

تأثیر اعداد بی بعد بر فرکانس تشدید یک قطره آونگان

داور نورمحمدی مریی دانشگاه آزاد اسلامی واحد آستارا، گروه فنی و مهندسی davar.nourmohammadi@iau.ac.ir	محمد طیبی رهنی استاد دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی هوا فضا taeibi@sharif.edu	شهرام قربانی فر* استادیار دانشگاه آزاد اسلامی واحد آستارا، گروه فنی و مهندسی sh.ghorbanifar@iau.ac.ir
---	---	---

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۷/۱۷

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۳/۱۹

چکیده

مدت‌ها است که مطالعه رفتار قطره آونگان به‌عنوان یک سامانه دینامیکی غیرخطی مورد توجه محققان قرار گرفته است. رفتار ارتعاشی قطره آونگان در فرکانس‌های تشدید حاوی اطلاعات مفیدی برای بررسی سامانه‌های دینامیکی پیچیده‌تر است. اعداد بی بعد باند و موپینگی پارامترهای مهم و مؤثری در رفتار قطره هستند. در این کار، اثر اعداد باند و موپینگی بر روی فرکانس تشدید قطره آونگان بررسی شده است. از شبکه بولتزمن دوبعدی با زمان آرامش چندگانه برای شبیه‌سازی نوسانات قطره با استفاده از یک مدل پایستار برای نسبت چگالی‌های بالا استفاده شده است. با استفاده از این مدل، ویژگی‌های نوسانی قطره برای مقادیر مختلف اعداد باند و موپینگی محاسبه شدند. مشخص شد که افزایش عدد باند از ۰/۱۱ به ۱/۹۶ باعث افزایش فرکانس طبیعی از ۰/۰۰۰۳۲۷۸ به ۰/۰۰۱۸۸ (در مقیاس لتیس) به روشی تقریباً خطی می‌شود. همچنین، افزایش عدد موپینگی از ۰/۰۰۰۰۱۸ به ۰/۰۰۰۰۷۳ باعث افزایش فرکانس طبیعی از ۰/۰۰۰۳۲۷۸ به ۰/۰۰۰۰۵۷ با ماهیتی لگاریتمی می‌شود.

واژگان کلیدی: دینامیک قطره، نوسانات غیرخطی قطره، فرکانس طبیعی، فرکانس مافوق هارمونیک، فرکانس مادون هارمونیک

۱. مقدمه

ادغام، شکافتن، جابه‌جایی و ... قطرات نمونه‌های آزمایشگاهی است که مستلزم تشدید نوسانات قطره به توسط امواج آکوستیک است [۴]. همچنین پایه‌ها یا لام‌های آزمایشگاهی که قطرات نمونه‌های آزمایشگاهی روی آنها قرار می‌گیرند، دارای ترشوندگی مخصوص به خود بوده و دستکاری و حرکت قطرات مواد مختلف را تحت تحریک آکوستیک که دارای ضریب کشش سطحی متنوعی هستند، مورد چالش قرار می‌دهد. همچنین بخشی از فناوری خود

به دلیل کثرت ظهور قطره در انواع فرایندهای سیالاتی، نوسانات قطره یکی از زمینه‌های مورد توجه محققین مکانیک سیالات کاربردی بوده است. قطرات مایع و رفتار آنها بر روی سطوح در کاربردهای مختلفی مانند زیست‌پزشکی [۱]، خود تمیزشوندگی [۲] و احتراق [۳] مورد توجه است. در زیست‌پزشکی استفاده از میکرو سیالات گسسته (به شکل قطره) در تراشه‌های آزمایشگاهی شامل

