\circ, \varphi_1 = 90^\circ$$

پنل استوانه ای:

$$\theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = 120^\circ \quad (69)$$

پوسته نیم کروی:

$$\theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = 360^\circ \quad (70)$$

$$\varphi_0 = 30^\circ, \varphi_1 = 90^\circ$$

پوسته استوانه ای:

$$\theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = 360^\circ \quad (71)$$

پنل نیم کره-استوانه:

$$\theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = 120^\circ \quad (72)$$

$$\varphi_0 = 30^\circ, \varphi_1 = 90^\circ$$

پوسته نیم کره-استوانه:

$$\theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = 360^\circ \quad (73)$$

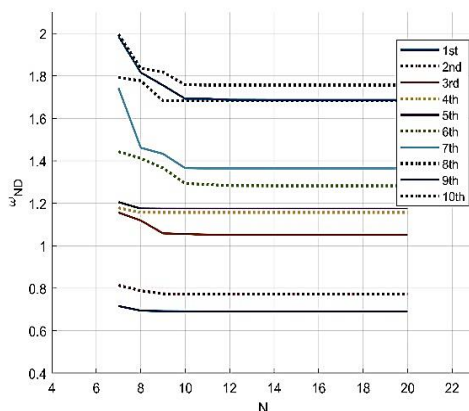
$$\varphi_0 = 30^\circ, \varphi_1 = 90^\circ$$

نخست برای تحلیل ارتعاشات آزاد سازه های مذکور به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته، نیاز است که همگرایی تعداد نقاط در نظر گرفته شده را مورد بررسی قرار داد. از این رو در شکل های ۳ تا ۷ نمودار همگرایی ۱۰ فرکانس اول برای حالت های مختلف ارائه شده است. شرط مرزی در نظر گرفته

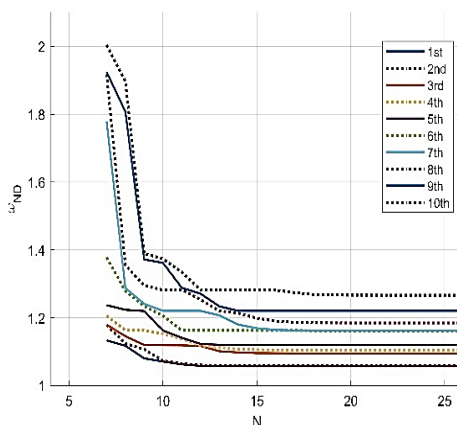
شده برای آنها تمام گیردار بوده است. در این نتایج مقدار فرکانس بی بعد به کمک رابطه ۷۴ محاسبه شده است که در آن E ، ρ و ν به ترتیب بیانگر مدول یانگ، چگالی و ضریب پواسون سازه هستند.

همان طور که از نتایج به دست آمده قابل مشاهده است، پس از افزایش تعداد نقاط، مقادیر فرکانس ثابت مانده و به خوبی همگرا شده است. حال به صحت سنجی مقادیر فرکانس استخراج شده پرداخته خواهد شد. از این رو در جداول ۲ تا ۶ مقادیر فرکانس به دست آمده به کمک روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته، با نرم افزار آباکوس و مراجع [۲۶-۲۷] صحت سنجی شده است.

$$\omega_{ND} = \omega R \sqrt{\rho(1 - \nu^2)/E} \quad (74)$$

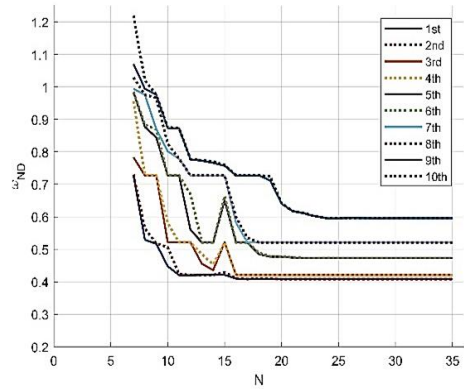


شکل ۳. نمودار همگرایی پنل استوانه ای به طول ۳، شعاع ۲ و ضخامت ۰/۲



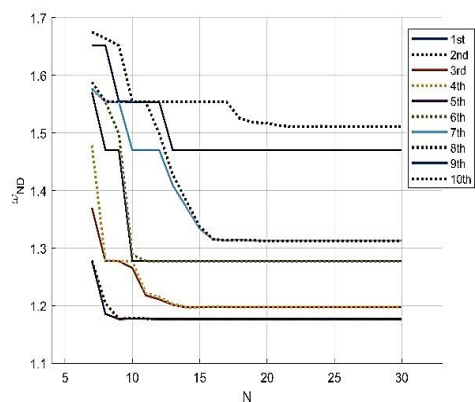
شکل ۴. نمودار همگرایی پنل کروی به شعاع ۲ و ضخامت ۰/۱

میزان 0.005 انتخاب شده است. در نهایت با انتخاب حلگر Frequency از بخش Linear perturbation می‌توان فرکانس‌های طبیعی پوسته ترکیبی کروی-استوانه‌ای را به دست آورد. قابل ذکر است در این پژوهش، مقادیر شعاع و ضخامت به ترتیب برابر با 1 و 0.1 متر و طول پوسته استوانه‌ای برابر با 2 متر فرض شده است.



