

تأثیر حرارت و رطوبت بر انتشار امواج در نانوپوسته‌های متحرک حامل

نانوسیال مغناطیسی

سعید ضیایی‌راد	سیدعلی افتخاری	اعظم قاسمی*	مهدی صالحی	سهیل اویسی
دانشکده مهندسی مکانیک	گروه مهندسی مکانیک	گروه مهندسی مکانیک	گروه مهندسی مکانیک	گروه مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران	واحد خمینی شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی شهر، ایران	واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران	واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران	واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران
szrad@cc.iut.ac.ir	s_a.eftekhari@iaukhsh.ac.ir	a_ghassemi@pmc.iaun.ac.ir	mehdi.salehi@pmc.iaun.ac.ir	soheil.oveissi@gmail.com

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۸/۱۱

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۶/۲۷

چکیده

در این تحقیق انتشار موج در نانوپوسته‌های کربنی استوانه‌ای مدور دارای حرکت محوری حاوی نانوسیال مغناطیسی برای نخستین بار تحت سه نوع میدان نیروی حرارتی و رطوبتی طولی، محیطی و هم‌زمان طولی- محیطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. میزان تأثیر نانوسیال مغناطیسی بر انتشار موج حاصله با استفاده از اعداد نادسن و هارتمن در نظر گرفته می‌شود. معادلات حاکم بر مسئله‌ی برهم‌کنش نانوسیال-نانوسازه تحت نیروهای حرارتی و رطوبتی با استفاده از یک مدل ابداعی پیشنهادی براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا در مختصات استوانه‌ای و با در نظر گرفتن پارامترهای سینوسی و الاستیسیته غیرمحلی با کمک اصل همپلتون و معادلات تعمیم یافته ناویر-استوکس استخراج می‌شوند. نتایج حاصل از حل تحلیلی معادلات حاکم حاکی از تطابق بسیار خوب نتایج مدل پیشنهادی در این تحقیق با نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی است. علاوه بر این، اثر تغییرات چگالی‌های نانوسازه و نانوسیالات مغناطیسی (مایع و گاز) به موجب میدان‌های حرارتی و رطوبت حرارتی و اثرات سرعت محوری نانوسازه و نانوسیال عبوری بر پراکندگی فونون‌ها و فرکانس طبیعی نانوسیستم برای نخستین بار مورد بحث قرار می‌گیرد.

واژگان کلیدی: انتشار موج، نانوپوسته کربنی دارای حرکت محوری، نانوسیال مغناطیسی، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای استوانه‌ای- سینوسی- غیرمحلی، میدان‌های نیرویی حرارتی و رطوبت حرارتی

۱. مقدمه

به‌طور طبیعی سازه‌ها با سیالات مختلف در تماس هستند، این برهم‌کنش در مقیاس‌ها، در حرکت با سرعت‌ها و جهت‌های مختلف و نیز تحت میدان‌های نیرویی گوناگون می‌تواند تأثیر اساسی بر عملکرد و واکنش‌های مختلف داشته باشد. فیزیکدان

مشهور ریچارد فاینمن در سال ۱۹۶۰ اظهار داشت در پایین‌دست فضاها، زیادی وجود دارد [۱]. بی‌شک یکی از آنها نانولوله‌های کربنی هستند که در سال ۱۹۹۱ توسط سومیو ایجیما کشف شد [۲]. نانوسازه‌های کربنی و صفحات گرافنی دارای پتانسیل بسیار زیادی برای استفاده در صنایع و

سیستم‌های مختلف مانند سیستم‌های نانوالکترومکانیکی [۳]، دستگاه‌های نانوفلوتیدی [۴]، سنسورهای بیولوژیکی و مولکولی [۵]، دستگاه‌های انتقال دارو [۶] و موارد بسیار دیگر دارند. بیشتر کاربردهای بالقوه این سازه‌ها بستگی به فهم دقیقی از رفتار مکانیکی آنها دارد. بنابراین تجزیه و تحلیل مکانیکی آنها به یک زمینه مورد علاقه محققین تبدیل شده است.

از نظر مقیاس، براساس مطالعات صورت گرفته رفتار سازه‌ها و سیستم‌ها در ابعاد بسیار کوچک متفاوت بوده و به اصطلاح به پارامتر مقیاس طول وابسته هستند. نظریه غیرمحملی یکی از مدل‌های پیوسته شناخته شده است که شامل مقیاس طول داخلی بوده و در مقایسه با نتایج تجربی دقت بسیار خوبی دارد [۷]. براساس تئوری غیرمحملی، آیدوگدو و فیلیز [۸] از مدل تیر کلاسیک برای بررسی تأثیر مقیاس کوچک بر رفتار ارتعاش محوری SWCNT^۱ استفاده کردند و نشان دادند که فرکانس‌های ارتعاشی محوری این سازه‌ها با استفاده از تئوری تیر کلاسیک بسیار زیادتر از واقعیت ارزیابی می‌شوند. اویسی و قاسمی [۹] نشان دادند پارامتر وابسته به اندازه غیرمحملی در تعیین بزرگی فرکانس موج و سرعت فاز در انتشار موج‌های طولی و محیطی نانو سازه‌های حاوی نانوسیال نقش پررنگی ایفا می‌کنند.

از اولین نیروهایی که به‌طور طبیعی بسیاری از دستگاه‌ها کم و بیش در معرض تأثیر آن قرار دارند میدان‌های نیرویی حرارتی است که در جهت‌های مختلف می‌تواند بر سیستم اعمال شوند. به‌طوری‌که ضریب انبساط حرارتی^۲ (CTE) ویژگی اصلی صنایعی مانند نانوالکترونیک است. نانو ساختارهایی مانند نانوسیم‌ها، نانولوله‌های کربنی صندلی و نانوصفحات اثرات مهمی در محیط‌های گرمایی نشان داده‌اند. انبساط حرارتی نانولوله‌های کربنی با سایر مشتقات کربنی مانند الیاف کربن و گرافیت یا الماس تفاوت اساسی دارد [۹]. در زمینه سازه‌های پوسته استوانه‌ای تحت بارهای حرارتی، صفریور و همکاران [۱۰] کماتش حرارتی و مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای

کامپوزیتی را مورد بررسی قرار دادند. جیانگ و همکاران [۱۱] نشان دادند که ضریب انبساط حرارتی CNTs در دمای بالا مثبت و در دمای اتاق منفی است. از ویژگی‌های این میدان‌های نیرویی که در مقیاس نانو می‌تواند تأثیر قابل توجهی بر سیستم بگذارد ایجاد رطوبت ناشی از حرارت یا هایگروترمال^۳ است. شواهد نشان می‌دهند که تغییر شرایط محیطی ناشی از جذب رطوبت و دما تأثیر نامطلوبی بر سختی و مقاومت سازه‌ها دارد. افزایش رطوبت و دما مدول الاستیک مواد را کاهش داده و فشارهای داخلی ایجاد می‌کند که می‌تواند بر پایداری سازه‌ها تأثیرگذار باشد [۱۲].

از آنجا که حرکت اتم‌ها و مولکول‌ها تحت نیروها و شرایط محیطی اجتناب‌ناپذیر است، لذا بررسی، کنترل و هدایت آن به‌خصوص در سیستم‌های نانومقیاس برای صنایع گوناگون می‌تواند یک موضوع مهم و قابل توجه برای بهبود عملکرد و گسترش زمینه‌های مورد استفاده از نانو ساختارها باشد. به‌طور کلی سیستم‌های دارای حرکت محوری کاربردهای گسترده‌ای دارند. این دستگاه‌ها در مقیاس‌های کوچک می‌توانند در محدوده فرکانس فوق‌العاده بالا و حتی تراهرتز کار کنند که این بیانگر اثر وابسته به اندازه بوده و باید مورد توجه قرار گیرد [۱۳].

اندازه‌گیری خواص مکانیکی نانو ساختارها با توجه به ابعاد آنها با استفاده از دو روش عمده شبیه‌سازی دینامیک مولکولی و مکانیک محیط‌های پیوسته امکان‌پذیر می‌شوند. از آنجا که شبیه‌سازی مولکولی گران‌قیمت، پیچیده و زمان‌بر است، تئوری‌های پیوسته مکانیکی به‌طور گسترده و موفقیت‌آمیزی برای مطالعه رفتار مکانیکی نانولوله‌های کربنی به‌کار گرفته می‌شوند. همچنین برخی از محققین برای جبران نقص نظریه‌های کلاسیک به دلیل ساده‌سازی فرضیات در آنها از تئوری‌های تغییر شکل برشی با مرتبه اول یا مرتبه‌های بالاتر بهره برده‌اند. اخیراً محققین با ترکیب تئوری‌ها و مدل‌های مختلف، مدل‌های پیشنهادی مؤثرتری را ارائه و مورد استفاده

قرار می‌دهند. لذا استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلّی سه‌بعدی برای تجزیه و تحلیل رفتار ارتعاشاتی نانوصفحات و پوسته‌ها بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. به‌عنوان مثال برخی از محققین از نظریه مرتبه بالای سه‌بعدی [۱۴]، نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم [۱۵] و نظریه بازیابی شده زیگزاگ [۱۶] همراه با تئوری الاستیسیته پیوسته غیرمحلّی استفاده کرده تا رفتار ارتعاشی نانوصفحات را مورد بررسی قرار دهند. مدل غیرخطی نظریه‌های تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر معمولاً فقط ترم‌های غیرخطی نوع ون کارمن را در نظر می‌گیرد، یعنی این ترم‌های غیرخطی فقط شامل جابه‌جایی طبیعی می‌شوند [۱۷]. به همین دلیل، آمابیلی و ردی [۱۸] نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر غیرخطی دقیق و سازگار را ارائه دادند که بر این محدودیت غلبه می‌کند. نظریه ردی-آمابیلی سه جابه‌جایی و دو چرخش را با فرضیه عدم کشش ضخامت ارائه می‌دهد.

در این تحقیق برای نخستین بار اثر میدان‌های نیروی حرارتی، رطوبتی و هیدرودینامیکی بر پراکندگی موج، فرکانس‌های موج‌های حاصله و سرعت فاز یک نانوسیستم متحرک تحت برهم‌کنش سیال عبوری بررسی می‌شود. بدین منظور یک نانوپوسته کربنی مدور استوانه‌ای که پتانسیل‌های استفاده از آن در صنایع گوناگون توسط محققان بررسی شده‌است انتخاب می‌شود. جریان سیال عبوری در هر سیستمی می‌تواند به‌عنوان یک عامل تحریک و اعمال نیروهای هیدرو-استاتیکی و هیدرو-دینامیکی بر سازه باشد، لذا این سیستم مورد بررسی نیز از این جهت مستثنا نبوده و با فرض عبور از درون نانوپوسته، مجموعه سازه و سیال به‌عنوان یک سیستم در نظر گرفته می‌شود. در اینجا اثرات سیالات مختلف مورد استفاده در صنایع مانند آب، هوا، خون، دی‌اتیل‌اتر و هیدروژن مایع مورد بررسی و مسئله برهم‌کنش سیال-سازه در مقیاس نانو (Nano-FSI) مورد بحث قرار می‌گیرد. درعین‌حال، میدان‌های حرارتی در جهت‌های طولی، محیطی و یا به‌طور هم‌زمان در دو جهت طولی و محیطی هم در دماهای پایین و هم در دماهای بالا به

سیستم اعمال و بررسی می‌شوند. حرارت به مرور زمان موجب ایجاد پدیده‌ای فیزیکی به نام رطوبت حرارتی شده و مسئله به‌صورت ترمو-هایگرو-الاستیکی (THE problem) در خواهد آمد. بنابراین یک نانوسیستم دارای برهم‌کنش سیال-سازه دارای حرکت محوری تحت نیروهای هیدروالاستیکی، حرارتی و رطوبتی خواهیم داشت. از سوی دیگر برای استخراج معادلات حاکم بر مسئله در اینجا سعی شده است با تعمیم یک تئوری پیشرفته و کارآمد به مدلی ابداعی دست یافت و جواب‌های دقیق و قابل اعتنایی کسب کرد. لذا مدل آمابیلی-ردی [۱۸] براساس تئوری مرتبه بالاتر تغییرشکل برشی را با ترکیب تئوری غیرمحلّی اربینگن و استفاده از پارامترهای سینوسی و مختصات استوانه‌ای تعمیم داده و مدل CSN-HSDT^۵ برای نخستین بار پیشنهاد و ارائه می‌شود. سپس معادلات حاکم با استفاده از روش انرژی استخراج و با روش تحلیلی حل می‌شوند. اثرات وابسته به مقیاس با استفاده از پارامتر غیرمحلّی برای سازه و فاکتور اصلاح سرعت با کمک اعداد نادسن و هارتمن برای سیال مغناطیسی در معادلات اعمال می‌شوند. به جز موارد ذکر شده بررسی اثر تغییر چگالی سازه و سیال به موجب اعمال نیروهای حرارتی و رطوبتی بر فرکانس و سرعت موج نانوپوسته دینامیکی از نوآوری‌های این تحقیق هستند. همچنین اثر سرعت محوری سازه و سیال عبوری بر انتشار موج و تفرق فونون‌ها به تفکیک بررسی خواهند شد.

۲. شبیه‌سازی ریاضی

به‌منظور شبیه‌سازی نانوپوسته استوانه‌ای مدور به‌عنوان سازه مورد بررسی، در اینجا یک نانولوله کربنی همانند شکل ۱ دارای شعاع r ، ضخامت h ، سیستم مختصات استوانه‌ای (z, θ, x) و نیز نقطه مرجع O در مرکز یک انتهای پوسته است در نظر گرفته می‌شود. راستای طولی این سیستم $x \in [0; L]$ راستای محیطی آن $\theta \in [0; 2\pi]$ و راستای شعاعی آن $z \in [-h/2; h/2]$

z است. همچنین مختصات تغییر مکان یک نقطه دلخواه در صفحه میانی پوسته در جهت‌های طولی، محیطی و شعاعی به ترتیب با u ، v و w نشان داده می‌شوند. در اینجا برای بررسی رفتار ارتعاشی سیستم، تئوری تغییر شکل مرتبه بالای آمابیلی-ردی [۱۸] تعمیم داده می‌شود. لذا علاوه بر اصول اولیه این تئوری، فرضیات زیر نیز در میدان جابه‌جایی ارائه شده برقرارند:

- جابه‌جایی‌ها در راستای محور z ، به مؤلفه‌های خمشی، برشی و کششی تقسیم می‌شوند.
- مؤلفه‌های برشی جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای منجر به تغییرات سینوسی کرنش‌های برشی می‌شوند.
- تنش در هر نقطه از سازه نه تنها به کرنش در همان نقطه، بلکه به کرنش‌ها در تمام نقاط دیگر سازه نیز وابسته است.
- جابه‌جایی‌ها در مقایسه با ضخامت صفحه کوچک هستند، لذا کرنش‌های ایجاد شده بسیار کوچک خواهند بود.