تمیزشوندگی برپایه اتمیزه کردن^۱ و نوسانات قطرات مایع انجام می‌پذیرد [۵]. همچنین اثرات رزونانسی مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. شفیعیان و برزگر در سال ۲۰۱۹ جاذب متخلخل صوتی با المان رزونانسی را مورد بررسی قرار دادند [۶]. آنها با روش المان محدود محدوده مناسب برای جذب فرکانس را به دست آوردند. همچنین در سال ۲۰۱۵ یک تحقیق بسیار خوب درباره بررسی تجربی و نظری رفتار آکوستیکی انژکتور چرخشی مورد استفاده در موتورهای راکتی سوخت مایع توسط پور محمود و مهدیقلی صورت پذیرفت [۷]. از یافته‌های آنها تنظیم دقیق انژکتور حفره پستی با مودهای ناپایدار محفظه احتراق است تا بتواند به‌عنوان جاذب عمل کند. برای قطرات سوخت در پدیده احتراق، فرکانس تشدید قطره براساس اندازه، شکل و خواص مواد آن تعیین می‌شود. اگر فرکانس امواج صوتی در محفظه با فرکانس تشدید قطره مطابقت داشته باشد، ارتعاش قطره تشدید شده و به قطرات کوچکتری تقسیم می‌شود. این تقسیم قطرات منجر به افزایش سطح قطره می‌شود که تبخیر سوخت و مخلوط شدن با اکسیدکننده را تسریع می‌کند. این پدیده می‌تواند راندمان احتراق را بهبود بخشد. با این حال، شکسته شدن بیش از حد قطرات نیز می‌تواند اندازه متوسط قطرات را بیش از حد کاهش دهد، که زمان ماندن قطرات را در محفظه کاهش می‌دهد و احتراق کامل را با مشکل روبه‌رو می‌کند [۸]. در سامانه‌هایی که با اسپری‌های سوخت کار می‌کنند، نوسانات آکوستیک ممکن است باعث ایجاد اختلال در نسبت اختلاط سوخت شوند [۹]. این پدیده می‌تواند با تغییر توزیع اندازه قطرات در ورودی انژکتور صورت پذیرد [۱۰]. با جداسازی قطرات بزرگ از کوچک در خلال حرکت آنها توسط جریان ضربه‌ای سیال [۱۱]، و یا با کاهش زمان تبخیر قطرات به دلیل نیروی پسای اضافی تولید شده از جریان ضربه‌ای اتفاق بیافتد [۱۲]. هر یک از این مکانیسم‌ها دینامیک شعله را تغییر می‌دهند. اغتشاشات آکوستیک انتشار یافته در محفظه احتراق باعث نوسان قطرات سوخت می‌شوند

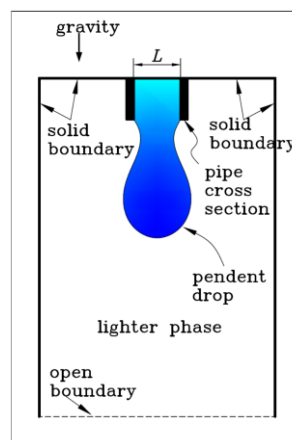
که این نوسانات با ایجاد ناپایداری باعث تغییر نرخ تبخیر سوخت و ایجاد حرکت نوسانی در مرز قطره در حال اشتعال می‌شود [۱۳]. این مکانیسم به‌ویژه در موتورهای موشک با سوخت جامد مهم است. در این موتورهای قطرات آلومینیوم آزاد شده از پیش‌رانه به‌صورت جداگانه می‌سوزند که با کاهش قطر قطره به زیر قطر بحرانی، خاموش می‌شوند.

در سال ۱۸۷۸، ریلی [۱۴]، در کار ارزشمند خود در مورد نوسانات جت، فرکانس‌های با دامنه کوچک یک قطره منفرد و ایزوله را استخراج کرد. در سال ۱۸۸۱، لمب [۱۵] اثر گرانیروی را بر روی ارتعاشات کوچک یک قطره مطالعه کرد. وی دریافت که نتایج به دست آمده برای گرانیروی کم به ماهیت نیروها بستگی ندارد. در سال ۱۹۶۰، رید [۱۶] نوسانات یک قطره مایع لزج را مطالعه کرد. وی تغییر شکل یک قطره مایع در شکل کروی را تحت تأثیر نیروهای کشش سطحی در نظر گرفت. او هارمونیک سطحی از نوع اول را به سامانه اعمال کرد، که توسط لمب برای قطره ارائه شده بود و یک معادله دینامیکی برای تغییر شکل قطره به دست آورد. در سال ۱۹۹۲، نوسانات غیرخطی قطرات مایع چسبناک توسط باساران [۱۷] با استفاده از روش المان محدود نوع گالرکین برای حل سامانه ناویر-استوکس مورد مطالعه قرار گرفت. در سال ۲۰۰۶، مون و همکاران [۱۸] به‌طور آزمایشی کمترین مود نوسانی قطره آونگان را مطالعه کردند. آنها نشان دادند که چرخش قطره حول جهت طولی پایین‌ترین فرکانس تشدید حالت نوسان است. در سال ۲۰۱۴، یانگ و همکاران [۱۹] از نوسانات قطره‌های آزاد برای اندازه‌گیری کشش سطحی دینامیک و لزجت برشی برای مایعات غیرنیوتنی استفاده کرد. در سال ۲۰۲۰، قربانی فر و همکاران [۲۰] با استفاده از شبیه‌سازی LBM، تابع جابه‌جایی-نیرو در یک قطره آونگان (FDFPD^۲) را معرفی کردند. آنها روشی برای محاسبه فرکانس طبیعی، فرکانس‌های زیر هارمونیک^۳ و فوق هارمونیک^۴ قطره آونگان را معرفی کردند. در سال ۲۰۲۳ قربانی فر و همکاران در یک مقاله تحلیلی با ارائه مدل