شکل ۵. نمودار همگرایی پوسته استوانه‌ای به طول ۳، شعاع ۲ و ضخامت 0.1

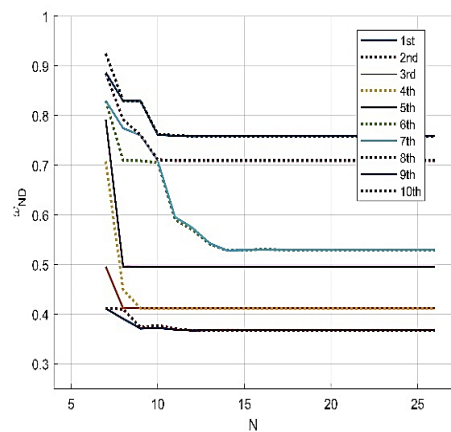
همان‌طور که از جداول ۲ تا ۶ قابل مشاهده است، نتایج به دست آمده به کمک روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته و شبیه‌ساز آباکوس تطابق بسیار خوبی با نتایج مرجع ذکر شده دارند. بنابراین معادلات حاکم و همچنین پیاده‌سازی روش مورد استفاده به درستی انجام شده است.



شکل ۶. نمودار همگرایی پوسته کروی به شعاع ۲ و ضخامت 0.2

جدول ۲. فرکانس طبیعی پیل استوانه‌ای تحت شرط مرزی C-F-F (برحسب هرترز)

شماره مود	تحقیق حاضر	آباکوس	[۲۶]
۱	۵۸/۶۴	۵۹/۰۳۵	۵۸/۳۲
۲	۹۰/۹۸	۹۲/۰۲۲	۹۸/۶۲
۳	۱۴۶/۰۱	۱۴۵/۰۲	۱۴۶/۳۵
۴	۲۳۱/۰۵	۲۳۲/۸	۲۳۰/۷۲
۵	۲۶۴/۰۰	۲۶۶/۶۳	۲۶۳/۶۳
۶	۲۷۸/۸۴	۲۷۹/۱۲	۲۷۸/۵۶
۷	۳۳۹/۵۶	۳۳۹/۹۸	۳۳۹/۴۳
۸	۴۳۰/۵۲	۴۲۷/۹۱	۴۳۰/۸۱
۹	۴۸۹/۱۱	۴۸۹/۴۶	۴۸۹/۲۶
۱۰	۵۱۱/۱۳	۵۱۳/۹	۵۱۱/۳



شکل ۷. نمودار همگرایی پوسته کروی-استوانه‌ای به طول ۲، شعاع ۱ و ضخامت 0.2

جدول ۳. فرکانس طبیعی پیل کروی تحت شرط مرزی C-C-F-F (برحسب هرترز)

شماره مود	تحقیق حاضر	آباکوس	[۲۷]
۱	۳۲۸/۲۴	۳۲۸/۰۹	۳۲۷/۰۰
۲	۴۶۰/۳۷	۴۶۰/۲۸	۴۵۸/۷۹
۳	۷۰۷/۸۳	۷۰۷/۵۳	۷۰۶/۳۷
۴	۸۸۶/۷۵	۸۸۶/۵۰	۸۸۵/۰۰
۵	۱۰۴۳/۳	۱۰۴۸/۱۸	۱۰۴۷/۵۷
۶	۱۲۷۳/۸	۱۲۷۳/۴۳	۱۲۷۲/۵۹

در مدل‌سازی با نرم‌افزار آباکوس از المان پوسته (Shell) هشت گرهی به نام S8R استفاده شده است. اندازه المان در این مدل‌سازی پس از بررسی‌های همگرایی گره‌بندی‌ها به

۳۶۹/۴۱۰	۳۶۹/۷۸۵	۳۶۹/۳۳۷	۱
۳۶۹/۴۱۰	۳۶۹/۷۸۵	۳۶۹/۳۳۷	۲
۵۸۱/۹۱۰	۵۸۱/۹۶۵	۵۸۱/۹۰۶	۳
۵۸۱/۱۰۰	۵۸۱/۹۶۵	۵۸۱/۹۰۶	۴
۶۲۸/۵۷۰	۶۲۹/۷۷۳	۶۲۸/۵۶۹	۵
۶۲۸/۵۷۰	۶۲۹/۷۷۳	۶۲۸/۵۶۹	۶
۸۱۱/۰۷۰	۸۱۱/۶۸۱	۸۱۱/۰۷۵	۷
۸۸۸/۹۸۰	۸۸۹/۲۹۷	۸۸۸/۹۸۳	۸
۸۸۸/۹۸۰	۸۸۹/۲۹۷	۸۸۸/۹۸۳	۹
۹۶۵/۷۵۰	۹۶۶/۸۱۰	۹۶۵/۸۱۲	۱۰

در جداول ۷ تا ۹، فرکانس سازه تحت شرط مرزی تمام گیردار ارائه شده است. فرضیات هندسی آن مطابق روابط ۶۱ تا ۶۶ بوده است. همچنین مقادیر شعاع و ضخامت به ترتیب برابر با ۱ و ۰/۱ متر و طول پوسته استوانه‌ای برابر با ۲ متر فرض شده است.