بنابراین با اعمال اثرات اندازه سازه به کمک تئوری غیر کلاسیک غیر محلی ارینگن و افزودن پارامترهای سینوسی، معادلات حاکم بر مسئله در مختصات استوانه‌ای و مقیاس نانو ارائه می‌شوند. همچنین به منظور بحث و بررسی رفتار ارتعاشی سیستم، نیروهای اعمال شده در اینجا تنش‌های ناشی از نانوسیال عبوری از درون نانوسازه و نیز انواع نیروهای حرارتی و اثرات ناشی از آنها مانند نیروی رطوبت حرارتی خواهند بود که در جهات و شرایط محیطی مختلف اعمال می‌شوند. علاوه بر این، عیوب هندسی یک پوسته با تنش اولیه صفر با تعریف جابه‌جایی w_0 در جهت عمود و اتخاذ جهت مثبت به سمت بیرون سازه نشان داده شده و اعمال می‌شود.

بر اساس این توضیحات، جهت به دست آوردن معادلات حاکم بر دینامیک نانوپوسته استوانه‌ای مدور حاوی نانوسیال با مدل پیشنهادی CSN-HSDT میدان جابه‌جایی‌های یک نقطه عمومی در صفحه میانی پوسته (u_θ, u_x, u_z) به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$u_x = u_0 + z\phi_1 + z^2\psi_1 + z^3\gamma_1 + z^4\theta_1 + \xi\phi_3 \quad (۱-الف)$$

$$u_\theta = (1 + \frac{z}{r})v_0 + z\phi_2 + z^2\psi_2 + z^3\gamma_2 + z^4\theta_2 + \xi\phi_4 \quad (۱-ب)$$

$$u_z = w_0 + w_b + w_s + z\chi \quad (ج-۱)$$

که در آن u_0 و v_0 توابع جابه‌جایی صفحه میانی پوسته به ترتیب در جهت‌های x و θ بوده و w_b و w_s به ترتیب مؤلفه‌های خمشی و برشی جابه‌جایی عرضی هستند. ϕ_1 و ϕ_2 دوران‌های متقاطع متعامد عرضی در نقطه $z = 0$ به ترتیب حول محورهای y و x هستند. لازم به ذکر است y مختصات منحنی الخط $(r+z)\theta$ به صورت عمود بر محورهای x و z است. همچنین، ϕ_3 و ϕ_4 دوران‌های صفحات yz و xz [۱۹] هستند. روابط ریاضی این چهار پارامتر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi_1 = -\frac{\partial w_b}{\partial x}, \phi_2 = -\frac{\partial w_b}{\partial \theta}, \phi_3 = -\frac{\partial w_s}{\partial x}, \phi_4 = -\frac{\partial w_s}{\partial \theta} \quad (۲)$$

بر اساس توضیحات پیشین، تعریف پارامتر w_0 به صورت یک جابه‌جایی افزوده برای محاسبه اثرات کششی عبارت خواهد بود از:

$$w_0 = \zeta(z)\varphi(x, y) \quad (۳)$$

علاوه بر این در روابط ۱-الف و ۱-ب توابع سینوسی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\xi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \quad (۴)$$

به طوری که تعریف پارامتر $\zeta(z)$ در رابطه ۳ عبارت است از:

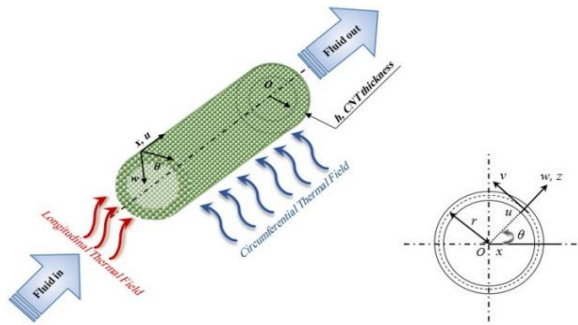
$$\zeta(z) = 1 - \xi'(z) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{h}z\right) \quad (۵)$$

که در آن $\xi'(z)$ بیانگر مشتق تابع سینوسی (معادله ۴) نسبت به z است. همچنین در معادلات ۱، $\psi_1, \psi_2, \gamma_1, \gamma_2, \theta_1, \theta_2$ و پارامتر افزوده χ تابعی هستند که به طور مستقیم یا غیرمستقیم بر اساس پنج متغیر بیان کننده تغییر شکل پوسته یعنی u_0, v_0, w_b, w_s و φ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

مربوطه $(\varepsilon_{zz}|_{z=0} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2}[(\frac{\partial u_x}{\partial z})^2 + (\frac{\partial u_\theta}{\partial z})^2 + (\frac{\partial u_z}{\partial z})^2])$ کرنش غیرخطی در راستای z ، متغیر اضافه شده χ به عنوان ششمین متغیر به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\chi \cong - \left(\frac{\partial w_0}{\partial z} + \frac{\partial w_b}{\partial z} + \frac{\partial w_s}{\partial z} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)^2} \right) \quad (8)$$

تقریب ارائه شده فوق برای مقادیر $\phi_1, \phi_2 \ll 1$ بسیار مناسب است. معادله ۸ نشان می‌دهد که این متغیر اضافه شده یک عبارت مرتبه دوم نسبت به سایر جابه‌جایی‌ها و دوران‌ها است. با توجه به توضیحات ارائه شده، در بسیاری از موارد می‌توان این متغیر را برابر با صفر تقریب زد.



شکل ۱. شماتیک یک نانولوله کربنی حاوی نانو سیال عبوری در سیستم مختصات پوسته استوانه‌ای با میدان‌های حرارتی طولی و محیطی.

۲-۱. ملاحظات حرارتی

به‌طور کلی در طی فرایندهای ساخت و کاربرد هر سازه و سیستمی تغییرات دمایی رخ می‌دهد. تغییرات دما از دو جنبه تأثیر گذارند: نخست این‌که، به جز موارد استثناء، مواد با گرم شدن منبسط و با سرد شدن منقبض می‌شوند و در بیشتر موارد این انبساط متناسب با تغییر دما است. به‌طوری‌که به‌عنوان مثال نسبت تغییر طول میله (ΔL) به طول اولیه آن (L) ، به دما (T) بستگی دارد. این رابطه خطی را از لحاظ ریاضی می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\varepsilon^{\text{Thermal}} = \frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \psi_2 \\ &= \frac{1}{2r} \phi_2 + \frac{1}{2r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\ &\quad - \frac{1}{2r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \\ \gamma_1 &= -\frac{4}{3h^2} \left(\phi_1 + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \\ \gamma_2 &= -\frac{4}{3h^2} \left[\phi_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^2}{8r^2} \left(\phi_2 - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - r \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \right] \\ \theta_1 &= 0, \quad \theta_2 = \frac{1}{4r} \gamma_2 - \frac{1}{4r^2} \psi_2 \end{aligned} \quad (6)$$

با وجود این‌که تغییر شکل برشی نقش کمتری نسبت به کرنش‌ها و خمش‌های درون صفحه‌ای دارد و کافی است که فقط شرایط جابه‌جایی خطی را در روابط کرنش برشی-جابه‌جایی حفظ کرد، به‌منظور دستیابی به نتایج دقیق در اینجا این پارامتر نیز در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود در معادلات ۱-الف و ۱-ب جابه‌جایی‌های درون صفحه تا مرتبه ۴ در راستای z بسط داده شده‌اند به‌طوری‌که توزیع مرتبه بالایی از اثرات برشی در راستای ضخامت را ارائه می‌دهند. این درحالی‌است که جابه‌جایی عمودی در رابطه ۱-ج به صورت خطی فرض شده است. به‌منظور دستیابی به روابط کرنش‌های برشی عرضی و پارامترهای استوانه‌ای تعریف شده در رابطه ۶، از معادلات زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{1 + (z/r)} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

پس از جای‌گذاری معادلات ۱-الف تا ج در روابط ۷ به‌منظور اضمحلال کرنش‌های برشی در سطوح بالا و پایین پوسته باید روابط $\gamma_{yz}|_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0$ و $\gamma_{xz}|_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0$ برقرار باشند. همچنین فرض بر این است که بردارهای عمود بر سطح میانی پوسته قبل و پس از تغییر شکل تغییر نکرده و کشیده یا فشرده نشوند. همچنین، با استفاده از تعریف

که در آن α ضریب انبساط حرارتی است. رابطه فوق به معنی برقرار بودن تناسب ثابتی بین کرنش حرارتی $(\Delta L/L)$ و تغییرات دما (ΔT) از یک دمای مرجع که در آن هیچ تنش حرارتی یا کرنش حرارتی وجود ندارد، است. تقریباً در همه مواد α ثابت است مگر این که یک تغییر فاز در ماده رخ دهد.

اثر عمده دوم تغییرات دما، مربوط به سختی و استحکام است. بیشتر مواد تحت تأثیر حرارت نرم‌تر، شکل‌پذیرتر و سست‌تر می‌شوند. برای یک ماده ارتوتروپیک مانند یک کامپوزیت، در هر یک از جهت‌های متعامد تا سه ضریب مختلف انبساط حرارتی و سه کرنش حرارتی مختلف می‌تواند وجود داشته باشد. در این صورت معادله ۹، هم برای کرنش و هم برای ضرایب انبساط حرارتی، دارای زیرنویس‌های ۱، ۲ و ۳ خواهد بود. لازم به ذکر است که در محورهای اولیه مواد، تمامی اثرات حرارتی فقط اتساعی بوده و هیچ اثر حرارتی در برش وجود ندارد [۲۰].

با فرض این که تغییرات حرارت در راستای ضخامت سازه از T_o در سطح خارجی پوسته تا T_i بر سطح داخلی آن صورت می‌پذیرد، رابطه تغییرات حرارتی را به صورت زیر می‌توان بیان کرد [۲۱]:

$$T = T_i - \Delta T \left(\frac{1}{2} + \frac{\hat{z}_c}{h} \right)^{\alpha_p} \quad (10)$$

که در آن α_p بیان‌گر شاخص توانی غیرمنفی تابع تغییرات دما است. در رابطه فوق با در نظر گرفتن $\alpha_p \geq 2$ تغییرات حرارتی در راستای ضخامت غیرخطی خواهند بود. همچنین اگر \hat{z} موقعیت تار خنثی در راستای محور \hat{z} باشد، \hat{z}_c به عنوان فاصله بین یک صفحه دلخواه تا تار خنثی به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۲]:

$$\hat{z}_c = \frac{\int_A \frac{E}{1-\nu^2} \hat{z} dA}{\int_A \frac{E}{1-\nu^2} dA} \quad (11)$$

از سوی دیگر، پدیده مهم فیزیکی دیگری به نام هایگروترمال نظر دانشمندان و مهندسين علم مواد را به خود جلب کرده و تلاش‌های تحقیقاتی قابل توجهی برای مطالعه و بررسی این پدیده صورت پذیرفته است [۲۳]. در تحقیقات مشخص شد که ترکیب دمای بالا و رطوبت بالا موجب دو چندان شدن اثرات مخرب بر روی عملکرد ساختاری سازه‌ها می‌شود. این مسئله در بردارنده این حقیقت است که ترکیب دمای بالا و رطوبت بالا، موجب حبس رطوبت به همراه افزایش وزن (۲٪) شده و با درجه اهمیت بالاتر، موجب تورق خواهد شد. همچنین دانشمندان نشان دادند که در ساختارهای مورد بررسی جذب رطوبت در لایه‌های مختلف سیستم به طور خطی با تورق ایجاد شده تغییر می‌کند [۲۴]. این تغییرات با استفاده از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\varepsilon_{\text{Hygrothermal}} = \frac{\Delta L}{L} = \beta \Delta m^H \quad (12)$$

که Δm^H میزان افزایش رطوبت از صفر و برحسب افزایش درصد وزنی و β ضریب انبساط رطوبت حرارتی متناظر با ضریب انبساط حرارتی نشان داده شده در معادله بالا است. لذا می‌توان ملاحظه کرد که اثرات رطوبت حرارتی از لحاظ ریاضی کاملاً مشابه اثرات حرارتی هستند. بنابراین برای مسائل ترموالاستیک، صرفاً با جای‌گذاری و یا اضافه کردن $\beta \Delta m^H$ به ترم‌های $\alpha \Delta T$ ، مسئله رطوبت حرارتی ارائه می‌شود. لذا برای دستیابی به روابط حاکم در محیط واقعی، کرنش‌های حرارتی و رطوبت حرارتی نیز باید مدنظر قرار گیرند. بنابراین با توجه به توضیحات ارائه شده داریم:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \varepsilon_i^{\text{Mechanical}} + \varepsilon_i^{\text{Thermal}} + \varepsilon_i^{\text{Hygrothermal}} & \text{for } i = 1, 2, 3 \\ \varepsilon_i^{\text{Mechanical}} & \text{for } i = 4, 5, 6 \end{cases} \quad (13)$$

و محیطی و نیز ضرایب انبساط حرارتی و رطوبتی متناسب با هر مورد به تفکیک مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۲-۲. فرمولبندی معادلات حاکم با استفاده از مدل

پیشنهادی CSN-HSDT

در این زیربخش، نخست برای دستیابی به معادلات حاکم بر مسئله، مجموعه معادلات اساسی یعنی معادلات سازگاری، معادلات ساختاری و معادلات تعادل براساس مدل پیشنهادی تغییر شکل برشی مرتبه بالای استوانه‌ای-سینوسی-غیرمحلّی استخراج و مورد بررسی قرار خواهند گرفت. سپس با استفاده از روش انرژی و با در نظر گرفتن شرایط مرزی مناسب معادلات حاکم ارائه و با استفاده از روش تحلیلی ناویر آن معادلات حل می‌شوند.