دینامیکی جدید برای نوسانات غیرخطی قطره، معادله دیفرانسیل حرکت نوسانی غیرخطی قطره را ارائه داده و به کمک آن پایداری نوسانات غیرخطی را بررسی کردند [۲۱]. علی‌رغم اینکه کارهای زیادی در زمینه نوسانات قطره انجام شده است، اما در مورد فرکانس طبیعی و اثرات اعداد بدون بعد (که در دینامیک قطره نقش دارند) بر روی فرکانس نوسان قطره هیچ تحقیقی گزارش نشده است. در این مقاله، با استفاده از نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی عددی با روش لئیس بولتزمن (که آن را به اختصار LBM^۵ می‌نامیم) دو بعدی، با کمک روش ارائه شده توسط [۲۰] فرکانس تشدید یک قطره محاسبه شده و اثر اعداد بدون بعد بر فرکانس‌های تشدید بررسی شده است. مطالعه اثرات اعداد بدون بعد بر فرکانس تشدید قطره می‌تواند در طراحی محفظه‌های احتراق برای کنترل اندازه قطرات و جلوگیری از افت قطر قطرات سوخت به زیر قطر بحرانی مورد توجه قرار گیرد.

۲. مدل فیزیکی

در این کار، ما شبیه‌سازی دو بعدی نوسان یک قطره آویز منفرد در انتهای لوله موئین را ارائه داده‌ایم. مایع مورد مطالعه، ایزوترمال، نیوتنی، غیرقابل تراکم و همسانگرد است. قطره آونگان از انتهای لوله همگن است. بین فاز گاز و مایع انتقال جرم صورت نمی‌گیرد. طرح‌واره این مدل فیزیکی در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. طرح‌واره یک قطره آونگان

۳. مدل عددی

محاسبات عددی با استفاده از روش شبکه بولتزمن انجام شده است. در اینجا به ذکر خلاصه‌ای از مدل مورد استفاده اکتفا می‌گردد. جهت مطالعه مبسوط‌تر مدل، جزییات شرایط مرزی به کار رفته و اعتبارسنجی‌های مربوطه به [۲۰] مراجعه گردد.

۴. معادلات تسخیر مرز مشترک

در مدل LBM بقایی که برای سامانه حاوی سیال دوجزئی غیرقابل تراکم استفاده شده است، معادله حاکم برای تعقیب جبهه به صورت زیر است [۲۰]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi u) = \nabla \cdot \left[M \left(\nabla \phi - \frac{4}{W} \phi (1 - \phi) \hat{n} \right) \right], \quad (1)$$

که ϕ متغیر میدان فاز مرز پخش با مقدار صفر در فاز سبک‌تر و یک در فاز سنگین‌تر است، u بردار سرعت ماکروسکوپی است، t زمان است، W ضخامت رابط است، M تحرک، و \hat{n} بردار یکه عمود بر مرز مشترک است.

۵. معادلات هیدرودینامیکی

معادلات ناویر-استوکس برای یک جریان چندفازی هم‌دمای تراکم‌ناپذیر عبارتند از:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho u = 0, \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu [\nabla u + (\nabla u)^T]) + F, \quad (3)$$

که در آن ρ چگالی موضعی مایع، μ گرانی موضعی مایع و p فشار ماکروسکوپی است. همچنین، F نیروی خارجی است که به سیال وارد می‌شود و عبارت است از:

$$F = F_s + F_b, \quad (4)$$

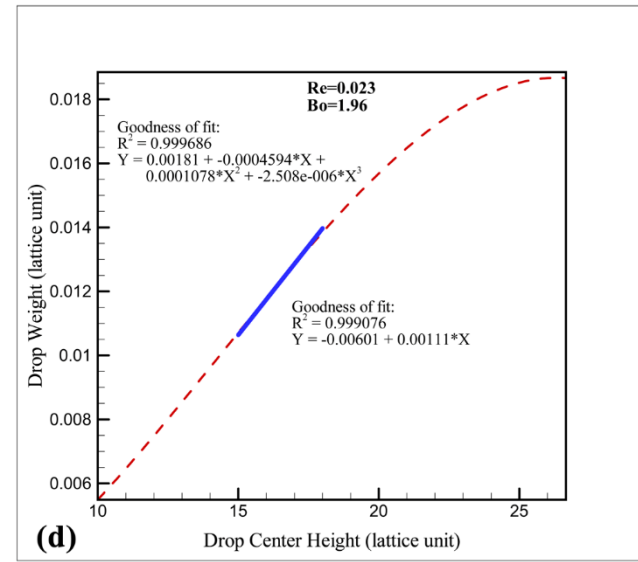
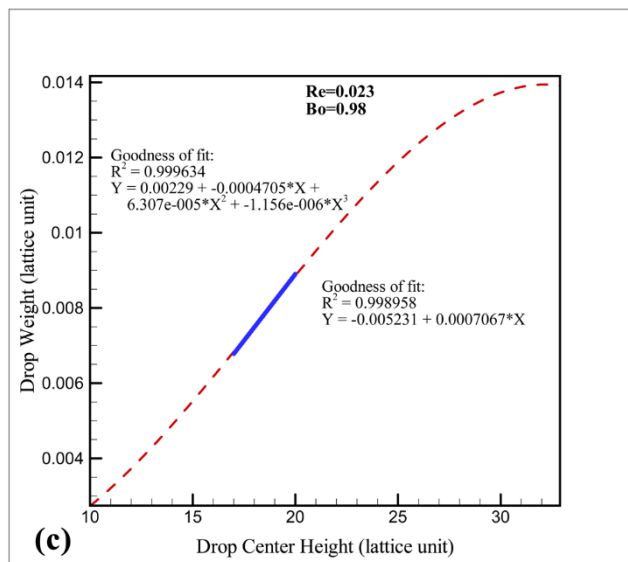
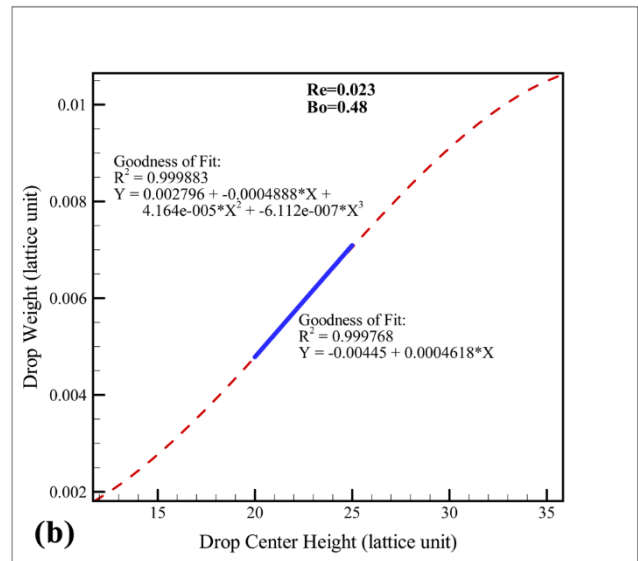
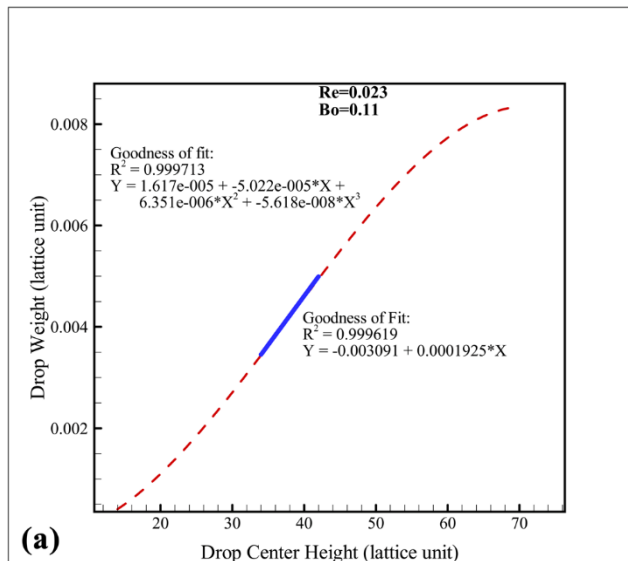
که در آن F_b نیروی حجمی و F_s نیروی کشش سطحی است.

هارمونیک تقریباً سه برابر فرکانس تحریک فرکانس طبیعی ناحیه خطی سامانه است [۲۳]. روش ارائه شده توسط [۲۰] در به دست آوردن فرکانس‌های مافوق هارمونیک و مادون هارمونیک استفاده شد. برای محاسبه فرکانس‌ها، فرکانس طبیعی از منطقه خطی در مجاورت نقطه عطف FDFPD استخراج شد که در شکل ۲ و ۳ مشاهده می‌شود.