جدول ۷. فرکانس طبیعی پیل استوانه‌ای (برحسب هرتز)

شماره مود	تحقیق حاضر	آباکوس	خطا (%)
۱	۴۸۵/۶۱	۴۸۶/۴۰	۰/۱۶
۲	۵۹۳/۱۸	۱۸/۵۹۵	۰/۳۴
۳	۷۷۷/۰۶	۷۷۶/۸۹	۰/۰۲
۴	۷۹۹/۷۹	۷۹۹/۳۱	۰/۰۶
۵	۸۷۵/۴۴	۸۷۲/۹۷	۰/۲۸
۶	۹۸۴/۴۵	۹۸۶/۵۷	۰/۲۱
۷	۱۰۳۹/۶۲	۱۰۴۷/۲۲	۰/۷۳
۸	۱۰۶۲/۹۴	۱۰۶۱/۴۲	۰/۱۴
۹	۱۰۹۴/۱۱	۱۰۹۴/۲۵	۰/۰۱
۱۰	۱۲۵۲/۸۰	۱۲۶۰/۵۸	۰/۶۲

جدول ۸. فرکانس طبیعی پیل کروی (برحسب هرتز)

شماره مود	تحقیق حاضر	آباکوس	خطا (%)
۱	۱۱۲۶/۷۱۵	۱۱۲۶/۸	۰/۰۰۸
۲	۱۱۸۲/۲۵۸	۱۱۸۳/۳	۰/۰۸۸
۳	۱۳۹۹/۱۵۴	۱۴۰۴/۰	۰/۳۴۵
۴	۱۴۳۰/۸۱۲	۱۴۳۷/۷	۰/۲۶۶
۵	۱۶۳۸/۰۷۵	۱۶۴۴/۸	۰/۴۰۹
۶	۱۶۸۲/۵۵۲	۱۶۸۹/۱	۰/۳۸۸
۷	۱۹۵۷/۸۸۰	۱۹۶۸/۲	۰/۵۲۴
۸	۲۱۴۷/۳۱۶	۲۱۵۳/۱	۰/۲۶۹

۱۳۰۴/۶۲	۱۳۰۸/۸۴	۱۳۰۹/۳	۷
۱۳۸۳/۵۷	۱۳۸۶/۸۸	۱۳۸۷/۱	۸
۱۴۴۲/۲۹	۱۴۴۳/۵۷	۱۴۴۴/۰	۹
۱۵۹۷/۹۲	۱۶۰۳/۲۳	۱۶۰۴/۰	۱۰

جدول ۴. فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای تحت شرط مرزی C-

F (برحسب هرتز)

شماره مود	تحقیق حاضر	آباکوس	[۲۶]
۱	۱۴۶/۱۱	۱۴۵/۱۸	۱۴۶/۱۷
۲	۱۴۶/۱۱	۱۴۵/۱۸	۱۴۶/۱۷
۳	۲۱۰/۱۹	۲۰۹/۵۲	۲۱۰/۳۲
۴	۲۱۰/۱۹	۲۰۹/۵۲	۲۱۰/۳۲
۵	۲۴۲/۵۶	۲۴۲/۸۱	۲۴۲/۵۵
۶	۲۴۲/۵۶	۲۴۲/۸۱	۲۴۲/۵۵
۷	۳۶۶/۲۹	۳۶۷/۰۲	۳۶۶/۵۸
۸	۳۶۶/۳۹	۳۶۷/۰۲	۳۶۶/۵۸
۹	۴۰۲/۲۴	۴۰۲/۲۴	۴۰۱/۹۱
۱۰	۴۱۲/۲۳	۴۰۹/۰۵	۴۱۲/۳۶

جدول ۵. فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای تحت شرط مرزی C-

C (برحسب هرتز)

شماره مود	تحقیق حاضر	آباکوس	[۲۶]
۱	۳۶۰/۱۶	۳۵۹/۵۰	۳۶۰/۳۶
۲	۳۶۰/۱۶	۳۵۹/۵۰	۳۶۰/۳۶
۳	۳۷۵/۷۰	۳۷۵/۱۹	۳۷۵/۸۶
۴	۳۷۵/۷۰	۳۷۵/۱۹	۳۷۵/۸۶
۵	۴۶۲/۹۹	۴۶۳/۲۹	۴۶۳/۲۹
۶	۴۶۲/۹۹	۴۶۳/۲۹	۴۶۳/۲۹
۷	۵۲۳/۵۰	۵۲۳/۶۴	۵۲۳/۵۵
۸	۵۲۳/۵۰	۵۲۳/۶۴	۵۲۳/۵۵
۹	۶۴۶/۱۲	۶۴۸/۰۱	۶۴۶/۵۶
۱۰	۶۴۶/۱۲	۶۴۸/۰۱	۶۴۶/۵۶

جدول ۶. فرکانس طبیعی پوسته کروی تحت شرط مرزی C-F

(برحسب هرتز)

شماره مود	تحقیق حاضر	آباکوس	[۲۷]
-----------	------------	--------	------

۰/۷۰۴	۲۳۹۴/۸	۲۳۷۷/۹۴۱	۱۰	۰/۷۲۰	۲۱۸۱/۲	۲۱۶۵/۵۰۱	۹
-------	--------	----------	----	-------	--------	----------	---

جدول ۹. فرکانس طبیعی پوسته کرووی (برحسب هرتز)

شماره مود	تحقیق حاضر	آباکوس	خطا (%)
۱	۱۰۱۸/۸۴۱	۱۰۱۸/۹۰	۰/۰۰۶
۲	۱۰۱۸/۸۴۱	۱۰۱۸/۹۰	۰/۰۰۶
۳	۱۰۳۶/۷۸۰	۱۰۳۵/۹۰	۰/۰۸۵
۴	۱۰۳۶/۷۸۰	۱۰۳۵/۹۰	۰/۰۸۵
۵	۱۱۰۵/۹۶۲	۱۱۰۶/۸۰	۰/۰۷۶
۶	۱۱۰۵/۹۶۲	۱۱۰۶/۸۰	۰/۰۷۶
۷	۱۱۳۶/۶۱۷	۱۱۳۵/۲۰	۰/۱۲۵
۸	۱۱۳۶/۶۱۷	۱۱۳۵/۲۰	۰/۱۲۵
۹	۱۲۷۲/۷۵۸	۱۲۷۷/۱۰	۰/۳۴۰
۱۰	۱۳۰۸/۶۳۴	۱۳۰۷/۶۰	۰/۰۷۹