۲-۲-۱. معادلات سازگاری

در اینجا با در نظر گرفتن مختصات پوسته استوانه‌ای، روابط کرنش-جابجایی (معادلات سازگاری) با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای استوانه‌ای، سینوسی، غیرمحلّی ارائه می‌شوند. همچنین در این زیربخش به کرنش‌های حاصله از نیروهای حرارتی و رطوبتی اعمال شده نیز پرداخته می‌شود. لذا با در نظر گرفتن مؤلفه‌های کرنش در یک نقطه دلخواه از پوسته، معادلات سازگاری با توجه به مختصات و میدان جابجایی ارائه شده در معادله ۱ و فرضیه ون-کارمن برای روابط غیرخطی کرنش‌های مرتبط با جابجایی‌ها، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^0 + \lambda_x^0 + z(\lambda_x^{11} + z\lambda_x^{12} + z^2\lambda_x^{13}) + \xi\lambda_x^2 + \zeta\lambda_x^3 + \zeta^2\lambda_x^4 + \zeta z(\lambda_x^{51} + z\lambda_x^{52} + z^2\lambda_x^{53}) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \lambda_\theta^0 + z(\lambda_\theta^{11} + z\lambda_\theta^{12} + z^2\lambda_\theta^{13}) + \xi\lambda_\theta^2 + \zeta\lambda_\theta^3 + \zeta^2\lambda_\theta^4 + \zeta z(\lambda_\theta^{51} + z\lambda_\theta^{52} + z^2\lambda_\theta^{53}) \\ \varepsilon_{zz} &= \xi\varepsilon_{zz}^0 \\ \gamma_{x\theta} &= \gamma_{x\theta}^0 + \lambda_{x\theta}^0 + z(\lambda_{x\theta}^{11} + z\lambda_{x\theta}^{12} + z^2\lambda_{x\theta}^{13}) + \xi\lambda_{x\theta}^2 + \zeta\lambda_{x\theta}^3 + \zeta^2\lambda_{x\theta}^4 + \zeta z(\lambda_{x\theta}^{51} + z\lambda_{x\theta}^{52} + z^2\lambda_{x\theta}^{53}) \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{xz}^0 + \lambda_{xz}^0 + z(\lambda_{xz}^{11} + z\lambda_{xz}^{12} + z^2\lambda_{xz}^{13}) + \xi\lambda_{xz}^2 + \zeta\lambda_{xz}^3 + \zeta^2\lambda_{xz}^4 + \zeta z(\lambda_{xz}^{51} + z\lambda_{xz}^{52} + z^2\lambda_{xz}^{53}) \end{aligned} \quad (15)$$

ذکر این نکته مهم است که هرچند اثرات حرارتی و رطوبتی متناظر هستند، ولی آنها دارای مقیاس‌هایی با مرتبه‌های متفاوت هستند. برای یک ساختار تحت تغییرات دمایی، چند دقیقه یا حداکثر یک ساعت زمان برای رسیدن به تعادل در یک دمای جدید لازم است، ولی در ساختاری مشابه حتی در صورتی که آن ساختار خشک باشد و در یک محیط با درصد رطوبت نسبی بالایی قرار گیرد، هفته‌ها یا ماه‌ها زمان خواهد برد تا به تعادل رطوبتی (اشباع) برسد. معادلات ۹ و ۱۲ رابطه‌های خطی از تغییرات دما هستند. در این تحقیق به منظور بررسی اثرات تغییرات غیرخطی حرارت و رطوبت این روابط تعمیم داده شده و در معادلات حاکم اعمال می‌شود.

بدین منظور فرض می‌شود که تغییرات غیرخطی حرارت در راستای ضخامت سازه از T_o در سطح خارجی پوسته تا T_i بر سطح داخلی آن صورت می‌پذیرد. لازم به ذکر است هرچند درصد اثرات رطوبت حرارتی به حرارت اعمال شده بستگی دارد و با محاسبه اثرات حرارتی و درصد رطوبت موجود می‌توان میزان تأثیرگذاری آن را تخمین زد، ولی برای محاسبه مستقل آن نیز می‌توان با توجه به معادله حرارت، رابطه‌ای معرفی و ارائه نمود. لذا روابط تغییرات حرارتی و رطوبتی را به صورت زیر می‌توان نوشت [۲۴]:

$$T = T_i - \Delta T \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{\alpha_p} \quad (14\text{-الف})$$

$$m^H = m_i^H - \Delta m^H \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{\alpha_p} \quad (14\text{-ب})$$

که در آن Δm^H میزان تغییرات رطوبت در راستای ضخامت از m_o^H در سطح بیرونی تا m_i^H بر روی سطح داخلی سازه است. در بخش‌های بعدی اثرات میدان‌های حرارتی و رطوبتی اعمال شده در راستاهای طولی، محیطی و هم‌زمان در دو جهت طولی

$$\gamma_{\theta z} = \gamma_{\theta z}^0 + \lambda_{\theta z}^0 + z(\lambda_{\theta z}^{11} + z\lambda_{\theta z}^{12} + z^2\lambda_{\theta z}^{13}) + \xi\lambda_{\theta z}^2 + \zeta\lambda_{\theta z}^3 + \zeta^2\lambda_{\theta z}^4 + \zeta z(\lambda_{\theta z}^{51} + z\lambda_{\theta z}^{52} + z^2\lambda_{\theta z}^{53})$$

که در آن؛

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_{zz}^0 = \varphi, \quad (۱۶-الف)$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta}, \quad \gamma_{xz}^0 = \phi_1, \quad \gamma_{\theta z}^0 = \phi_2$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_x^0 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right], \\ \lambda_\theta^0 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\varphi}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{v_0}{r} \right)^2 \right] \\ \lambda_{x\theta}^0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial \theta}, \quad \lambda_{xz}^0 = 0, \quad \lambda_{\theta z}^0 = 0 \end{aligned} \right. \quad (۱۶-ب)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_x^{11} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \quad \lambda_\theta^{11} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \right), \\ \lambda_{x\theta}^{11} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right), \\ \lambda_{xz}^{11} &= \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \lambda_{\theta z}^{11} = \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \end{aligned} \right. \quad (۱۶-ج)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_x^{12} &= 0, \quad \lambda_\theta^{12} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right), \\ \lambda_{x\theta}^{12} &= +\frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta} \right) \\ \lambda_{xz}^{12} &= -\frac{4}{h^2} \left(\phi_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right), \quad \lambda_{\theta z}^{12} = -\frac{4}{h^2} (\phi_2) + \frac{v_0}{r^3} \end{aligned} \right. \quad (۱۶-د)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_x^{13} &= -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right), \quad \lambda_{xz}^{13} = \lambda_{\theta z}^{13} = 0 \\ \lambda_\theta^{13} &= -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{3r^2} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \right) \\ \lambda_{x\theta}^{13} &= -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) + \frac{1}{6r^2} \left(-\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right), \end{aligned} \right. \quad (۱۶-ه)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_x^2 &= -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \quad \lambda_\theta^2 = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_4}{\partial \theta} \right), \quad \lambda_z^2 = \varphi \\ \lambda_{x\theta}^2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right), \\ \lambda_{xz}^2 &= \lambda_{\theta z}^2 = 0 \end{aligned} \right. \quad (۱۶-و)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_x^3 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w_s}{\partial x}, \\ \lambda_\theta^3 &= \frac{1}{r^2} \left(\varphi \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \varphi \right) + \frac{\varphi}{r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial w_s}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \\ \lambda_{x\theta}^3 &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w_b}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w_s}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{\partial w_0}{\partial x} \left(-\frac{2v_0}{R} \right) + \frac{2\varphi}{R} \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \lambda_{xz}^3 &= -\phi_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \lambda_{\theta z}^3 = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial w_s}{\partial \theta} \end{aligned} \right. \quad (۱۶-ز)$$

$$\begin{cases} \lambda_x^4 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2, \quad \lambda_{xz}^4 = \lambda_{\theta z}^4 = 0, \\ \lambda_\theta^4 = \left(\frac{\varphi}{r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2, \\ \lambda_{xy}^4 = \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta} + \frac{3}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{cases} \quad (۱۶-ح)$$

$$\begin{cases} \lambda_x^{51} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \lambda_\theta^{51} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \\ \lambda_{x\theta}^{51} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right), \\ \lambda_{xz}^{51} = \lambda_{\theta z}^{51} = 0 \end{cases} \quad (۱۶-ط)$$

$$\begin{cases} \lambda_x^{52} = 0, \quad \lambda_\theta^{52} = \frac{1}{2r^3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \\ \lambda_{x\theta}^{52} = \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta}, \\ \lambda_{xz}^{52} = -\frac{4}{h^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right), \quad \lambda_{\theta z}^{52} = -\frac{4}{rh^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (۱۶-ی)$$

$$\begin{cases} \lambda_x^{53} = -\frac{4}{3h^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \lambda_{xz}^{53} = 0, \quad \lambda_{\theta z}^{53} = 0 \\ \lambda_\theta^{53} = -\frac{4}{3r^2 h^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{3r^4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \\ \lambda_{x\theta}^{53} = -\frac{8}{3rh^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta}\right) + \frac{1}{6r^3} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta}\right) \end{cases} \quad (۱۶-ک)$$

۲-۲-۲. معادلات ساختاری

نانوساختارها به دلیل عامل تأثیرگذار اندازه و اثراتی مانند تنش سطحی، گرادیان‌های کرنش و غیرمحملی بودن اثر تنش، رفتاری متفاوت با رفتار سازه در مقیاس ماکرو خواهند داشت. بررسی‌ها نشان می‌دهند نتایج حاصل از تئوری غیرمحملی ارینگن تطابق بسیار مناسبی با نتایج حاصل از دینامیک مولکولی دارد [۲۵]. مطابق با روابط و معادلات دیفرانسیلی حاکم بر این تئوری، قانون هوک برای روابط تنش و کرنش در مختصات استوانه‌ای (قطبی) در اینجا به صورت زیر بیان خواهد شد [۲۶]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{x\theta} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = (e_0 a)^2 \nabla^2 \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{x\theta} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (۱۷)$$

$$= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

که در آن روابط $Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = \frac{E}{1-\nu^2}$ ، $Q_{12} = Q_{13} =$ و $Q_{23} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}$ و $Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E}{1+\nu}$ برقرار بوده و عملگر لاپلاسیان عبارت است از $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

۲-۲-۳. معادلات تعادل

معادلات تعادل استاتیکی روابط بین نیروها و ممان‌های داخلی با تنش‌ها که به صورت انواع متجه‌های تنش و کوپل بیان می‌شوند هستند که براساس تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و مدل پیشنهادی در این تحقیق به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Gamma^j - (e_0 a)^2 \nabla^2 \Gamma^j = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_i \nu^j dz, \text{ for } i, j = 1, 2, 3 \quad (۱۸)$$

که در آن:

در روابط فوق $N_i, M_i^b, M_i^s, R_i^b, R_i^s, P_i^b, P_i^s, Q_i^a, Q_i^b, Q_i^c, Q_i^d$ N_i, M_i^b, M_i^s به ترتیب بیانگر نیروهای محوری، ممان‌های خمشی، ممان‌های برشی و نیروهای برشی در مرتبه‌های بالا هستند. همچنین با تعریف پارامترهای زیر،

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= N_i, M_i^b, M_i^s, R_i^b, R_i^s, P_i^b, P_i^s, Q_i^a, Q_i^b, Q_i^c, Q_i^d \\ \Upsilon^1 &= 1, z, \xi, z^2, z^3, \zeta, \zeta^2, z\zeta, z^2\zeta, z^3\zeta, z^2\zeta^2 \quad \square \\ &\quad \square \text{for } i = xx, \theta\theta, x\theta \\ \Gamma^2 &= S_i^a, S_i^b, S_i^c, S_i^d, S_i^e \\ \Upsilon^2 &= 1, \zeta, z, z^2, z^2\zeta \\ &\quad \text{for } i = xz, \theta z \quad \square\square\square\square \\ \Gamma^3 &= N_i \\ \Upsilon^3 &= \zeta' \\ &\quad \square \quad \text{for } i = zz \quad \square \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \left(A_{ij}, B_{ij}^a, B_{ij}^b, B_{ij}^c, B_{ij}^d, B_{ij}^e, B_{ij}^f, C_{ij}^a \right) \\ & \square = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, \xi, \xi^2, \right) Q_{ij} dz \\ & \left(F_{ij}^a, F_{ij}^b, F_{ij}^c, F_{ij}^d, F_{ij}^e, F_{ij}^f, \right) \\ & \left(O_{ij}^a, O_{ij}^b, O_{ij}^c, O_{ij}^d, O_{ij}^e, O_{ij}^f \right) \\ & \square = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(z\zeta, z^2\zeta, z^3\zeta, z^4\zeta, z^5\zeta, z^6\zeta, \right. \\ & \quad \left. z\zeta^2, z^2\zeta^2, z^3\zeta^2, z^4\zeta^2, z^5\zeta^2, z^6\zeta^2 \right) Q_{ij} dz \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(H_{ij}^a, H_{ij}^b, S_{ij}^a, S_{ij}^b, S_{ij}^c, S_{ij}^d, \right) \\ & \left(S_{ij}^e, T_{ij}^a, T_{ij}^b, K_{ij}^a, K_{ij}^b, K_{ij}^c, K_{ij}^d \right) \\ & \square = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\xi\zeta, \xi\zeta^2, z\zeta^3, z^2\zeta^3, z^3\zeta^3, z^4\zeta^3, z^5\zeta^3, \right) \\ & \quad \left(z\zeta^4, z^2\zeta^4, z\xi\zeta, z^2\xi\zeta, z^3\xi\zeta, z^2\xi\zeta^2 \right) Q_{ij} dz \\ & \left(L_{ij}^a, L_{ij}^b, L_{ij}^c, L_{ij}^d, L_{ij}^e, L_{ij}^f, L_{ij}^g, L_{ij}^h, L_{ij}^i \right) \\ & \square = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\zeta', z\zeta', z^2\zeta', z^3\zeta', \xi\zeta', \zeta\zeta', \zeta^2\zeta', \right) \\ & \quad \left(z\zeta\zeta', z^2\zeta\zeta', z^3\zeta\zeta', z^2\zeta^2\zeta', \zeta'^2 \right) Q_{ij} dz \end{aligned}$$