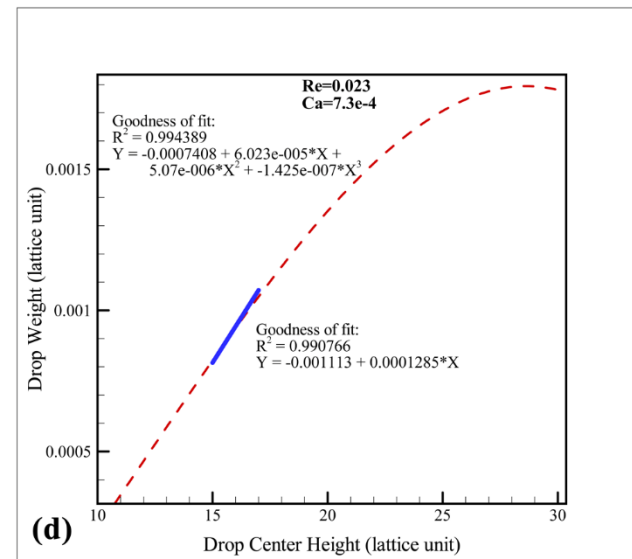
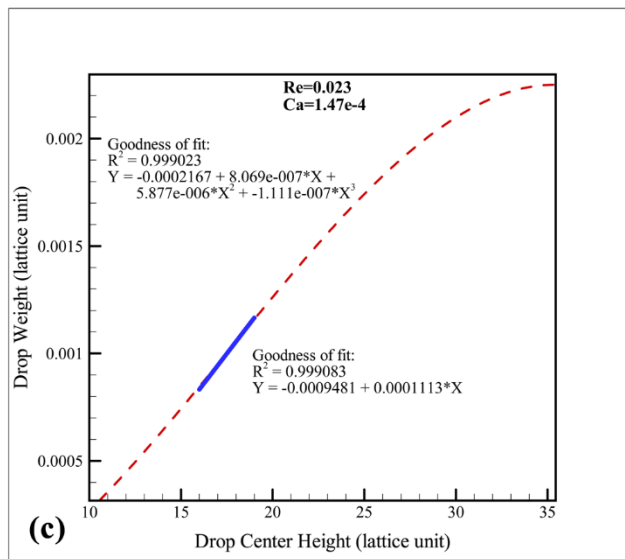
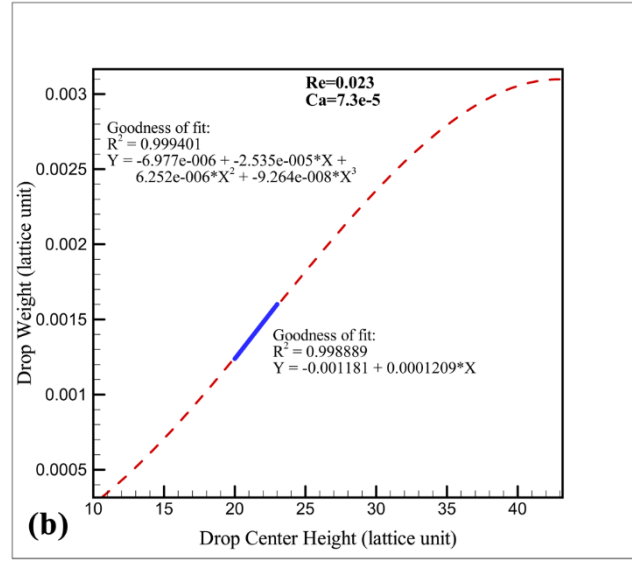
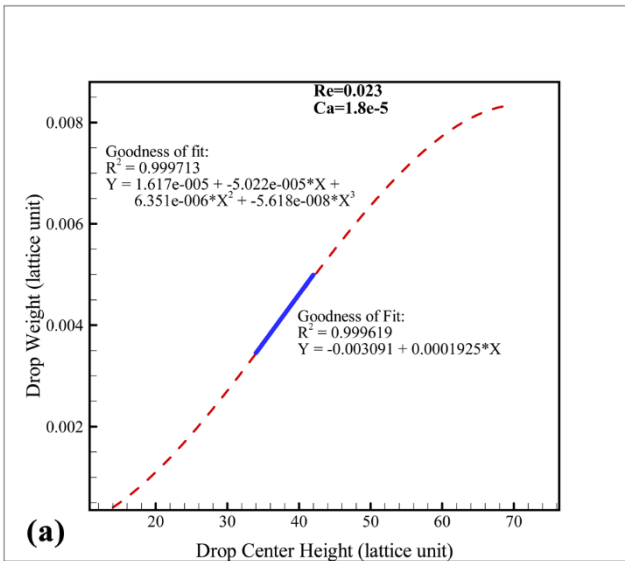
طبق تعریف، عدد باند^۷ در یک سامانه عبارت است از نسبت نیروهای گرانش به نیروهای کشش سطحی و به صورت $Bo = g\Delta\rho D^2/\sigma$ تعریف می‌شود. در این رابطه g شتاب گرانش، D قطر لوله، σ کشش سطحی بین دو فاز گاز و مایع و $\Delta\rho$ اختلاف چگالی بین دو فاز است. ملاحظه می‌شود که با استفاده از رابطه ۶ تغییر گرانشی باعث تغییر عدد باند می‌شود. نتایج با تنظیم اعداد باند بر روی ۰/۱۱، ۰/۴۸، ۰/۹۸، و ۱/۹۶ درحالی که Re روی ۰/۲۳ ثابت است به دست آمدند.