۰/۰۰۷	۵۶۵/۵۸	۵۶۵/۶۲	۹
۰/۰۲۲	۵۹۹/۴۴	۵۹۹/۳۱	۱۰

جدول ۱۱. فرکانس طبیعی پتل کرووی-استوانه‌ای تحت شرط مرزی C-C-C-C (برحسب هرتز)

شماره مود	تحقیق حاضر	آباکوس	خطا (%)
۱	۳۹۸/۸۵	۳۹۸/۸۲	۰/۰۰۸
۲	۵۵۵/۳۱	۵۵۵/۲۶	۰/۰۰۹
۳	۶۳۸/۴۵	۶۳۸/۲۸	۰/۰۲۷
۴	۷۰۱/۳۵	۷۰۰/۹۶	۰/۰۵۶
۵	۸۲۶/۲۹	۸۲۵/۹۵	۰/۰۴۱
۶	۸۵۷/۱۴	۸۵۷/۱۴	۰/۰
۷	۸۸۷/۶۵	۸۸۶/۷۱	۰/۱۰۶
۸	۹۰۷/۰۲	۹۰۵/۰۰	۰/۲۲
۹	۹۱۸/۱۹	۹۱۵/۲۷	۰/۳۱۹
۱۰	۹۹۳/۷۸	۹۹۷/۵۸	۰/۳۸۱

سپس یک پوسته متصل کرووی-استوانه‌ای بررسی شده است. نخست مقادیر فرکانس آن به کمک نرم‌افزار آباکوس برای سه شرط مرزی مختلف، دو سرگیردار، یک سرگیردار و

در ادامه به تحلیل پتل و پوسته متصل کرووی-استوانه‌ای پرداخته خواهد شد. نخست پتل متصل کرووی-استوانه‌ای تحت شرایط مرزی مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج به دست آمده به کمک روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته با مقادیر به دست آمده از شبیه‌سازی آباکوس مورد مقایسه قرار گرفته و نتایج در جداول ۱۰ و ۱۱ ارائه شده است. همان‌طور که از جداول ۱۰ و ۱۱ مشاهده می‌شود، نتایج تطابق بسیار خوبی دارند.

جدول ۱۰. فرکانس طبیعی پتل کرووی-استوانه‌ای تحت شرط مرزی C-C-F-F (برحسب هرتز)

شماره مود	تحقیق حاضر	آباکوس	خطا (%)
۱	۵۱/۸۹۸	۵۱/۴۵۳	۰/۸۶۵
۲	۹۳/۴۵	۹۳/۰۶۲	۰/۴۱۷
۳	۱۶۶/۸۹	۱۶۷/۰۶	۰/۱۰۲
۴	۲۴۴/۳۲	۲۴۴/۷۶	۰/۱۸
۵	۳۰۴/۹۳	۳۰۵/۱۵	۰/۰۷۲
۶	۳۵۷/۱۴	۳۵۷/۱۲	۰/۰۰۵
۷	۳۹۶/۲۳	۳۹۶/۲۱	۰/۰۰۵
۸	۵۰۶/۴۱	۵۰۶/۳۸	۰/۰۰۶

۰/۰۲۴	۴۱۲/۱۱	۴۱۲/۲۱	۱۰
-------	--------	--------	----

جدول ۱۳. فرکانس طبیعی پوسته کروی-استوانه‌ای تحت شرط مرزی C-C (برحسب هرتز)

شماره مود	تحقیق حاضر	آباکوس	خطا (%)
۱	۲۶۳/۰۱	۲۶۲/۷۱	۰/۱۱۴
۲	۲۶۳/۰۱	۲۶۲/۷۱	۰/۱۱۴
۳	۲۸۲/۹۶۷	۲۸۱/۹۴	۰/۳۶۴
۴	۲۸۲/۹۶۷	۲۸۱/۹۴	۰/۳۶۴
۵	۳۴۷/۵۴۵	۳۴۸/۹۴	۰/۴
۶	۳۴۷/۵۴۵	۳۴۸/۹۴	۰/۴
۷	۴۱۳/۱۴۳	۴۱۲/۲۰	۰/۲۲۹
۸	۴۱۳/۱۴۳	۴۱۲/۲۰	۰/۲۲۹
۹	۴۳۰/۰۶۶	۴۳۴/۳۳	۰/۹۸۲
۱۰	۵۲۵/۵۳۱	۵۲۳/۸۴	۰/۳۲۳

جدول ۱۴. فرکانس طبیعی پوسته کروی-استوانه‌ای تحت شرط مرزی C-S (برحسب هرتز)

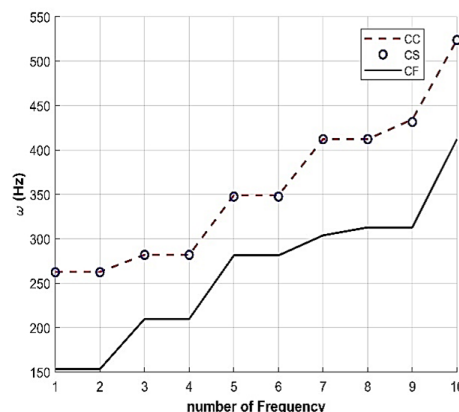
شماره مود	تحقیق حاضر	آباکوس	خطا (%)
۱	۲۶۲/۶۳	۲۶۲/۳۰	۰/۱۳
۲	۲۶۲/۶۳	۲۶۲/۳۰	۰/۱۳
۳	۲۸۲/۸۹	۲۸۱/۸۷	۰/۳۶
۴	۲۸۲/۸۹	۲۸۱/۸۷	۰/۳۶
۵	۳۴۶/۸۲	۳۴۷/۵۲	۰/۲۰
۶	۳۴۶/۸۲	۳۴۷/۵۲	۰/۲۰
۷	۴۱۳/۱۲	۴۱۲/۱۸	۰/۲۶
۸	۴۱۳/۱۲	۴۱۲/۱۸	۰/۲۶
۹	۴۳۰/۰۷	۴۳۱/۴۵	۰/۳۲
۱۰	۵۲۵/۴۷	۵۲۳/۷۵	۰/۳۳