که در آن‌ها $i, j = 1, \dots, 6$ بوده و سپس با گسسته‌سازی روابط و مرتب‌سازی و نیز با در نظر داشتن کرنش‌های حرارتی و رطوبتی در روابط ۱۳، رابطه ۱۸ را به فرم ماتریسی زیر می‌توان بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [\vartheta_1] & [\vartheta_2] & [\vartheta_3] & [\vartheta_4] \\ [\vartheta_5] & [\vartheta_6] & [\vartheta_7] & [\vartheta_8] \\ [\vartheta_9] & [\vartheta_{10}] & [\vartheta_{11}] & [\vartheta_{12}] \\ [\vartheta_{13}] & [\vartheta_{14}] & [\vartheta_{15}] & [\vartheta_{16}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A_1] \\ [A_2] \\ [A_3] \\ [A_4] \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} [\omega_1^T] \\ [\omega_2^T] \\ [\omega_3^T] \\ [\omega_4^T] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [\omega_1^H] \\ [\omega_2^H] \\ [\omega_3^H] \\ [\omega_4^H] \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} [\omega_5] \\ [\omega_6] \end{bmatrix} - (e_0 a)^2 \nabla^2 \begin{bmatrix} [\omega_5] \\ [\omega_6] \end{bmatrix} \quad (21) \quad \text{ب} \\ & = \begin{bmatrix} [\vartheta_{17}] \\ [\vartheta_{18}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A_5] \\ [A_6] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

که در این روابط،

$$\begin{aligned} [\omega_1] &= [N_{xx} \quad N_{\theta\theta} \quad N_{x\theta} \quad N_{zz} \quad M_{xx}^b \quad M_{\theta\theta}^b \quad M_{x\theta}^b \quad M_{xx}^s \quad M_{\theta\theta}^s]^T \\ [\omega_2] &= [M_{x\theta}^s \quad P_{xx}^b \quad P_{\theta\theta}^b \quad P_{x\theta}^b \quad P_{xx}^s \quad P_{\theta\theta}^s \quad P_{x\theta}^s \quad R_{xx}^b \quad R_{\theta\theta}^b]^T \\ [\omega_3] &= [R_{x\theta}^b \quad R_{xx}^s \quad R_{\theta\theta}^s \quad R_{x\theta}^s \quad Q_{xx}^a \quad Q_{\theta\theta}^a \quad Q_{x\theta}^a \quad Q_{xx}^b \quad Q_{\theta\theta}^b]^T \\ [\omega_4] &= [Q_{x\theta}^b \quad Q_{xx}^c \quad Q_{\theta\theta}^c \quad Q_{x\theta}^c \quad Q_{xx}^d \quad Q_{\theta\theta}^d \quad Q_{x\theta}^d]^T \\ [\omega_5] &= [S_{xz}^a \quad S_{xz}^b \quad S_{xz}^c \quad S_{xz}^d \quad S_{xz}^e]^T \\ [\omega_6] &= [S_{\theta z}^a \quad S_{\theta z}^b \quad S_{\theta z}^c \quad S_{\theta z}^d \quad S_{\theta z}^e]^T \end{aligned} \quad (22\text{-الف})$$

$$\begin{aligned} [\omega_1^T] &= [N_{xx}^T \quad N_{\theta\theta}^T \quad N_{x\theta}^T \quad N_{zz}^T \quad M_{xx}^{bT} \quad M_{\theta\theta}^{bT} \quad M_{x\theta}^{bT} \quad M_{xx}^{sT} \quad M_{\theta\theta}^{sT}]^T \\ [\omega_2^T] &= [M_{x\theta}^{sT} \quad P_{xx}^{bT} \quad P_{\theta\theta}^{bT} \quad P_{x\theta}^{bT} \quad P_{xx}^{sT} \quad P_{\theta\theta}^{sT} \quad P_{x\theta}^{sT} \quad R_{xx}^{bT} \quad R_{\theta\theta}^{bT}]^T \\ [\omega_3^T] &= [R_{x\theta}^{bT} \quad R_{xx}^{sT} \quad R_{\theta\theta}^{sT} \quad R_{x\theta}^{sT} \quad Q_{xx}^{aT} \quad Q_{\theta\theta}^{aT} \quad Q_{x\theta}^{aT} \quad Q_{xx}^{bT} \quad Q_{\theta\theta}^{bT}]^T \\ [\omega_4^T] &= [Q_{x\theta}^{bT} \quad Q_{xx}^{cT} \quad Q_{\theta\theta}^{cT} \quad Q_{x\theta}^{cT} \quad Q_{xx}^{dT} \quad Q_{\theta\theta}^{dT} \quad Q_{x\theta}^{dT}]^T \end{aligned} \quad (ب-۲۲)$$

$$\begin{aligned} [\omega_1^H] &= [N_{xx}^H \quad N_{\theta\theta}^H \quad N_{x\theta}^H \quad N_{zz}^H \quad M_{xx}^{bH} \quad M_{\theta\theta}^{bH} \quad M_{x\theta}^{bH} \quad M_{xx}^{sH} \quad M_{\theta\theta}^{sH}]^T \\ [\omega_2^H] &= [M_{x\theta}^{sH} \quad P_{xx}^{bH} \quad P_{\theta\theta}^{bH} \quad P_{x\theta}^{bH} \quad P_{xx}^{sH} \quad P_{\theta\theta}^{sH} \quad P_{x\theta}^{sH} \quad R_{xx}^{bH} \quad R_{\theta\theta}^{bH}]^T \\ [\omega_3^H] &= [R_{x\theta}^{bH} \quad R_{xx}^{sH} \quad R_{\theta\theta}^{sH} \quad R_{x\theta}^{sH} \quad Q_{xx}^{aH} \quad Q_{\theta\theta}^{aH} \quad Q_{x\theta}^{aH} \quad Q_{xx}^{bH} \quad Q_{\theta\theta}^{bH}]^T \\ [\omega_4^H] &= [Q_{x\theta}^{bH} \quad Q_{xx}^{cH} \quad Q_{\theta\theta}^{cH} \quad Q_{x\theta}^{cH} \quad Q_{xx}^{dH} \quad Q_{\theta\theta}^{dH} \quad Q_{x\theta}^{dH}]^T \end{aligned} \quad (ج-۲۲)$$

$$\begin{aligned} [A_1] &= [\varepsilon_{xx}^0 + \lambda_x^0 \quad \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \lambda_\theta^0 \quad \gamma_{x\theta}^0 + \lambda_{x\theta}^0 \quad \varepsilon_{zz}^0]^T \\ [A_2] &= [\lambda_x^{11} \quad \lambda_\theta^{11} \quad \lambda_{x\theta}^{11} \quad \lambda_x^{12} \quad \lambda_\theta^{12} \quad \lambda_{x\theta}^{12} \quad \lambda_x^{13} \quad \lambda_\theta^{13} \quad \lambda_{x\theta}^{13}]^T \\ [A_3] &= [\lambda_x^2 \quad \lambda_\theta^2 \quad \lambda_{x\theta}^2 \quad \lambda_x^3 \quad \lambda_\theta^3 \quad \lambda_{x\theta}^3 \quad \lambda_x^4 \quad \lambda_\theta^4 \quad \lambda_{x\theta}^4]^T \\ [A_4] &= [\lambda_x^{51} \quad \lambda_\theta^{51} \quad \lambda_{x\theta}^{51} \quad \lambda_x^{52} \quad \lambda_\theta^{52} \quad \lambda_{x\theta}^{52} \quad \lambda_x^{53} \quad \lambda_\theta^{53} \quad \lambda_{x\theta}^{53}]^T \\ [A_5] &= [\gamma_{xz}^0 \quad \lambda_{xz}^{11} \quad \lambda_{xz}^{12} \quad \lambda_{xz}^{13} \quad \lambda_{xz}^2 \quad \lambda_{xz}^3 \quad \lambda_{xz}^4 \quad \lambda_{xz}^{51} \quad \lambda_{xz}^{52} \quad \lambda_{xz}^{53}]^T \\ [A_6] &= [\gamma_{\theta z}^0 \quad \lambda_{\theta z}^{11} \quad \lambda_{\theta z}^{12} \quad \lambda_{\theta z}^{13} \quad \lambda_{\theta z}^2 \quad \lambda_{\theta z}^3 \quad \lambda_{\theta z}^4 \quad \lambda_{\theta z}^{51} \quad \lambda_{\theta z}^{52} \quad \lambda_{\theta z}^{53}]^T \end{aligned} \quad (د-۲۲)$$

$$\begin{aligned} &= Q_{11} h \alpha_{xx} \Delta T + Q_{12} h \alpha_{\theta\theta} \Delta T \\ N_{\theta\theta}^T &= A_{21} \alpha_{xx} \Delta T + A_{22} \alpha_{\theta\theta} \Delta T \\ &\quad + L_{23}^a \alpha_{zz} \Delta T \\ &= Q_{21} h \alpha_{xx} \Delta T + Q_{22} h \alpha_{\theta\theta} \Delta T \\ N_{x\theta}^T &= A_{66} \alpha_{x\theta} \Delta T = Q_{66} h \alpha_{x\theta} \Delta T \\ N_{xx}^H &= A_{11} \alpha_{xx} \Delta m^H + A_{12} \alpha_{\theta\theta} \Delta m^H \\ &\quad + L_{13}^a \alpha_{zz} \Delta m^H \\ &= Q_{11} h \alpha_{xx} \Delta m^H + Q_{12} h \alpha_{\theta\theta} \Delta m^H \\ N_{\theta\theta}^H &= A_{21} \alpha_{xx} \Delta m^H + A_{22} \alpha_{\theta\theta} \Delta m^H \\ &\quad + L_{23}^a \alpha_{zz} \Delta m^H \\ &= Q_{21} h \alpha_{xx} \Delta m^H + Q_{22} h \alpha_{\theta\theta} \Delta m^H \\ N_{x\theta}^H &= A_{66} \alpha_{x\theta} \Delta m^H = Q_{66} h \alpha_{x\theta} \Delta m^H \\ M_i^{bT} &= M_i^{sT} = R_i^{bT} = R_i^{sT} = P_i^{bT} = P_i^{sT} \\ &= Q_i^{aT} = Q_i^{bT} = Q_i^{cT} = Q_i^{dT} = 0 \\ M_i^{bH} &= M_i^{sH} = R_i^{bH} = R_i^{sH} = P_i^{bH} = P_i^{sH} \\ &= Q_i^{aH} = Q_i^{bH} = Q_i^{cH} = Q_i^{dH} = 0 \end{aligned}$$

با جای گذاری معادلات ۲۲-الف تا ۲۲-د و ۲۴ در معادلات ۲۱-الف و ۲۱-ب و نیز با در نظر داشتن روابط ۲۰، روابط نیروها و ممان‌ها در معادله ۲۱ به صورت تفکیک شده به دست می‌آیند. در نهایت، با جای گذاری مؤلفه‌های کرنش از معادله سازگاری تعریف شده (معادلات ۱۶-الف تا ۱۶-ک) در معادلات ساختاری به دست آمده، مؤلفه‌های نیرو و ممان پوسته استوانه‌ای غیرمحلی حاصل خواهند شد.

همچنین پارامترهای حرارتی و رطوبتی در روابط ۲۲-ب و ۲۲-ج به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} & \left(N_i^T, M_i^{bT}, M_i^{sT}, R_i^{bT}, R_i^{sT}, P_i^{bT}, \right. \\ & \left. P_i^{sT}, Q_i^{aT}, Q_i^{bT}, Q_i^{cT}, Q_i^{dT} \right) = \\ & \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\vartheta] \alpha_i \Delta T \left(1, z, \xi, z^2, z^3, \zeta, \zeta^2 \right) dz \\ & \left(N_i^H, M_i^{bH}, M_i^{sH}, R_i^{bH}, R_i^{sH}, \right. \\ & \left. P_i^{bH}, P_i^{sH}, Q_i^{aH}, Q_i^{bH}, Q_i^{cH}, Q_i^{dH} \right) = \\ & \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\vartheta] \beta_i \Delta m^H \left(z\zeta, z^2\zeta, z^3\zeta, z^2\zeta^2 \right) dz \\ & \text{for } i = xx, \theta\theta, x\theta \end{aligned} \quad (۲۳)$$

لازم به ذکر است همان‌طور که در بخش ۱-۲ ذکر شد در محورهای اولیه مواد، تمامی اثرات حرارتی و بالتبع رطوبتی فقط اتساعی بوده و هیچ اثر حرارتی و رطوبتی به صورت نیروهای اعمال شده ممان برشی، خمشی و ... وجود ندارد [۲۰ و ۲۷]. لذا از حالت کلی معادله ۲۳ می‌توان به روابط خلاصه شده زیر دست‌یافت که در آن فقط نیروهای حرارتی و رطوبت حرارتی اتساعی به سیستم مورد بررسی اعمال می‌شوند:

$$N_{xx}^T = A_{11} \alpha_{xx} \Delta T + A_{12} \alpha_{\theta\theta} \Delta T + L_{13}^a \alpha_{zz} \Delta T \quad (۲۳)$$

۳-۲. معادلات حرکت حاکم

برای دستیابی به معادلات حاکم بر مسئله در این جا از اصل همیلتون (روش انرژی) استفاده می‌شود. با استفاده از این اصل داریم [۲۸]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U_{\text{Total}} dt = 0 \quad (۲۵)$$

که در آن

$$\begin{aligned} U_{\text{Total}} &= U_{\text{Potentialenergy}} - U_{\text{kineticenergy}} \\ U_{\text{Potentialenergy}} &= U_{\text{strainenergy}} \\ &\quad + U_{\text{extraenergy}} \\ &\quad + U_{\text{dissipationenergy}} \\ U_{\text{extraenergy}} &= U_{\text{bodyforceworks}} \\ &\quad + U_{\text{surfaceforceworks}} \end{aligned} \quad (۲۶)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} U_{\text{bodyforceworks}} &= U_{\text{elongationforce}} \\ U_{\text{surfaceforceworks}} &= U_{\text{externalwork}} \end{aligned} \quad (۲۷)$$

بر اساس بررسی‌ها و فرضیات الاستیسیته غیرخطی ورق و پوسته‌های استوانه‌ای و نیز مطابق با نتایج برخی از مراجع [۲۹] می‌توان نتیجه گرفت که کرنش‌های خطی در انرژی پتانسیل کرنشی ($U_{\text{strainenergy}}$) و کرنش‌های غیرخطی در بخش نیروهای حجمی انرژی پتانسیل نیروهای اعمالی یعنی ($U_{\text{bodyforcesworks}}$) ظاهر و اعمال می‌شوند.