طبق تعریف عدد موینگی^۸ در یک سامانه عبارت است از نسبت نیروهای لزجت به نیروهای کشش سطحی که

به صورت $Ca = \mu U/\sigma$ تعریف می‌گردد که در آن μ گرانشی، U سرعت فاز سنگین تر که از لوله خارج می‌شود و σ کشش سطحی بین دو فاز هستند. به همین ترتیب با تغییر گرانشی از معادله ۶ برای $Re=0/23$ عدد موینگی روی $Ca=0/00018$ ، $Ca=0/00073$ ، $Ca=0/00147$ و $Ca=0/00073$ تنظیم شد که در شکل ۳ مشاهده می‌شود. داده‌های شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب در جدول ۱ و ۲ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، افزایش عدد باند باعث افزایش فرکانس‌های مافوق هارمونیک و مادون هارمونیک قطره آونگان می‌شود. همچنین، متوجه شدیم که افزایش عدد موینگی منجر به افزایش متناظر در فرکانس‌های مافوق هارمونیک و مادون هارمونیک قطره آونگان می‌شود. یک دلیل ممکن است این واقعیت باشد که افزایش عدد باند باعث کاهش زمان جدایش قطره می‌شود [۲۰]، که نتیجه آن کاهش جرم است. جرم کوچکتر به معنای فرکانس طبیعی بزرگتر است. (درحالی که ضریب فنریت ثابت یا در حال افزایش است).



شکل ۲. خط رگرسیون متناسب با منطقه خطی FDFPD برای محاسبه ضریب کشسانی خطی قطره، (a) $Bo = 0.11$ ، (b) $Bo = 0.48$ ، (c) $Bo = 0.98$ ، (d) $Bo = 1.96$ ، (محورها در واحدهای لیتس).



شکل ۳. خط رگرسیون متناسب با منطقه خطی FDFPD برای محاسبه ضریب کشسانی خطی قطره، $Ca = 0.000018$ (a)

(b) $Ca = 0.000073$ ، (c) $Ca = 0.000147$ ، (d) $Ca = 0.00073$ ، (محورها در واحدهای لیتس).

جدول ۱. داده‌های عددی شکل ۲ برای اعداد مختلف باند با $Re = 0.23$ (واحد مقادیر در مقیاس لیتس).

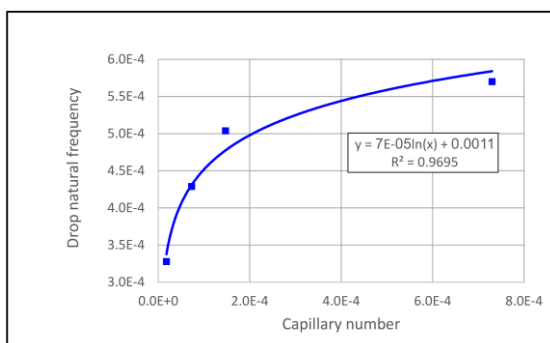
	Bo			
	۰/۱۱	۰/۴۸	۰/۹۸	۱/۹۶
α	1.61E-5	1.81E-3	2.29E-3	1.81E-3
β	-5.02E-5	-4.59E-4	-4.71E-4	-4.59E-4
γ	6.35E-6	1.8E-4	6.31E-5	1.8E-4
ε	-5.62E-8	-2.51E-6	-1.15E-6	-2.51E-6
\bar{k}	1.925E-4	1.11E-3	7.067E-4	1.11E-3
\bar{m}	1791	312	400	312
ω_n	3.278E-4	1.88E-3	1.329E-3	1.88E-3
ω_{sup}	1.092E-4	6.267E-4	4.43E-4	6.267E-4
ω_{sub}	9.834E-4	5.64E-3	3.987E-3	5.64E-3

جدول ۲. داده‌های عددی شکل ۳ برای اعداد مختلف Ca با $Re = 0.23$ (واحد مقادیر در مقیاس لیتس).

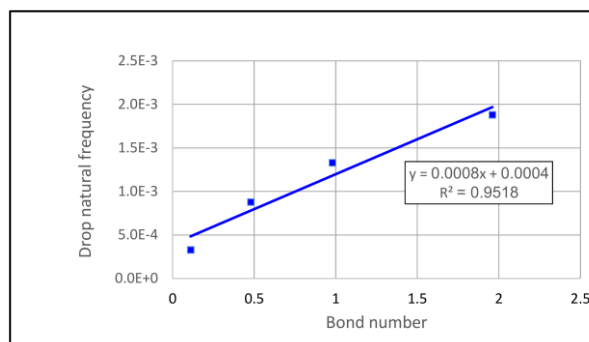
	Ca			
	1.8E-5	7.3E-5	1.47E-4	7.3E-4
α	1.61E-5	-6.98E-6	-2.17E-4	-7.41E-4
β	-5.02E-5	-2.54E-5	8.07E-7	6.02E-5
γ	6.35E-6	6.25E-6	5.88E-6	5.07E-6
ε	-5.62E-8	-9.26E-8	-1.11E-7	-1.43E-7
\bar{k}	1.925E-4	1.209E-4	1.113E-4	1.285E-4
\bar{m}	1791	658	439	394
ω_n	3.278E-4	4.287E-4	5.037E-4	5.700E-4
ω_{sup}	1.092E-4	1.429E-4	1.679E-4	1.900E-4
ω_{sub}	9.834E-4	1.286E-3	1.511E-3	1.710E-3

این موضوع در شکل‌های ۴ و ۵ نشان داده شده است. که به ترتیب برای تغییرات عدد باند و موینگی ترسیم شده‌اند.