تکیه‌گاه ساده-گیردار مورد بررسی قرار گرفته و نتایج مربوط به آن در جداول ۱۲ تا ۱۴ ارائه شده است. در جداول ۱۲ تا ۱۴، طول پوسته استوانه‌ای برابر با ۲، شعاع ۱ و ضخامت ۰/۱ متر فرض شده و بقیه فرضیات هندسی آن با توجه به روابط ۶۸-۷۳ بوده است. برای میزان تفاوت فرکانس پوسته متصل تحت شرایط مرزی مختلف، مقادیر ۱۰ فرکانس اول آنها در شکل ۸ رسم شده است.

همان‌طور که از شکل ۸ و همچنین جداول ۱۲ تا ۱۴ نیز قابل مشاهده است، مقادیر فرکانس در شرط مرزی یک سرگیردار از دو شرط دیگر کمتر است. در دو شرط دیگر، دو سرگیردار و تکیه‌گاه ساده-گیردار، مقادیر ۱۰ فرکانس اول نزدیک به یکدیگر بوده اما مقادیر شرط مرزی دو سرگیردار مقداری از آن بیشتر بوده است.

جدول ۱۲. فرکانس طبیعی پوسته کروی-استوانه‌ای تحت شرط مرزی C-F (برحسب هرتز)

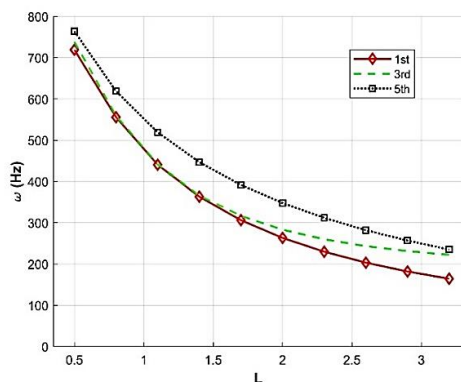
شماره مود	تحقیق حاضر	آباکوس	خطا (%)
۱	۱۵۳/۶۱	۱۵۳/۳۰	۰/۱۹۶
۲	۱۵۳/۶۱	۱۵۳/۳۰	۰/۱۹۶
۳	۲۱۰/۰۱	۲۰۹/۷۹	۰/۱
۴	۲۱۰/۰۱	۲۰۹/۷۹	۰/۱
۵	۲۸۱/۵۳	۲۸۱/۲۵	۰/۰۹۹
۶	۲۸۱/۵۳	۲۸۱/۲۵	۰/۰۹۹
۷	۳۰۴/۰۱	۳۰۳/۸۲	۰/۰۶۲۵
۸	۳۱۲/۵۶	۳۱۲/۸۲	۰/۰۸۳
۹	۳۱۲/۵۶	۳۱۲/۸۲	۰/۰۸۳



شکل ۸. نمودار تغییرات فرکانس پوسته متصل کرووی-استوانه‌ای تحت شرایط مرزی مختلف

ضخامت، شعاع آن به ترتیب برابر با ۰/۱ و ۱ متر فرض شده است.

همان‌طور که از نتایج گزارش شده قابل مشاهده است با افزایش طول پوسته استوانه‌ای، مقادیر فرکانس پوسته متصل کاهش می‌یابد. به طوری که فرکانس طبیعی پنجم آن با افزایش طول از ۰/۵ به ۳/۲ متر، ۶۹/۲۴۱۳ درصد کاهش یافته است.



شکل ۱۰. نمودار تغییرات فرکانس پوسته متصل کرووی-

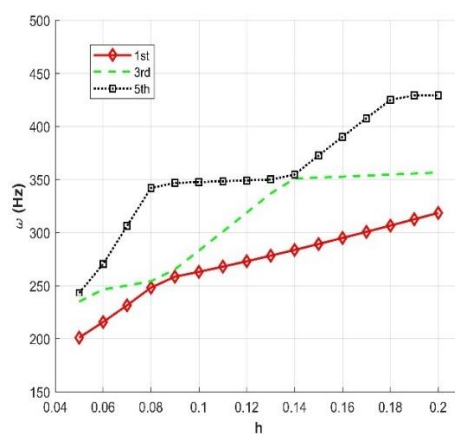
استوانه‌ای تحت تغییرات طول متر

میزان تأثیر تغییرات شعاع بر روی پوسته متصل کرووی-استوانه‌ای به طول ۲ و ضخامت ۰/۱ متر، در شکل ۱۱ ارائه شده است. همان‌طور که در شکل نیز قابل مشاهده است، هنگامی که شعاع پوسته مذکور افزایش می‌یابد باعث کاهش مقادیر فرکانس‌های سازه خواهد شد. به طوری که فرکانس طبیعی پنجم آن با افزایش شعاع از ۰/۵ به ۳/۲ متر، ۷۱/۱۱۱۴ درصد کاهش یافته است.