در رابطه ۲۵ اپراتور δ بیان گر تغییرات و متغیر t معرف زمان است به طوری که انتگرال گیری در بازه زمانی $t_2 - t_1$ انجام می‌شود. در این جا با صرف نظر از اتلاف انرژی، تغییرات انرژی کرنشی، کار مجازی و انرژی جنبشی در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \delta U_{\text{strainenergy}} &= \int_{-L}^L \int_0^{2k\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} (\sigma_i \delta \varepsilon_i) dx d\theta dz \end{aligned} \quad (الف-۲۹)$$

$$\delta U_{\text{extraenergy}} = - \int_{-L}^L \int_0^{2k\pi} [p(x, \theta) \delta w] dx d\theta \quad (ب-۲۹)$$

$$\begin{aligned} \delta U_{\text{kineticenergy}} &= \int_{-L}^L \int_0^{2k\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (\dot{u}_j \delta \dot{u}_j) dx d\theta dz \end{aligned} \quad (ج-۲۹)$$

در روابط فوق بازه متغیرهای i و j با توجه به فرضیات در نظر گرفته شده که در زیربخش‌های بعدی به آنها اشاره می‌شود تعریف خواهد شد. با دستیابی به معادلات ساختاری در بخش پیشین، نخست انرژی کرنشی نانوپوسته کرنی در نظر گرفته شده مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه پس از تعیین کار نیروی مجازی و انرژی جنبشی سازه و سیال مورد بررسی، رابطه نهایی معادلات حاکم بر مسئله حاصل خواهد شد.

۳-۲-۱. انرژی کرنشی

با تعریف Ω که بیان گر سطح (یعنی $d\Omega = dx d\theta$) است، تغییرات انرژی کرنشی یعنی معادله ۲۹-الف را به صورت زیر می‌توان بیان کرد [۳۰]:

$$\begin{aligned} \delta U_{\text{strainenergy}} &= \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_i \delta \varepsilon_i) d\Omega dz, \quad \text{for } i \\ &= 1, \dots, 6 \end{aligned} \quad (۳۰)$$

با جای گذاری کرنش‌ها و تنش‌های حاصله معادلات ۱۵ و ۱۸ (معادلات سازگاری و تعادل) در معادله ۳۰ و با توجه به تعریف کلی منتجه‌های تنش و کوپل در تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی سینوسی-غیرمحللی در مختصات استوانه‌ای، رابطه انرژی کرنشی فوق به شکل گسسته و تفکیک شده به دست می‌آید.

۳-۲-۲. کار مجازی

همان طور که پیش تر ذکر شد، تغییرات کار مجازی را با استفاده از رابطه ۲۹-ب می‌توان به دست آورد [۳۱]. این بخش از انرژی پتانسیل در دو نوع کلی نیروهای حجمی مانند وزن و نیروهای سطحی (بارهای گسترده) مانند فشار هیدرواستاتیک هستند که بر سیستم اعمال می‌شوند. این نیروها را در اینجا به صورت خلاصه زیر می‌توان تفکیک و تعریف کرد [۳۲]:

باید یکسان باشند. لذا برای یافتن سرعت کل سیستم می‌توان سرعت سیال در نقطه برخورد با سازه را محاسبه کرد. علاوه بر این، در اینجا هم سازه و هم سیال عبوری در مقیاس نانوسکوپی بوده و بنابراین اثرات اندازه نیز باید در روابط لحاظ شوند. همچنین لازم به ذکر است در اینجا به‌طور عمومی فرض می‌شود سیال فقط در جهت طولی سرعت (\dot{u}_x) خواهد داشت.

حال با استفاده از مشتق مادی در مختصات استوانه‌ای که به‌صورت $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\dot{u}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$ تعریف می‌شود، معادله ۳۲ را براساس هریک از معادلات میدان جابه‌جایی (روابط ۱-الف تا ۱-ج) می‌توان گسسته‌سازی کرد. لازم به ذکر است برای به‌دست آوردن معادله حرکت سیال از معادله تعادل مومنتوم که به معادله ناویر-استوکس مشهور است نیز استفاده می‌شود. این معادله در سه جهت مختصات استوانه‌ای عبارت خواهد بود از [۳۴]:

$$\begin{aligned} & \rho_f \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\dot{u}_\theta}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} - \frac{\dot{u}_\theta^2}{r} \right. \\ & \quad \left. + \dot{u}_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \\ & \quad + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) - \frac{\dot{u}_x}{r^2} + \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right] + \\ & \quad \sigma(u_x \times \vec{B}) \times \vec{B}, \\ & \rho_f \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\dot{u}_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{\dot{u}_x \dot{u}_\theta}{r} \right. \\ & \quad \left. + \dot{u}_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta \\ & \quad + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right) - \frac{\dot{u}_\theta}{r^2} + \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] + \\ & \quad \sigma(u_\theta \times \vec{B}) \times \vec{B}, \\ & \rho_f \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\dot{u}_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \dot{u}_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\delta U_{b.f.works} = - \int_A \left\{ (N_{xx}^T + N_{xx}^H) \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial \delta u_z}{\partial x} + \left(\frac{N_{\theta\theta}^T + N_{\theta\theta}^H}{r^2} \right) \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \frac{\partial \delta u_z}{\partial \theta} \right\} r dx d\theta \quad (31-الف)$$

$$\delta U_{s.f.works} = - \int_S (q_p - f_z) \delta u_z r dx d\theta \quad (31-ب)$$

در روابط فوق $N_{\theta\theta}^T, N_{\theta\theta}^H, N_{xx}^T, N_{xx}^H$ بیان‌گر نیروهای حرارتی و رطوبتی هستند که از روابط حاصله در معادله ۲۴ جایگزین می‌شوند. گفتنی است مقدار و جهت میدان نیروهای حرارتی و رطوبتی وارده می‌توانند موجب بروز اثرات متفاوتی در سیستم شوند. همچنین q_p نیروی برشی ناشی از بستر الاستیکی و f_z نماینده سایر نیروهای سطحی اعمال شده بر تار خنثی است. در این‌جا هدف تنها بررسی اثرات انواع میدان‌های حرارتی و رطوبتی بر انتشار امواج در نانوسیستم است.

۳-۳-۲. انرژی جنبشی

تغییرات انرژی جنبشی برای سیستمی مرکب از سیال و سازه به‌طور جداگانه در مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیر قابل محاسبه است [۳۳]:

$$\begin{aligned} \delta U_{kineticenergy} & = \delta K_{structure} + \delta K_{fluid} \\ & = (\rho_c + \rho_f) \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\dot{u}_i \delta \dot{u}_j) r d\Omega dz, \end{aligned} \quad (32)$$

for $\Omega \ni j = x, \theta, z$

که در آن \dot{u}_z سرعت سازه یا سیال در جهت z و ρ_c و ρ_f به‌ترتیب چگالی سازه (در اینجا نانوپوسته کربنی) و سیال است. در مسائلی که علاوه بر سرعت جسم، از طرف سیال و یا ذره عبوری نیز بر جسم نیرو وارد می‌شود، به‌منظور حل دقیق‌تر مسئله باید به بررسی میزان اثر این نیروی خارجی بر رفتار جنبشی جسم نیز توجه شود. لذا سازه و سیال عبوری به‌طور کلی یک سیستم در نظر گرفته می‌شوند. در این مسائل که به مسئله برهم‌کنش سیال و سازه (FSI) نیز مشهور است، براساس اصل فیزیکی شرط سازگاری از نظر فیزیک مولکولی در نقطه برخورد سازه و سیال، سرعت‌ها و شتاب‌ها در راستای جهت جابه‌جایی

$$= -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \sigma(u_z \times \vec{B}) \times \vec{B}$$

در سمت راست روابط فوق، P فشار سیال، μ ویسکوزیته سیال و جمله آخر نیروی لورنتس تحت میدان مغناطیسی B است (به‌عنوان مثال میدان مغناطیسی جانبی $B = B_0 \sin \theta \vec{k}$ که در آن B_0 نشان‌دهنده قدرت میدان مغناطیسی است). همچنین، σ بیان‌گر رسانایی الکتریکی است. بنابراین، با در نظر گرفتن یک سیستم مختصات استوانه‌ای و یک منطقه کاملاً توسعه یافته برای جریان سیال در داخل پوسته، می‌توان معادله تکانه حرکت سیال در جهات مختلف را به‌دست آورد. سپس با حل این معادله، نیروی ناشی از سیال مغناطیسی که باعث ایجاد ارتعاشات می‌شود (نیروی مربوط به گرادیان فشار) به‌دست می‌آید.

با در نظر گرفتن شرایط و فرضیات در هر مسئله و انتگرال‌گیری در معادله ۳۲، معادلات حاصل شده نهایی منطبق بر معادلات ناور-استوکس خواهند بود. این نتایج با استفاده از مشتق مادی مؤلفه‌های رابطه ۳۲ شامل سرعت‌ها و تغییرات آنها هم برای سازه و هم برای سیال به‌طور جداگانه به‌دست می‌آیند. با جای‌گذاری این سرعت‌ها و تغییرات آنها در رابطه ۳۲ و پس از ضرب، انتگرال‌گیری، گسسته‌سازی و ساده‌سازی روابط به‌دست آمده، تغییرات انرژی جنبشی برای سازه مورد بررسی یعنی نانوپوسته کربنی و سیال داخل آن حاصل خواهد شد.

علاوه‌براین، در معادلات حاکم به‌منظور اعمال اثر مقیاس نانو در سیالات و نیز اثر شرط مرزی لغزشی سیال عبوری، از پارامتر بی‌بعدی با نام فاکتور اصلاح سرعت (VCF) استفاده شده است بدین صورت که در معادلات حاصله هر کجا که پارامتر سرعت سیال وجود دارد باید در ضریب VCF ضرب شود. در این تحقیق، VCF به‌صورت نسبت سرعت متوسط جریان سیال در

شرط مرزی لغزشی به سرعت متوسط جریان در شرط مرزی عدم-لغزش، تعریف و جایگزین شده است [۳۴]:

$$VCF = \frac{V_{slip}}{V_{no-slip}} \quad (34)$$

$$= \frac{1}{Cr(Kn)} \left(4 \left(\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \right) \left(\frac{Kn}{1 - bKn} \right) + 1 \right)$$

که در آن $V_{no-slip}$ و V_{slip} به‌ترتیب بیان‌گر سرعت سیال با و بدون شرایط مرزی لغزشی هستند. Kn بیان‌گر عدد نادسن^۶ است که برای تعیین رژیم جریان سیالات مختلف اعم از مایع یا گاز استفاده می‌شود. در رابطه فوق، σ_v و b به‌ترتیب نمایش‌دهنده ضریب تصحیح مومنتوم مماسی و ضریب لغزش کلی هستند و $Cr(Kn)$ بیان‌گر ضریب تراکم (رقیق‌شدگی) سیال بوده و به‌صورت نسبت لزجت دینامیکی به لزجت کل (بالک) سیال تعریف می‌شود. این ضریب بر اساس روابط پیشنهادی پلارد^۸ برای سیال ویسکوز به‌صورت $Cr(Kn) = \frac{1}{(1 + \alpha Kn)}$ محاسبه می‌شود [۳۵]. در این رابطه، α یک مقدار ثابت تئوری است که با استفاده از رابطه $\alpha = \left(\frac{2}{r}\right) \alpha_0 [\tan^{-1}(\alpha_k Kn^B)]$ محاسبه می‌شود به‌طوری‌که $\alpha_0 = \frac{64}{(3\pi(1 - \frac{4}{b}))}$ است. سایر پارامترهای مجهول در روابط فوق مانند α_k و B از پارامترهای تجربی هستند که مقادیر آنها با استفاده از مشاهدات آزمایشگاهی به‌دست آمده‌اند. این مقادیر و نیز مقادیر مورد استفاده به‌عنوان عدد نادسن در جدول ۱ ارائه شده‌اند. از طرفی در اینجا فرض بر این است که نانوسیال عبوری دارای خصوصیات مغناطیسی باشد. به‌عنوان مثال، میدان مغناطیسی می‌تواند مشخصات سیال عبوری را از یک فرم سهموی به یک قالب بسل تغییر دهد، لذا برای در نظر گرفتن تغییر مشخصات سرعت سیال و نیز شرایط مرزی لغزشی سیال، ضریب تصحیح سرعت به شرح زیر تعریف می‌شود [۳۶]:

$$VCF = 8 \frac{\left(Ha^2 \left(\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \right) \left(\frac{Kn}{1 + Kn} \right) I_0(1, Ha) \right) + I_0(0, Ha) Ha - 2I_0(1, Ha)}{Ha^3 I_0(0, Ha)} \quad (35)$$

مجموعه‌ای از روابط دیفرانسیل و جبری بین تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی‌هایی است که سیستم مورد نظر را تشریح می‌کند. در این بخش، با تعیین شرایط مرزی مناسب، معادلات میدانی تکمیل شده و در نهایت فرم بی‌بعد معادلات به صورت تحلیلی حل می‌شود.

۳-۱. معادلات برهم‌کنش نانوسیال-نانوسازه (Nano-FSI)

در این زیربخش با ترکیب نتایج به دست آمده مربوط به انرژی پتانسیل (انرژی کرنشی)، کار نیروی مجازی و انرژی جنبشی، معادلات حرکت نهایی حاکم بر مسئله برهم‌کنش نانوپوسته حاوی نانوسیال عبوری تحت نیروهای حرارتی و رطوبتی حاصل می‌شود. این معادلات پس از جای‌گذاری‌ها و استفاده از معادلات سازگاری، معادلات ساختاری و معادلات تعادل در زیربخش ۲-۲، استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء و مرتب‌سازی در نهایت با اعمال تئوری الاستیسیته غیرمحلّی براساس مؤلفه‌های جابه‌جایی به صورت گسسته به دست خواهند آمد.