همین توضیح را می‌توان برای تغییر عدد Ca نیز بیان کرد. یک مورد جالب این است که فرکانس طبیعی در اثر تغییرات اعداد باند و موینگی به دو کیفیت متفاوت افزایش می‌یابد.



شکل ۵. تأثیر تغییر عدد موینگی در $Re = 0.23$ بر فرکانس طبیعی قطره آونگان.



شکل ۴. تأثیر تغییر عدد باند در $Re = 0.23$ بر فرکانس طبیعی قطره آونگان.

می‌توان متوجه شد که تغییر فرکانس‌ها با عدد باند تقریباً ماهیت خطی دارد درحالی‌که تغییرات آن با عدد موینگی از ماهیتی لگاریتمی و غیرخطی برخوردار است. برای توضیح این می‌توان گفت که با افزایش عدد موینگی، اثرات لزجت غالب شده و قطره کشیده می‌شود. قطره هرچه بیشتر گسترش یابد، از شکل کروی (یا تقارن) آن بیشتر فاصله می‌گیرد، که باعث افزایش غیرخطی بودن به دلیل تغییرات هندسی می‌شود (قطره درحال رشد دارای ماهیت غیرخطی از نوع هندسی است). درحالی‌که، برای عدد باند این رفتار ممکن است به دلیل افزایش اثرات نیروهای گرانشی باشد که عمدتاً دارای ماهیت خطی هستند.

۸. نتیجه‌گیری

در این مقاله، معادله دینامیکی قطره آونگان با استفاده از

۹. مأخذ

شبیه‌سازی دو بعدی LBM با زمان آرامش چندگانه مطالعه شده است. فرکانس طبیعی و فرکانس تشدید مافوق هارمونیک و مادون هارمونیک قطره آونگان با تغییر عدد باند و موینگی محاسبه شد. نتایج نشان داد که افزایش عدد باند و موینگی منجر به افزایش فرکانس تشدید قطره آونگان می‌شود. کیفیت این افزایش برای عدد باند تقریباً خطی و برای عدد موینگی غیرخطی از نوع لگاریتمی است. همچنین افزایش عدد موینگی باعث افزایش فرکانس طبیعی با شبیه تندتر از حالت مربوط به تأثیر عدد باند است. بنابراین برای تنظیم اثرات ارتعاشات منتقله به قطرات سوخت در محفظه احتراق، می‌توان با کم و زیاد کردن اعداد باند و موینگی سوخت پاشش شده، رفتار قطره ناشی از تشدید را کنترل کرد. این موضوع به نوبه خود بر راندمان و کیفیت احتراق تأثیر می‌گذارد.

- [1] Chi, Junjie, Xiaoxuan Zhang, Yuetong Wang, Changmin Shao, Luoran Shang, and Yuanjin Zhao, "Bio-inspired wettability patterns for biomedical applications", *Materials Horizons*, 2021, Vol.8, no.1, pp.124-144.
- [2] Hassan, Ghassan, Bekir Sami Yilbas, Abdullah Al-Sharafi, and Hussain Al-Qahtani, "Self-cleaning of a hydrophobic surface by a rolling water droplet", *Scientific reports*, 2019, Vol.9, no.1, p.5744.
- [3] He, Minghao, Dong Liao, and Huihe Qiu, "Multicomponent droplet evaporation on chemical micro-patterned surfaces", *Scientific reports*, 2017, Vol.7, no.1, p.41897.
- [4] Brunet, Philippe, Michael Baudoin, O. Bou Matar, and Farzam Zoueshtiagh, "Droplet displacements and oscillations induced by ultrasonic surface acoustic waves: A quantitative study", *Physical Review E*, 2010, Vol.81, no.3, p.036315.
- [5] Lee, Seungmin, Youngbin Hyun, Kang Young Lee, Jeongmin Lee, and Sang Kug Chung, "Self-Cleaning Drop Free Glass Operated by Acoustic Atomization/Oscillation for Autonomous Driving and IoT Technology", *In 2020 IEEE 33rd International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)*, 2020, pp.36-37.