برای درک بهتر رفتار پِنل و پوسته متصل کرووی-استوانه‌ای به شعاع ۱، ضخامت ۰/۱ و طول ۲ متر، شکل مود آنها از نرم‌افزار آباکوس استخراج شده است. از این رو شرط مرزی

در ادامه سه پارامتر هندسی تأثیرگذار بر فرکانس طبیعی نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. به عبارتی فرکانس طبیعی سازه متصل را برای طول، ضخامت و شعاع مختلف مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج آن در شکل‌های ۹ تا ۱۱ ارائه شده است. نتایج موجود در این نمودارها به دلیل وجود تقارن هندسی در پوسته در نظر گرفته شده، تنها مودهای ۱، ۳ و ۵ رسم شده است و تغییرات مودهای ۲، ۴ و ۶ دقیقاً برابر با مودهای ۱، ۳ و ۵ خواهد بود. بنابراین از ارائه آن صرف‌نظر شده است.

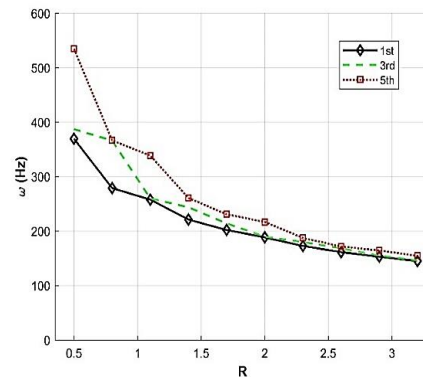
حال برای یک پوسته متصل کرووی-استوانه‌ای به ویژگی‌های هندسی شعاع ۱ و طول ۲ متر، تغییرات ضخامت آن بر حسب فرکانس مورد مطالعه قرار گرفته و نتایج آن در شکل ۹ ارائه شده است. با توجه به نتایج به دست آمده، می‌توان دریافت که با افزایش ضخامت سازه متصل، میزان هر ۳ فرکانس آن نیز افزایش یافته است. به طوری که فرکانس طبیعی اول سازه برای ضخامت ۰/۲، تقریباً ۱/۵۸۴ برابر فرکانس طبیعی اول در ضخامت برابر ۰/۰۵ متر بوده است.



شکل ۹. نمودار تغییرات فرکانس پوسته متصل کرووی-استوانه‌ای تحت تغییرات ضخامت متر

همچنین در شکل ۱۰، تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب طول پوسته متصل کرووی-استوانه‌ای رسم شده است. مقادیر

C-C-F-F برای پنل متصل و همچنین شرط مرزی یک سرگیردار برای پوسته متصل در نظر گرفته شده است. در نتیجه شکل مود پنل آن مطابق شکل ۱۲ و شکل مود پوسته متصل کروی-استوانه‌ای نیز مطابق شکل ۱۳ بوده است.

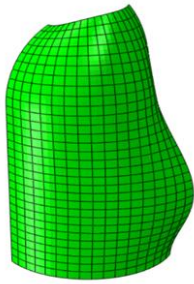


شکل ۱۱. نمودار تغییرات فرکانس پوسته متصل کروی-استوانه‌ای تحت تغییرات شعاع متر

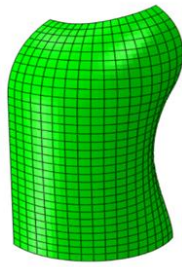
۷. نتیجه‌گیری

یکی از کاربردهای روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته گسسته‌سازی مشتق‌ها در دستگاه معادلات دیفرانسیلی وابسته به هم است که در پژوهش حاضر از این روش استفاده شده است. با استفاده از فرضیات دائل و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و به‌کارگیری اصل همپلتون معادلات حرکت حاکم بر سیستم پنل‌های کروی-استوانه‌ای متصل به هم استخراج شده است. شروط مرزی مختلف و شروط پیوستگی بین دو پنل در نظر گرفته شده به‌راحتی با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته گسسته‌سازی شده و

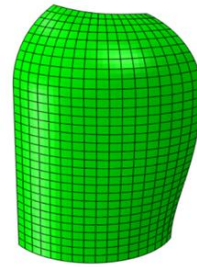
سپس به سیستم اعمال شده است. در صورت استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی دو بعدی به‌علت مجهول باقی ماندن جابه‌جایی‌ها در هر دو بعد (θ و x در پنل استوانه‌ای و θ و φ در پنل کروی) علاوه بر بررسی ارتعاشات آزاد پوسته‌های کامل می‌توان پنل‌ها (پوسته‌های با دوران کمتر از 360° درجه) را نیز بررسی کرد. پس از گسسته‌سازی مشتقات، می‌توان معادلات جبری حاصل را به‌صورت مسئله مقدار ویژه حل نمود و فرکانس‌های طبیعی پنل و پوسته متصل به هم را استخراج کرد. پس از صحت‌سنجی نتایج با نرم‌افزار آباکوس و مقالات معتبر موجود، نتایج عددی جدید برای شروط مرزی و پیوستگی و سازگاری جدید گزارش شدند. یکی دیگر از مزیت‌های روش مربعات دیفرانسیلی دقت و سرعت بالای همگرایی این روش نسبت به دیگر روش‌ها مانند المان محدود است. این موضوع می‌تواند منجر به کاهش هزینه چشمگیر زمانی و محاسباتی شود. در واقع روش مربعات دیفرانسیلی می‌تواند با تعداد نقاط کم پاسخی دقیق با درصد خطای کم را ارائه دهد. البته شروط مرزی مختلف بر روی تعداد نقاط مورد استفاده تأثیرگذار خواهد بود. شرط مرزی آزاد با توجه به پیچیدگی بیشتر دیرترین سرعت همگرایی را داراست. همچنین نشان داده شد که ضخامت پنل یا پوسته‌ها، طول بخش استوانه‌ای، شعاع بخش کروی و شرایط مرزی از جمله پارامترهای متأثر در رفتار ارتعاشی سیستم هستند.