پس از انتگرال‌گیری، گسسته‌سازی و جمع‌آوری ضرایب δu_0 ، δv_0 ، $\delta \varphi$ ، δw_b ، δw_s و $\delta \chi$ معادلات حرکت حاکم بر نانوپوسته‌ی دارای حرکت محوری حاوی نانوسیال مغناطیسی تحت اعمال میدان‌های حرارتی، رطوبتی، الکتریکی و مغناطیسی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\delta u_0: \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (N_{xx} \frac{\partial u_0}{\partial x}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{\theta\theta} \frac{\partial u_0}{\partial \theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} N_{x\theta} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} N_{x\theta} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial M_{x\theta}^b}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial M_{x\theta}^s}{\partial \theta} = (I_0^c + I_0^f) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + 2(\dot{u}_{xc} I_0^c + (VCF) \dot{u}_{xf} I_0^f) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} - I_1^c \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} + (\dot{u}_{xc}^2 I_0^c + (VCF)^2 \dot{u}_{xf}^2 I_0^f) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - (c_1 I_3^c + J_0^{1c}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial t^2} - J_3^c c_1 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} - \left(\frac{I_2^c}{2} + c_1 I_4^c \right) \frac{\partial^3 \chi}{\partial x \partial t^2} \quad (36\text{-الف})$$

$$\delta v_0: \frac{\partial}{\partial x} (N_{xx} \frac{\partial v_0}{\partial x}) + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{\theta\theta} \frac{\partial v_0}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2} N_{\theta\theta} v_0 - \frac{1}{r^3} \frac{\partial R_{\theta\theta}^b}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta\theta}^b \varphi) + \frac{1}{r^2} (P_{\theta\theta}^b \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^3} S_{\theta z}^d + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} N_{x\theta} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} N_{x\theta} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{x\theta}^b}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{x\theta}^s}{\partial x} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial x} P_{x\theta}^b \varphi + \frac{2}{r} P_{x\theta}^b \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \quad (36\text{-ب})$$

در این رابطه Ha ، σ_v ، Kn و I_0 به ترتیب عدد هارتمن^۱، ضریب تصحیح مومنتوم مماسی، عدد نادسن و تابع بسل اصلاح شده را نشان می‌دهند. عدد هارتمن که نشان‌دهنده خواص مغناطیسی جریان سیال است را می‌توان به صورت $Ha = B_0 r_i \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}$ محاسبه کرد که در آن شعاع داخلی پوسته است [۳۷]. مقدار پارامتر σ_v را می‌توان از $\sigma_v = \frac{\tau_i - \tau_r}{\tau_i - \tau_w}$ تعیین کرد که در آن τ_i ، τ_r و τ_w به ترتیب ممان‌های مماسی مولکول‌های ورودی، انعکاسی و بازتولید شده هستند.

جدول ۱. مقادیر پارامترهای جریان نانوسیال [۳۳]

پارامتر	نماد	محدوده مقدار
عدد نادسن	Kn	برای مایعات $0.01 - 1$
ضریب تصحیح مومنتوم مماسی	σ_v	0.1
ضریب لغزش کلی	b	-1
سایر پارامترهای آزمایشگاهی	a_k, B	0.4

۳. روند حل

در بخش‌های پیشین معادلات میدان با استفاده از تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و مدل پیشنهادی استوانه‌ای - سینوسی - غیرمحلّی حاصل شدند. این معادلات شامل

$$\left(I_0^c + \frac{2I_1^c}{r} + \frac{I_2^c}{r^2} \right) \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + 2\dot{u}_{xc} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial t} + \dot{u}_{xc}^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right] - \bar{I}_1 \frac{\partial^3 w_b}{\partial \theta \partial t^2} + \bar{I}_2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \theta \partial t^2} + \bar{I}_3 \frac{\partial^3 w_s}{\partial \theta \partial t^2} + \bar{I}_4 \frac{\partial^3 \chi}{\partial \theta \partial t^2} +$$

$$I_0^f + \frac{2I_1^f}{r} + \frac{I_2^f}{r^2} \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + 2(\text{VCF})\dot{u}_{xf} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial t} + (\text{VCF})^2 \dot{u}_{xf}^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right]$$

$\delta\varphi$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (P_{xx}^s \frac{\partial \varphi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} (P_{xx}^b \frac{\partial w_b}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} (P_{xx}^h \frac{\partial w_s}{\partial x}) - \frac{\partial^2 P_{xx}^s}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (Q_{xx}^a \frac{\partial \chi}{\partial x}) + \frac{4}{3h^2} \frac{\partial^2 Q_{xx}^c}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \times \\ & (P_{\theta\theta}^s \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta\theta}^b \frac{\partial w_b}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta\theta}^h \frac{\partial w_s}{\partial \theta}) + \frac{1}{r} P_{\theta\theta}^b + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta\theta}^b \frac{\partial v_0}{\partial \theta}) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta\theta}^b v_0) - \\ & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P_{\theta\theta}^s}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} P_{\theta\theta}^s \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (Q_{\theta\theta}^a \frac{\partial \chi}{\partial \theta}) - \frac{1}{r^2} Q_{\theta\theta}^a - \frac{1}{2r^3} \frac{\partial^2 Q_{\theta\theta}^b}{\partial \theta^2} + \frac{4}{3r^2 h^2} \frac{\partial^2 Q_{\theta\theta}^c}{\partial \theta^2} + \frac{1}{3r^4} \frac{\partial^2 Q_{\theta\theta}^c}{\partial \theta^2} + N_{zz} \\ & + \frac{\partial S_{xz}^b}{\partial x} - \frac{4}{h^2} \frac{\partial S_{xz}^a}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\theta z}^b}{\partial \theta} - \frac{4}{rh^2} \frac{\partial S_{\theta z}^a}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{x\theta}^b \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{x\theta}^b \frac{\partial w_s}{\partial x} + \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} P_{x\theta}^b \frac{\partial w_b}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} P_{x\theta}^b \frac{\partial w_s}{\partial \theta} + \frac{2}{r} P_{x\theta}^b \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial x} P_{x\theta}^b v_0 - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 P_{x\theta}^s}{\partial x \partial \theta} + \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{x\theta}^s \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\ & \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial x} P_{x\theta}^s \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} Q_{x\theta}^a \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} Q_{x\theta}^a \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^2 Q_{x\theta}^b}{\partial x \partial \theta} + \frac{8}{3rh^2} \frac{\partial^2 Q_{x\theta}^c}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{6r^3} \frac{\partial^2 Q_{x\theta}^c}{\partial x \partial \theta} \\ & + \left(N_{xx}^T + N_{xx}^H + N_{xx}^E + \frac{1}{r^2} N_{\theta\theta}^T + \frac{1}{r^2} N_{\theta\theta}^H \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K_w \varphi - K_s \nabla^2 \varphi + \eta H_x^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_b}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) = J_3^c c_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - J_6^c c_1^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} - J_4^c c_1 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} - \left(\frac{J_3^c c_1}{J_6^c c_1^2} + \right) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} \\ & - \left(\frac{J_5^c c_1}{2} + J_7^c c_1^2 \right) \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial t^2} + \bar{I}_2 \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta \partial t^2} + \bar{I}_5 \frac{\partial^4 w_b}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \bar{I}_6 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \bar{I}_7 \frac{\partial^4 w_s}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \bar{I}_8 \frac{\partial^4 \chi}{\partial \theta^2 \partial t^2} \\ & + \left(\frac{J_0^{3c}}{J_0^{3f}} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ & + (J_0^{2c} + J_0^{2f}) \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + (J_1^{2c} + J_1^{2f}) \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + (2\dot{u}_{xc} + 2(\text{VCF})\dot{u}_{xf}) \left(J_0^{3f} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + J_0^{2f} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} \right. \\ & \left. + J_0^{2f} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial t} + J_1^{2f} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} \right) + (\dot{u}_{xc}^2 + (\text{VCF})^2 \dot{u}_{xf}^2) \left(\frac{J_0^{3f} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + J_0^{2f} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}}{+ J_0^{2f} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + J_1^{2f} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}} \right) \end{aligned} \tag{ج-۳۶}$$

δw_b :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_{xx}^b}{\partial x^2} - \frac{4}{3h^2} \frac{\partial^2 R_{xx}^s}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (P_{xx}^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 M_{\theta\theta}^b}{\partial \theta^2} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^2 R_{\theta\theta}^b}{\partial \theta^2} - \frac{4}{3rh^2} \frac{\partial^2 R_{\theta\theta}^s}{\partial \theta^2} - \frac{2}{3r^3} \frac{\partial^2 R_{\theta\theta}^s}{\partial \theta^2} + \\ & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta\theta}^b \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}) - \frac{\partial S_{xz}^a}{\partial x} + \frac{4}{h^2} \frac{\partial S_{xz}^d}{\partial x} - \frac{\partial S_{\theta z}^b}{\partial \theta} + \frac{4}{h^2} \frac{\partial S_{\theta z}^d}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 M_{x\theta}^b}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_{x\theta}^b}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 R_{x\theta}^b}{\partial x \partial \theta} \\ & + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 R_{x\theta}^b}{\partial x \partial \theta} - \frac{4}{3rh^2} \frac{\partial^2 R_{x\theta}^s}{\partial x \partial \theta} - \frac{4}{3h^2} \frac{\partial^2 R_{x\theta}^s}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{6r^2} \frac{\partial^2 R_{x\theta}^s}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 M_{x\theta}^s}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_{x\theta}^s}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} P_{x\theta}^b \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{x\theta}^b \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \left(\frac{N_{xx}^T + N_{xx}^H + N_{xx}^E}{+ \frac{1}{r^2} N_{\theta\theta}^T + \frac{1}{r^2} N_{\theta\theta}^H} \right) \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - K_w w_b + K_s \nabla^2 w_b + \eta H_x^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_b}{\partial \theta^2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) \\ & = I_1^c \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - c_1 J_4^c \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} - I_2^c \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} - (c_1 I_4^c + J_1^{1c}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} - \left(c_1 I_5^c + \frac{I_3^c}{2} \right) \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial t^2} + \end{aligned} \tag{د-۳۶}$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{I}_1 \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta \partial t^2} - \bar{I}_9 \frac{\partial^4 w_b}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \bar{I}_5 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \bar{I}_{10} \frac{\partial^4 w_s}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \bar{I}_{11} \frac{\partial^4 \chi}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \left(\frac{J_0^{2c}}{+J_0^{2f}} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\
 & \quad + \left(\frac{I_0^c}{+I_0^f} \right) \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + (I_1^c + I_1^f) \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + (2\dot{u}_{xc} + 2(\text{VCF})\dot{u}_{xf}) \left[J_0^{2f} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \right. \\
 & \quad \left. + I_0^f \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} + I_0^f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial t} + I_1^f \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} \right] + (\dot{u}_{xc}^2 + (\text{VCF})^2 \dot{u}_{xf}^2) \left[J_0^{2f} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + I_0^f \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + I_0^f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + I_1^f \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right] \\
 & \delta w_s: \\
 & \frac{\partial^2 M_{xx}^s}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (P_{xx}^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 M_{\theta\theta}^s}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{\theta\theta}^b \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}) + \frac{\partial S_{xz}^b}{\partial x} + \frac{\partial S_{\theta z}^b}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} P_{x\theta}^b \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{x\theta}^b \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\
 & \left(N_{xx}^T + N_{xx}^H + N_{xx}^E + \frac{1}{r^2} N_{\theta\theta}^T + \frac{1}{r^2} N_{\theta\theta}^H \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + K_w w_s - K_s \nabla^2 w_s + \eta H_x^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_b}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) \\
 & = (c_1 I_3^c + J_0^{1c}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - (c_1 I_4^c + J_1^{1c}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} - (c_1^2 J_6^{2c} + c_1 J_3^{4c}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} \\
 & \quad - (c_1^2 I_6^c + 2c_1 J_3^{1c} + J_1^{4c}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} - \left(\frac{c_1}{2} I_5^c + \frac{J_2^{1c}}{2} + c_1^2 I_7^c + c_1 J_4^{1c} \right) \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial t^2} \tag{9-36} \\
 & \quad + \bar{I}_3 \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta \partial t^2} + \bar{I}_{10} \frac{\partial^4 w_b}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \bar{I}_7 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \bar{I}_{12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \bar{I}_{13} \frac{\partial^4 \chi}{\partial \theta^2 \partial t^2} \\
 & \quad + (J_0^{2c} + J_0^{2f}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + (I_0^c + I_0^f) \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + (I_1^c + I_1^f) \times \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \\
 & \quad + (2\dot{u}_{xc} + 2(\text{VCF})\dot{u}_{xf}) \left[\begin{array}{l} J_0^{2f} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + I_0^f \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} \\ + I_0^f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial t} + I_1^f \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

لازم به ذکر است در معادلات حاصل شده فوق روابط زیر
تعریف و ارائه شده‌اند:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{4}{3h^2}, \quad c_2 = -\frac{h^2}{8r^2}, \quad c_3 = \frac{1}{2r} \\
 c_4 &= \frac{1}{3h^2}, \quad c_5 = -\frac{1}{r^2}, \quad c_6 = \frac{1}{r^3} \\
 \{I_m^n\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^n z^m dz, \\
 \{J_m^{1n}\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^n \xi z^m dz \\
 \{J_m^{2n}\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^n \zeta z^m dz \\
 \{J_m^{3n}\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^n \zeta^2 z^m dz \\
 \{J_1^{4n}, J_2^{4n}, J_3^{4n}, J_4^{4n}\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^n (\xi^2, \zeta \xi z^2, \zeta \xi z^3, \zeta \xi z^4) dz \text{ for } \begin{cases} m = 0, \dots, 10 \\ n = f, c \end{cases} \tag{37-f} \\
 & \quad \text{ب}
 \end{aligned}$$

$$\bar{I}_1 = \left[\begin{array}{l} \left(I_1^c + \frac{I_2^c}{r} \right) + c_1 \left(I_3^c + \frac{I_4^c}{r} \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] \\ + \frac{c_1 c_3}{2} \left(I_4^c + \frac{I_5^c}{r} \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{ـ۳۸} \\ \text{الف} \end{array}$$

$$\bar{I}_2 = \left[\begin{array}{l} c_3 \left(J_2^{2c} + \frac{J_3^{2c}}{r} \right) - \frac{c_1}{r} \left(J_3^{2c} + \frac{J_4^{2c}}{r} \right) [1 + c_2] \\ - \frac{1}{r^2} \left(J_4^{2c} + \frac{J_5^{2c}}{r} \right) \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \end{array} \right] \quad \text{بـ۳۸}$$

$$\bar{I}_3 = \left[\begin{array}{l} c_3 \left(I_2^c + \frac{I_3^c}{r} \right) - \frac{c_1}{r} \left(I_0^c + \frac{I_1^c}{r} \right) [1 + c_2] + \\ c_5 \left(I_4^c + \frac{I_5^c}{r} \right) \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) - \left(J_0^{1c} + \frac{J_1^{1c}}{r} \right) \end{array} \right] \quad \text{جـ۳۸}$$

$$\bar{I}_4 = \left[\begin{array}{l} c_3 \left(I_3^c + \frac{I_4^c}{r} \right) - c_3 \left(I_2^c + \frac{I_3^c}{r} \right) - \\ \frac{c_1}{r} \left(I_4^c + \frac{I_5^c}{r} \right) [1 + c_2] - c_1 c_2 \left(I_3^c + \frac{I_4^c}{r} \right) \\ - c_3^2 \left(I_5^c + \frac{I_6^c}{r} \right) \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] + \frac{c_6}{6} \left(I_4^c + \frac{I_5^c}{r} \right) \end{array} \right] \quad \text{دـ۳۸}$$