[۶] رضا برزگر پرائی، معصومه شفیعیان، "جاذب متخلخل صوتی با المان رزونانسی محلی تعبیه شده در آن"، *مجله علمی صوت و ارتعاش*، ۱۳۹۷، دوره ۷، شماره ۱۴، ص.۲۴-۳۹.

[۷] عطاله پورمحمود، حمید مهدیقلی، "بررسی تجربی و نظری رفتار اکوستیکی ائزکتور چرخشی مورد استفاده در موتورهای راکتی سوخت مایع"، *مجله علمی صوت و ارتعاش*، ۱۳۹۷، دوره ۷، شماره ۱۴، ص.۶۴-۷۵.

- [8] Sim, Hyung Sub, Miguel A. Plascencia, Andres Vargas, and Ann R. Karagozian, "Acoustically forced droplet combustion of liquid fuel with reactive aluminum nanoparticulates", *Combustion Science and Technology*, 2020, Vol.192, no.5, pp.761-785.
- [9] Culick, Fred, and Paul Kuentzmann, "Unsteady motions in combustion chambers for propulsion systems", 2006, pp.1-664.
- [10] Eckstein, J., E. Freitag, C. Hirsch, T. Sattelmayer, R. Von der Bank, and T. Schilling, "Forced low-frequency spray characteristics of a generic airblast swirl diffusion burner", *J. Eng. Gas Turbines Power*, 2005, Vol.127, no.2, pp.301-306.
- [11] Giuliani, Fabrice, Pierre Gajan, Olaf Diers, and Michel Ledoux, "Influence of pulsed entries on a spray generated by an air-blast injection device: An experimental analysis on combustion instability processes in aeroengines", *Proceedings of the combustion institute*, 2022, Vol.29, no.1, pp.91-98.
- [12] Gallier, Stany, Fabien Sibe, and Olivier Orlandi, "Combustion response of an aluminum droplet burning in air", *Proceedings of the Combustion Institute*, 2011, Vol.33, no.2, pp.1949-1956.
- [13] Genot, Aurelien, Stany Gallier, and Thierry Schuller, "Thermo-acoustic instabilities driven by fuel droplet lifetime oscillations", *Proceedings of the Combustion Institute*, 2019, Vol.37, no.4, pp.5359-5366.
- [14] Lord, Rayleigh, "On the instability of jets", *Proc. London Math. Soc.*, 1878, Vol.10, p.4.
- [15] Lamb, Horace, "On the oscillations of a viscous spheroid", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1881, Vol.1, no.1, pp.51-70.
- [16] Reid, William Hill, "The oscillations of a viscous liquid drop", *Quarterly of Applied Mathematics*, 1960, Vol.18, no.1, pp.86-89.
- [17] Basaran, Osman A., "Nonlinear oscillations of viscous liquid drops", *Journal of Fluid Mechanics*, 1992, Vol.241, pp.169-198.
- [18] Moon, Jong Hoon, Byung Ha Kang, and Ho-Young Kim, "The lowest oscillation mode of a pendant drop", *Physics of fluids*, 2006, Vol.18, no.2.
- [19] Yang, Lisong, Bethany K. Kazmierski, Stephen D. Hoath, Sungjune Jung, Wen-Kai Hsiao, Yiwei Wang, Arganthaël Berson, Oliver Harlen, Nik Kapur, and Colin D. Bain, "Determination of dynamic surface tension and viscosity of non-Newtonian fluids from drop oscillations", *Physics of Fluids*, 2014, Vol.26, no.11.
- [20] Ghorbanifar, S., M. Taeibi-Rahni, and M. Zareh, "Innovations in Non-Linear Oscillations of a Pendent Drop from a Capillary Tip During Formation and Detachment-An LBM Simulation", *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 2020, Vol.14, no.1, pp.331-344.
- [21] Ghorbanifar, Shahram, Mohammad Taeibi Rahni, Masoud Zareh, and Mohammad Hasan Nobakhti, "Stability and bifurcation analysis of a pendent drop using a novel dynamical model", *Archive of Applied Mechanics*, 2023, Vol.93, no.2, pp.487-501.
- [22] Chen, Shiyi, Daniel Martinez, and Renwei Mei, "On boundary conditions in lattice Boltzmann methods", *Physics of fluids*, 1996, Vol.8, no.9, pp.2527-2536.
- [23] Kelly, S. G., "Mechanical vibrations Theory and applications (Stamford: Cengage Learning)", 2012.

[24] Yang, J. H., Miguel AF Sanjuán, and H. G. Liu, "Vibrational subharmonic and superharmonic resonances", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2016, Vol.30, no.1-3, pp.362-372.

پی نوشت:

-
1. Gas Atomization, GA
 2. Force Displacement Function of a Pendent Drop
 3. Subharmonic
 4. Superharmonic
 5. Lattice Boltzmann Method
 6. Chen
 7. Bond number
 8. Capillary number