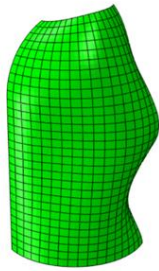
شکل ۱۲-ب. شکل مود سوم، پیل متصل کروی-استوانه‌ای



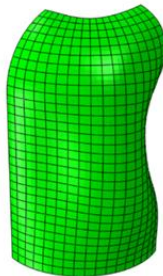
شکل ۱۲-ب. شکل مود دوم، پیل متصل کروی-استوانه‌ای



شکل ۱۲-الف. شکل مود اول، پیل متصل کروی-استوانه‌ای



شکل ۱۲-ج. شکل مود هشتم، پیل متصل کروی-استوانه‌ای

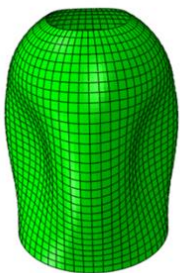


شکل ۱۲-ث. شکل مود پنجم، پیل متصل کروی-استوانه‌ای

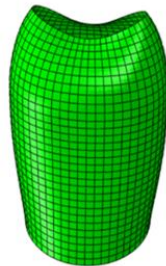


شکل ۱۲-ت. شکل مود چهارم، پیل متصل کروی-استوانه‌ای

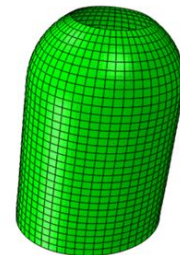
شکل ۱۲. شکل مودهای پیل متصل کروی-استوانه‌ای



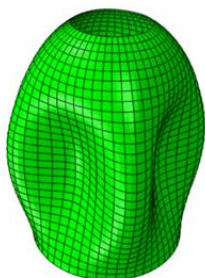
شکل ۱۳-ب. شکل مود پنجم و ششم،



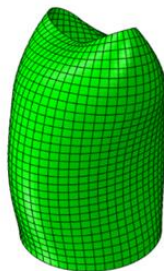
شکل ۱۳-ب. شکل مود سوم و چهارم



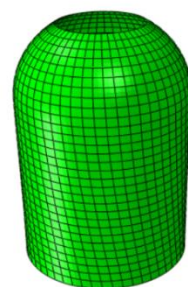
شکل ۱۳-الف. شکل مود اول و دوم،



شکل ۱۳-ج. شکل مود دهم و یازدهم،



شکل ۱۳-ث. شکل مود هشتم و نهم،



شکل ۱۳-ت. شکل مود هفتم،

شکل ۱۳. شکل مودهای پوسته متصل کروی-استوانه‌ای

۸. فهرست علائم

ضرایب ماتریس سختی	A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}	جابه‌جایی نقطه دلخواه در جهت x در پوسته استوانه‌ای و φ در پوسته کروی	u
منتجه‌های نیرو و گشتاور	N_{ij}, M_{ij}, Q_{ij}	جابه‌جایی نقطه دلخواه در جهت Z	w
مدول الاستیسیته	E	جابه‌جایی نقطه دلخواه صفحه میانی در جهت x در پوسته استوانه‌ای و φ در پوسته کروی	u_0
چگالی	ρ	جابه‌جایی نقطه دلخواه صفحه میانی در جهت θ	v_0
طول پوسته استوانه‌ای	L	جابه‌جایی نقطه دلخواه صفحه میانی در جهت Z	w_0
شعاع پوسته استوانه‌ای	R	چرخش نرمال صفحه میانی حول محور x	β_x
ممان اینرسی	I	چرخش نرمال صفحه میانی حول محور θ	β_θ
عملگر وریشن	δ	چرخش نرمال صفحه میانی حول محور φ	β_φ
ضخامت پوسته و پنل	h	کرنش	ε
ضریب پواسون	ν	تنش	σ
بردار جابه‌جایی	Δ		
ماتریس جرم	K		
ماتریس سختی	M		
فرکانس طبیعی	ω		
تعداد گره‌های چپیشوف	N		
ضریب تصحیح برشی	κ		

۹. مأخذ

- [1] Shakouri, M., and M. A. Kouchakzadeh, "Free vibration analysis of joined conical shells: analytical and experimental study", *Thin-Walled Structures*, 2014, Vol.85, pp.350-358.
- [2] Sarkheil, Saeed, Mahmoud Saadat Foumani, and Hossein M. Navazi, "Theoretical and experimental analysis of the free vibrations of a shell made of n cone segments joined together", *Thin-Walled Structures*, 2016, Vol.108, pp.416-427.
- [3] Zingoni, Alphonse, and Nosakhare Enoma, "Strength and stability of spherical-conical shell assemblies under external hydrostatic pressure", *Thin-Walled Structures*, 2020, Vol.146, p.106472.
- [4] Yang, Yeong-Bin, and Jae-Hoon Kang, "Vibrations of a composite shell of hemiellipsoidal-cylindrical shell having variable thickness with and without a top opening", *Thin-Walled Structures*, 2017, Vol.119, pp.677-686.
- [5] Irie, T., G. Yamada, and Y. Muramoto, "Free vibration of joined conical-cylindrical shells", *Journal of Sound and Vibration*, 1984, Vol.95, no.1, pp.31-39.
- [6] Lee, Young-Shin, Myung-Seog Yang, Hyun-Soo Kim, and Jae-Hoon Kim, "A study on the free vibration of the joined cylindrical-spherical shell structures", *Computers & Structures*, 2002, Vol.80, no.27-30, pp.2405-2414.
- [7] Qu, Yegao, Yong Chen, Yifan Chen, Xinhua Long, Hongxing Hua, and Guang Meng, "A domain decomposition method for vibration analysis of conical shells with uniform and stepped thickness", *Journal of Vibration and Acoustics*, 2013, Vol.135, no.1, p.011014.
- [8] Wu, Shi Hao, Ye Gao Qu, Xiu Chang Huang, and Hong Xing Hua, "Free vibration analysis on combined cylindrical-spherical shell", *Applied Mechanics and Materials*, 2012, Vol.226, pp.3-8.