$$\bar{I}_5 = \left[\begin{array}{l} \left(c_3 J_3^{2c} + c_1 c_3 J_5^{2c} + \frac{c_1 c_3^2}{2} J_6^{2c} \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] + \\ \left(-\frac{c_1}{r} J_4^{2c} - \frac{c_1^2}{r} J_6^{2c} + \frac{c_1^2 c_5}{4} J_7^{2c} \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] [1 + c_2] \\ + (c_5 J_5^{2c} + c_1 c_5 J_7^{2c}) \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \\ + \left(-\frac{c_1 c_6}{4} J_8^{2c} \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \end{array} \right] \quad \text{هـ۳۸}$$

$$\bar{I}_6 = \left[\begin{array}{l} c_3^2 J_4^{3c} - c_6 J_6^{3c} \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) + c_1 c_5 J_5^{3c} [1 + c_2] \\ - c_1^2 c_5 J_6^{3c} [1 + c_2]^2 + 2 c_1 c_6 J_7^{3c} [1 + c_2] \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \\ + c_5^2 J_8^{3c} \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right)^2 \end{array} \right] \quad \text{وـ۳۸}$$

$$\bar{I}_7 = \left[\begin{array}{l} + c_3^2 J_4^{2c} + \frac{c_1 c_5}{2} J_2^{2c} [1 + c_2] - c_6 J_6^{2c} \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \\ - c_3 J_2^{4c} - \frac{c_1 c_6}{2} J_5^{2c} [1 + c_2] - c_1^2 c_5 J_3^{2c} [1 + c_2]^2 \\ + c_1 c_6 J_7^{2c} [1 + c_2] \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) + 2 c_1 c_3 J_3^{4c} [1 + c_2] + \\ c_1 c_6 J_4^{2c} \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) [1 + c_2] + c_5^2 J_8^{2c} \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right)^2 \\ - c_5 J_4^{4c} \left(c_4 [1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \end{array} \right] \quad \text{زـ۳۸}$$

$$\bar{I}_8 = \left[\begin{aligned} & c_3^2(J_5^{2c} - J_4^{2c}) - c_1c_2c_3J_5^{2c} + \frac{c_3c_6}{6}J_6^{2c} + \\ & \left(c_1c_5J_6^{2c} - \frac{c_1c_5}{2}J_5^{2c} + \frac{c_1^2c_2}{r}J_6^{2c} - \frac{c_1c_3c_6}{3}J_7^{2c} \right) [1 + c_2] \\ & - c_3^3J_7^{2c} \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] - c_1^2c_5J_7^{2c} [1 + c_2]^2 + \\ & \frac{c_1c_6}{4}J_8^{2c} [1 + c_2] \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] \\ & + \left(c_3c_5J_7^{2c} - c_3c_5J_6^{2c} - c_1c_2c_5J_7^{2c} + \frac{c_5c_6}{6}J_8^{2c} \right) \left(c_4[1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \\ & + c_1c_6J_8^{2c} \left(c_4[1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) [1 + c_2] \\ & - c_3^2c_5J_9^{2c} \left(c_4[1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] \end{aligned} \right] \quad (ج-۳۸)$$

$$\bar{I}_9 = \left[\begin{aligned} & \left(I_2^c + 2c_1I_4^c + c_1^2I_6^c \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right]^2 + \\ & 2 \left(\frac{c_1c_3}{2}I_5^c + \frac{c_1^2c_3}{2}I_7^c \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right]^2 \\ & + \left(\frac{c_1c_3}{2} \right)^2 I_8^c \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right]^2 \end{aligned} \right] \quad (ب-۳۸)$$

$$\bar{I}_{10} = \left[\begin{aligned} & \left[c_3I_3^c - \frac{c_1}{r}I_1^c [1 + c_2] + c_5I_5^c \left(c_4[1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) - J_1^{1c} \right. \\ & \left. + \left(c_1c_3I_5^c - c_1J_3^{1c} - \frac{c_1c_5}{8}I_6^c - \frac{c_1c_3}{2}J_4^{1c} \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] \right] \\ & - \left(\frac{c_1^2}{r}I_3^c + (c_1c_3)^2I_4^c \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] [1 + c_2] \\ & + \left(c_1c_5I_7^c - \frac{c_1c_6}{4}I_8^c \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] \left(c_4[1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \end{aligned} \right] \quad (د-۳۸)$$

$$\bar{I}_{11} = \left[\begin{aligned} & \left[c_3(I_4^c - I_3^c) - \frac{c_1}{r}I_5^c [1 + c_2] - c_1c_2I_4^c + \frac{c_5}{4}I_6^c \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] + \right. \\ & \left. \frac{c_6}{6}I_5^c + \left(\frac{c_1c_3I_6^c - c_1c_3I_5^c - c_1^2c_2I_6^c}{6} + \frac{c_1c_6}{8}I_7^c - \frac{c_1c_5}{8}I_7^c + \frac{c_1c_5}{8}I_6^c \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] \right. \\ & \left. - \frac{c_1^2c_2c_3}{2}I_7^c + \frac{c_1c_3c_6}{12}I_8^c \right] \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] \\ & - \left(\frac{c_1^2}{r}I_7^c + (c_1c_3)^2I_8^c \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] [1 + c_2] \\ & - \left(c_1c_3^2I_8^c + \frac{c_1c_3^3}{2}I_9^c \right) \left[-1 + \frac{1}{r} + c_2 + \frac{c_2}{r} \right] \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] \end{aligned} \right] \quad \begin{matrix} -۳۸) \\ (ک) \end{matrix}$$

$$\bar{I}_{12} = \left[\begin{aligned} & c_3^2I_4^c - 2c_3J_2^{1c} + J_1^{4c} + \left(c_1c_5I_2^c + \frac{2c_1}{r}J_0^{1c} \right) [1 + c_2] \\ & - c_1^2c_5[1 + c_2]^2 - (c_6I_6^c + 2c_5J_4^{1c}) \left(c_4[1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) + \\ & 2c_1c_6I_4^c [1 + c_2] \left(c_4[1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) + c_5^2I_8^c \left(c_4[1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right)^2 \end{aligned} \right] \quad (ج-۳۸)$$

$$\bar{I}_{13} = \left[\begin{aligned} & c_3^2(I_5^c - I_4^c) - c_1c_2c_3I_5^c + \frac{c_3c_6}{6}I_6^c - c_3(J_3^{1c} - J_2^{1c}) \\ & + c_1c_2J_3^{1c} - \frac{c_6}{6}J_4^{1c} - (c_3^3I_7^c - c_3^2J_5^{1c}) \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] \\ & + \left(\frac{c_1c_5}{2}(I_6^c + I_3^c - I_2^c) - \frac{c_1^2c_2}{r}I_3^c - \frac{c_1c_6}{6r}I_4^c + \frac{c_1}{r}J_4^{1c} \right) [1 + c_2] \\ & - c_1^2c_5I_4^c[1 + c_2]^2 + \frac{c_1c_3^2}{r}I_5^c[1 + c_2] \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] + \\ & \left(c_3c_5I_7^c - c_3c_5I_6^c - c_1c_2c_5I_7^c + \frac{c_5c_6}{6}I_8^c \right) \left(c_4[1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \\ & - \frac{c_1c_5}{r}I_8^c \left(c_4[1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) [1 + c_2] \\ & - c_3^2c_5I_9^c \left(c_4[1 + c_2] + \frac{c_3}{4} \right) \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] \end{aligned} \right] \quad (م-۳۸)$$

$$\bar{I}_{14} = \left[\begin{aligned} & c_3^2(I_6^c - 2I_5^c + I_4^c) - 2c_1c_2c_3(I_6^c - I_5^c) \\ & + \frac{c_3c_6}{3}(I_7^c - I_6^c) + c_1^2c_2^2I_6^c - \frac{c_1c_2c_6}{3}I_7^c + \left(\frac{c_6}{6}\right)^2I_8^c \\ & - \left(\frac{2c_1c_3}{r}I_7^c - \frac{2c_1c_3}{r}I_6^c - \frac{2c_1^2c_2}{r}I_7^c + \frac{2c_1c_6}{6r}I_8^c \right) [1 + c_2] - \\ & \left(2c_3^3I_8^c - 2c_3^3I_7^c - 2c_1c_2c_3^2I_8^c + \frac{2c_3^2c_6}{6}I_9^c \right) \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] \\ & + \frac{2c_1c_3^2}{r}I_9^c[1 + c_2] \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right] + \frac{c_1^2}{r^2}I_8^c[1 + c_2]^2 \\ & + \left(\frac{c_5}{4}\right)^2I_{10}^c \left[c_1 + \frac{c_5}{6} + c_3 \right]^2 \end{aligned} \right] \quad (ن-۳۸)$$

۳-۲. شرایط مرزی

بارگذاری مرزی که به صورت فیزیکی باعث ایجاد تنش، کرنش و میدان جابجایی داخلی می‌شود، نقش عمده‌ای در نحوه عملکرد و رفتار مکانیکی سیستم دارد. اگرچه فرمول‌بندی معادلات میدانی برای هر تئوری مشخص است، اما شرایط مرزی در هر مسئله متفاوت بوده و بنابراین تعیین شرایط مرزی مناسب برای حل مسئله ضروری است. در اینجا با تعریف تابع θ به‌عنوان تابعی که شرایط مرزی هندسی را مشخص می‌کند تابع مشخصه محوری نانو سازه مورد بررسی به صورت زیر محاسبه و انتخاب می‌شود [۳۸]:

$$\theta(x) = \alpha_1 \cosh\left(\frac{\ell_m x}{L}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{\ell_m x}{L}\right) - \kappa_m \left[\alpha_3 \sinh\left(\frac{\ell_m x}{L}\right) + \alpha_4 \sin\left(\frac{\ell_m x}{L}\right) \right] \quad (۳۹)$$

در روابط حاصله در این تحقیق زیر نویس / بالانویس c بیان‌گر پارامترهای مرتبط با نانوپوسته کربنی و زیر نویس / بالانویس f مربوط به پارامترهای سیال مورد نظر هستند. لازم به ذکر است فشار دینامیکی که ناشی از برهم‌کنش سیال و سازه بوده و با استفاده از مشتق مادی به‌طور خودکار در معادلات حرکت ظاهر می‌شود، شامل عباراتی با ضرایبی به صورت $\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right)$ ، $\dot{u}_{xf}^2 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)$ و $2\dot{u}_{xf} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x}\right)$ است که به ترتیب بیان‌گر نیروهای داخلی ناشی از شتاب انتقالی عرضی، نیروی داخلی برآمده از شتاب گریز از مرکز و نیروی داخلی ناشی از شتاب کوریولیس هستند. همچنین فشار خارجی یعنی فشار کلی که از طرف نانوپوسته بر سیال وارد می‌شود (فشار بار) و کشش خارجی اعمال شده بر نانوپوسته از طرف سیال (فشار رانش) در سراسر لوله ثابت مانده و یکدیگر را خنثی می‌کنند [۹].

N برابر با فرکانس نایکوئیست خواهد بود. همچنین t بیان گر زمان و i پارامتری برابر با $\sqrt{-1}$ است. با جای گذاری روابط معادله ۴۱ در معادلات حرکت حاکم و در اینجا با فرض $\theta = \pi/2$ ، یک مسئله مقدار ویژه تعمیم یافته حاصل می شود که پس از فاکتورگیری از عبارات مثلثاتی و ضرایب جابه جایی، به فرم ماتریسی زیر به دست می آید:

$$[\mathbf{X}_1][\mathbf{X}_2] = [\mathbf{X}_3] \quad (42)$$

که در آن

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_1] &= ([K] + i\omega[C] - \omega^2[M]), \\ [\mathbf{X}_2] &= [U \otimes V \otimes \Phi \otimes W_b \otimes W_s \otimes X]^T, \\ [\mathbf{X}_3] &= [F_1 \otimes F_2 \otimes F_3 \otimes F_4 \otimes F_5 \otimes F_6]^T \end{aligned} \quad (43)$$

معادله ۴۲ جواب نخواهد داشت مگر این که دترمینان ماتریس ضرایب (ماتریس $[\mathbf{X}_1]$) برابر با صفر باشد؛ لذا با برابر صفر قرار دادن مقدار این دترمینان، مقدار و جواب های غیربدیهی فرکانس های سیستم حاصل خواهند شد. در روابط فوق F_i ($i = 1, \dots, 6$) مربوط به نیروهای اعمالی خارجی است و برای حالت ارتعاشات آزاد مقادیر F_i برابر با صفر در نظر گرفته می شوند. همچنین $[K]_{6 \times 6}$ ، $[C]_{6 \times 6}$ و $[M]_{6 \times 6}$ به ترتیب نمایش دهنده ماتریس های سختی، میرایی و جرم بوده که تابعی از عدد موج k هستند.

همچنین لازم به ذکر است که بین فرکانس سیستم و عدد موج رابطه ای به صورت $\omega = kv_p$ برقرار است که در آن v_p بیانگر سرعت فاز سیستم است. علاوه بر این، هر چند که این موضوع مورد بحث اصلی در این تحقیق نیست ولی یادآوری می شود که با میل کردن عدد موج به سمت صفر ($k \rightarrow 0$) در سیستم، فرکانسی به صورت فرکانس برش ایجاد می شود. تعداد این فرکانس ها به تعداد ریشه دترمینان ماتریس ضرایب بستگی دارد. همچنین با میل کردن عدد موج به سمت بی نهایت ($k \rightarrow \infty$) فرکانس ایجاد شده به عنوان فرکانس مجانب شناخته می شود.

که در آن α_i ($i = 1, \dots, 4$) ثابت هایی هستند که بسته به نوع انتهای پوسته یا لوله می توانند مقادیر ۰، ۱ یا -۱ داشته باشند. همچنین l_m و κ_m به ترتیب بیان گر ریشه معادلات غیرجبری به دست آمده از شرایط مرزی نانوپوسته و پارامترهای متناظر با آنها هستند. براساس شرایط هندسی و دینامیکی سیستم در نظر گرفته شده و دستیابی به موج های هارمونیک در مسئله برهم کنش نانو سازه-نانوسیال در اینجا شرایط مرزی دو سر ساده به صورتی که یکی از دو انتهای سازه محدود شده باشد در نظر گرفته می شود که شرایط زیر را ارضاء کنند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_z(x, \theta, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u_z(x, \theta, t)}{\partial \theta^2} = 0 \\ u_x(x, \theta, t) &= u_\theta(x, \theta, t) = u_z(x, \theta, t) = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

لذا معادله ۳۹ به صورت ساده شده ی $\theta(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ درآمده و در معادلات حرکت سیستم تحت نیروهای هیدرو دینامیکی، حرارتی و رطوبتی اعمال می شود.