- [9] Yusefzad, Mahdi, and Firouz Bakhtiari Nejad, "A Study on the Free Vibration of the Prestressed Joined Cylindrical-spherical Shell Structures", *Applied Mechanics and Materials*, 2013, Vol.390, pp.207-214.
- [10] Wu, Shihao, Yegao Qu, and Hongxing Hua, "Vibrations characteristics of joined cylindrical-spherical shell with elastic-support boundary conditions", *Journal of mechanical science and technology*, 2013, Vol.27, pp.1265-1272.
- [11] Wu, Yongfu, Chen Zhao, Haofeng Liang, Sishi Yao, Jianghong Xue, and Peng Xu, "Free vibration of composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners", *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, Vol.60.
- [12] Su, Zhu, and Guoyong Jin, "Vibration analysis of coupled conical-cylindrical-spherical shells using a Fourier spectral element method", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2016, Vol.140, no.5, pp.3925-3940.
- [13] Lee, Jinhee, "Free vibration analysis of joined spherical-cylindrical shells by matched Fourier-Chebyshev expansions", *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, Vol.122, pp.53-62.
- [14] Xie, Kun, Meixia Chen, and Zuhui Li, "Free and forced vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical-spherical shells through a semi-analytic method", *Journal of Vibration and Acoustics*, 2017, Vol.139, no.3, p.031001.
- [15] Ko, Soo-Min, and Jae-Hoon Kang, "Vibration of hemispherical-cylindrical-hemispherical shells and complete hollow spherical shells with variable thickness", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2019, Vol.19, no.03, p.1950018.
- [16] Pang, Fuzhen, Haichao Li, Jie Cui, Yuan Du, and Cong Gao, "Application of flügge thin shell theory to the solution of free vibration behaviors for spherical-cylindrical-spherical shell: a unified formulation", *European journal of mechanics-A/solids*, 2019, Vol.74, pp.381-393.
- [17] Li, Haichao, Gao Cong, Lei Li, Fuzhen Pang, and Jicai Lang, "A semi analytical solution for free vibration analysis of combined spherical and cylindrical shells with non-uniform thickness based on Ritz method", *Thin-Walled Structures*, 2019, Vol.145, pp.106443.
- [18] He, Qi, Hong-Liang Dai, Qin-Feng Gui, and Jun-Jian Li, "Analysis of vibration characteristics of joined cylindrical-spherical shells", *Engineering Structures*, 2020, Vol.218, pp.110767.
- [19] Pang, Fuzhen, Haichao Li, Hailong Chen, and Yanhe Shan, "Free vibration analysis of combined composite laminated cylindrical and spherical shells with arbitrary boundary conditions", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2021, Vol.28, no.2, pp.182-199.
- [20] Bagheri, H., Y. Kiani, and M. R. Eslami, "Free vibration of FGM conical-spherical shells", *Thin-Walled Structures*, 2021, Vol.160, p.107387.
- [21] Wang, Jiaying, Yan Qing Wang, and Qingdong Chai, "Free vibration analysis of a spinning functionally graded spherical-cylindrical-conical shell with general boundary conditions in a thermal environment", *Thin-Walled Structures*, 2022, Vol.180, pp.109768.

- [22] Gao, Cong, Fuzhen Pang, Jie Cui, Haichao Li, Ming Zhang, and Yuan Du, "Free and forced vibration analysis of uniform and stepped combined conical-cylindrical-spherical shells: A unified formulation", *Ocean Engineering*, 2022, Vol.260, p.111842.
- [23] Sobhani, Emad, Amir R. Masoodi, Ömer Civalek, and Amir Reza Ahmadi-Pari, "Free-damped vibration tangential wave responses of FG-sandwich merged hemispherical-cylindrical shells under effects of artificial springs at merging and boundary conditions", *Engineering Structures*, 2023, Vol.284, p.115958.
- [24] Reddy, Junuthula Narasimha, *Theory and analysis of elastic plates and shells*, CRC press, 2006.
- [25] Shu, Chang, *Differential quadrature and its application in engineering*, Springer Science & Business Media, 2000.
- [26] Tornabene, Francesco, Erasmo Viola, and Daniel J. Inman, "2-D differential quadrature solution for vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures", *Journal of Sound and Vibration*, 2009, Vol.328, no.3, pp.259-290.
- [27] Tornabene, Francesco, and Erasmo Viola, "Vibration analysis of spherical structural elements using the GDQ method", *Computers & Mathematics with Applications*, 2007, Vol.53, no.10, pp.1538-1560.

پی نوشت

-
1. First-order shear deformation theory (FSDT)
 2. Donnell Kinematics assumptions
 3. Generalized differential quadrature (GDQ)
 4. Flügge shell theory
 5. Reissner, Naghdi, and Berry
 6. Chebyshev polynomials
 7. Ansys
 8. Ritz Method
 9. Legendre polynomials
 10. Legendre polynomials
 11. Penalty method
 12. Chebyshev gauss lobatto
 13. Matlab
 14. Singularity
 15. ABAQUS