براساس شرایط مرزی اساسی و به منظور حل تحلیلی معادلات نهایی حاکم با استفاده از روش ناویر و دستیابی به انتشار موج هارمونیک زمانی، مقدار متغیرهای میدانی در نانو سازه یعنی u_0 ، v_0 ، φ ، w_b ، w_s و χ به صورت زیر در نظر گرفته می شوند [۳۹]:

$$\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \varphi \\ w_b \\ w_s \\ \chi \end{Bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^N \begin{Bmatrix} U e^{i\left(\frac{\pi}{L} k_x \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + k_\theta \cos\theta - \omega t\right)} \\ V e^{i\left(k_x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + k_\theta \sin\theta - \omega t\right)} \\ \Phi e^{i\left(k_x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + k_\theta \cos\theta - \omega t\right)} \\ W_b e^{i\left(k_x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + k_\theta \cos\theta - \omega t\right)} \\ W_s e^{i\left(k_x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + k_\theta \cos\theta - \omega t\right)} \\ X e^{i\left(k_x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + k_\theta \cos\theta - \omega t\right)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

که در آن U ، V ، Φ ، W_b ، W_s و X دامنه ها و ضرایب مجهول حرکت موج بوده و k_x و k_θ دو مؤلفه بردار موج هستند که به زاویه عدد موج k در راستای جهت انتشار در صفحه ی $x-\theta$ بستگی دارند. ω فرکانس حرکت موج سیستم است که در نقطه

۴. نتایج و بحث

در این بخش پراکندگی موج، فرکانسها و سرعت فاز در یک نانوپوسته کربنی مدور استوانه‌ای دارای حرکت محوری حاوی نانوسیال مغناطیسی تحت تأثیر میدان‌های حرارتی، رطوبت حرارتی و هیدرودینامیکی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. نیروهای حرارتی و رطوبتی در سه حالت طولی، جانبی و طولی-جانبی و در دماهای اتاق و دماهای بالا اعمال شده و به‌طور جداگانه بررسی می‌شوند. پیش‌تر روابط دینامیکی و فیزیکی سیستم مورد بررسی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا به‌دست آمد و با اعمال پارامترهای سینوسی و تئوری الاستیسته گرادین تنش (تئوری غیرمحلی) در مختصات استوانه‌ای ارائه شده‌اند. حال، رفتار موجی-فرکانسی ناشی از برهم‌کنش نانو سازه-نانوسیال و تحت اثر انواع مختلف نیروهای اعمالی هم به‌طور مجزا و هم با اعمال هم‌زمان مورد بررسی قرار می‌گیرند. همچنین اثر سیال عبوری از درون نانو سازه، اثر تغییر چگالی سیال و سازه به موجب تغییرات حرارتی و رطوبتی و تأثیر میزان سرعت حرکت سیال و سازه نیز مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مقدار پارامترهای مادی و هندسی سیال و سازه در جدول ۲ ارائه شده‌اند. به‌منظور تجزیه و تحلیل اثر چگالی سیال عبوری و تغییر آن تحت میدان‌های حرارتی و رطوبتی سیالات مختلفی اعم از نانومایع و نانوگاز مثل آب، هوا، خون، دی‌اتیل‌اتر و هیدروژن مایع در نظر گرفته شده است. در اینجا به‌طور پیش‌فرض سیال عبوری نانوآب و مقدار ضرایب انبساط حرارتی (CTE) و رطوبتی (CHE) برابر فرض شده‌اند. مقدار ضرایب انبساط حرارتی (CTE) در نظر گرفته شده برای میدان‌ها و شرایط مختلف حرارتی در جدول ۳ ارائه شده‌اند. همچنین مقدار اختلاف دما (ΔT) در دماهای پایین و بالا به ترتیب 30°C و 230°C در نظر گرفته شده و فرض بر این است که در اینجا اختلاف رطوبت (Δm^H) حرارتی ۳۰٪ اختلاف دما است.

علاوه بر این، فاکتور نفوذ مغناطیسی (η) برابر با $4\pi \times 10^{-7}$ H/m است.

جدول ۲. خصوصیات هندسی و مادی نانوپوسته کربنی (CNS) و سیال جاری [۳۴].

پارامتر	نماد	مقدار	واحد
مدول یانگ CNS	E	۱	TPa
ضخامت CNS	h	۱	\AA
قطر CNS	d	۴	\AA
نسبت پواسون	ν	۰/۳	-
چگالی جرمی CNS	ρ_c	۲/۳	g cm^{-3}
چگالی جرمی آب	ρ_w	۱	g cm^{-3}

جدول ۳. مقدار ضریب انبساط حرارتی برای نیروهای حرارتی و رطوبتی طولی (LHTF)، حرارتی و رطوبتی جانبی (CHTF) و هم‌زمان نیروهای حرارتی و رطوبتی طولی و جانبی (LCHTF) دمای اتاق و دماهای بالا ($i=x, \theta$ برای $\alpha_{ii} = \beta_{ii}$) [۳۲].

نوع میدان نیرو	CTE در دماهای پایین		CTE در دماهای بالا	
	α_{xx}	$\alpha_{\theta\theta}$	α_{xx}	$\alpha_{\theta\theta}$
LHTF	$-1/6 \times 10^{-6}$	۰	$1/1 \times 10^{-6}$	۰
CHTF	۰	$-1/2 \times 10^{-6}$	۰	$0/8 \times 10^{-6}$
LCHTF	$-1/6 \times 10^{-6}$	$-1/2 \times 10^{-6}$	$1/1 \times 10^{-6}$	$0/8 \times 10^{-6}$

۴-۱. صحت‌سنجی نتایج

در این زیربخش، به‌منظور اعتبارسنجی و تأیید نتایج حاصل شده با استفاده از تئوری و مدل پیشنهادی، در جداول ۴ و ۵ مقایسه مقدار فرکانس طبیعی اساسی به‌دست آمده با پارامترهای هندسی مختلف (نسبت طول به شعاع) نسبت به نتایج محققین دیگر ارائه شده است. برای این منظور، در جدول ۴ با در نظر گرفتن $h/r=0/06$ می‌توان مشاهده کرد با افزایش نسبت طول به شعاع (L/r) مقدار فرکانس طبیعی سیستم در مود اول کاهش می‌یابد. سایر پارامترها برای حصول این نتایج براساس مقادیر جدول ۲ در نظر گرفته شده‌اند.

همچنین مقادیر فرکانس طبیعی به‌دست آمده ($f_n = \omega_n / 2\pi$) برای نانو سازه کربنی تک‌جداره ساکن در مقایسه با نتایج موجود

این جدول برای نانولوله‌های کربنی (۵، ۵) از نوع صندلی و با نسبت طول به شعاع L/r متفاوت به دست آمده‌اند. همچنین پارامترهای مکانیکی در نظر گرفته شده عبارتند از m^2/s^2 $E/\rho=3/6481 \times 10^8$ ، نسبت پواسون $\nu=0/19$ ، ضخامت لوله $h=0/066$ nm و ضریب مقیاس e_0 متناسب با ابعادی که در هر مورد در نظر گرفته شده‌است. نتایج ارزیابی شده در این جدول مربوط به مود اول فرکانس‌های طبیعی برای ارتعاش آزاد SWCNTs با شرایط مرزی دو سر گیردار است.

مطابق نتایج این دو جدول، مشخص است که مدل پیشنهادی در این تحقیق می‌تواند مطابقت بسیار خوبی با نتایج سایر محققین و به‌خصوص با نتایج حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی داشته باشد. با توجه به پرهزینه بودن روش‌های آزمایشگاهی و شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی به نظر می‌رسد پس از تحقیقات و آزمایش‌های بیشتر شاید بتوان نشان داد که مدل مورد استفاده در این تحقیق (CNS-HSDT) جایگزین مناسبی برای تحلیل رفتار دینامیکی سیستم‌های مشابه باشد.

در مقالاتی دیگر که به ترتیب با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی (MD)، مدل تیر تیموشنکو غیرمحل (NT) و مدل تیر پوسته استوانه‌ای مرتبه بالای غیرمحل در مختصات دکارتی (NH) حاصل شده‌اند در جدول ۵ لیست شده‌اند. در مورد مراجع مورد استفاده در این جدول لازم به ذکر است ژانگ و همکاران [۳۹] براساس پتانسیل پیوند تجربی واکنش‌پذیر نسل دوم از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی رفتار ارتعاشی SWCNTs بررسی کرده‌اند. آنها سپس مدلی را با استفاده از ترکیب تئوری‌های تیر تیموشنکو و الاستیسیته غیرمحل پیشنهاد دادند. انصاری و همکاران [۴۰] ویژگی‌های ارتعاشی نانولوله‌های کربنی تک جداره و دوجداره را با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی بر اساس توابع انرژی بالقوه ترساف-برنر^{۱۱} و لنارد جونز^{۱۲} مورد تحقیق قرار داده‌اند. ون و همکاران نیز برای بررسی رفتار ارتعاشی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره مدلی را براساس تئوری مرتبه بالای غیرمحل در مختصات کارتزین مورد استفاده و پیشنهاد دادند [۴۱]. نتایج در

جدول ۴. مقایسه مقدار فرکانس طبیعی اساسی بی‌بعد به دست آمده با نسبت‌های ۱، ۲، ۵، ۲۵، $L/r=0/25$ ، $m=n=1$ و $h/r=0/06$

L/r				مراجع
۲	۱	۰/۵	۰/۲۵	
۰/۰۱۸۵۳	۰/۰۲۷۸۱	۰/۰۳۶۹۲	۰/۰۸۶۱۱	میرسکای و هرمن [۴۲]
۰/۰۱۸۵۳	۰/۰۲۷۸۱	۰/۰۳۶۹۲	۰/۰۸۶۳۹	ردی [۴۳]
۰/۰۱۸۵۳	۰/۰۲۷۸۰	۰/۰۳۶۸۸	۰/۰۸۶۳۵	خلیلی و همکاران [۴۴]
۰/۰۱۸۵۳	۰/۰۲۷۸۱	۰/۰۳۶۹۱	۰/۰۸۶۳۹	آرمناکس و همکاران [۴۵]
۰/۰۱۹۲۳	۰/۰۲۷۸۶۹	۰/۰۳۸۴۰	۰/۰۸۷۷۵	شکرگذار و همکاران [۴۶]
۰/۰۱۸۵۳۲	۰/۰۲۷۸۱۹	۰/۰۳۶۹۲۳	۰/۰۸۶۳۸۴	تحقیق حاضر

جدول ۵. مقایسه مقدار فرکانس طبیعی اساسی بدون بعد نانوسازه کربنی تک جداره حاصل شده از دو مدل روش شبیه‌سازی دینامیک مولکولی (MD)،

مدل تیر تیموشنکو غیرمحل (NT)، مدل تیر پوسته استوانه‌ای مرتبه بالای غیرمحل در مختصات دکارتی (NH) و مدل پیشنهادی حاضر (CNS-)

(HSDT). ($h=0/066$ nm ، $E/\rho=3/6481 \times 10^8$ m²/s²)

L/r				مدل‌های حل مسئله
۲۰/۵۲	۱۶/۹۴	۱۳/۳۴	۹/۷۲	
۰/۳۰۵۱۸	۰/۴۳۳۳۵	۰/۶۴۶۹۷	۱/۰۶۸۱۲	MD [۳۹]
-	۰/۴۹۲۴۰	-	۱/۱۶۷	MD [۴۰]
۰/۲۹۶۳۴	۰/۴۱۴۶۹	۰/۶۱۷۳۸	۱/۰۰۳۰۹	NT [۳۹]
۰/۳۰۶۰۷	۰/۴۳۱۰۵	۰/۶۴۷۴۹	۱/۰۶۴۷۴	NH [۴۱]
۰/۳۰۵۲۷۱	۰/۴۳۳۱۵۷	۰/۶۴۶۵۴۱۴	۱/۰۶۸۱۵۹۹	CNS-HSDT (تحقیق حاضر)
($e_n=2/97$)	($e_n=2/95$)	($e_n=1/42.5$)	($e_n=0/85$)	

۴-۲. نسبت تغییرات فرکانس موج و فاز سرعت

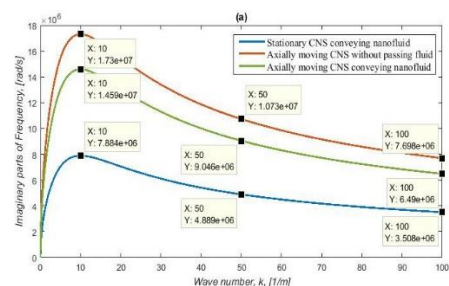
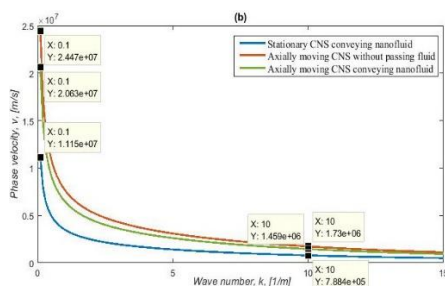
۴-۲-۱. بدون میدان‌های نیرویی

در این زیربخش انتشار امواج و سرعت فاز نانوپوسته‌های کربنی (CNSs) ثابت حاوی سیال، نانوپوسته‌های دارای حرکت محوری و نانوپوسته‌های دارای حرکت محوری حاوی سیال مورد بررسی قرار خواهند گرفت. همچنین مقادیر عدد نادسن و پارامتر غیرمحملی به ترتیب برابر با ۰/۱ و ۰/۰۱ در نظر گرفته می‌شوند. نتایج این زیربخش برای مقایسه نتایج حاصل از اعمال میدان‌های نیرویی مختلف استفاده خواهند شد. شکل‌های ۲-الف و ب، انتشار موج یعنی تغییرات فرکانس طبیعی و سرعت فاز سیستم را در سه حالت ذکر شده نسبت به تغییرات عدد موج نشان می‌دهد. همان‌طور که شکل ۲-الف مشاهده می‌شود، در عدد موج ۱۰ فرکانس موج دارای یک نقطه اوج بوده که یعنی بیشترین فرکانس طبیعی در این نقطه واقع می‌شود و سپس به صورت یکنواختی کاهش می‌یابد. همچنین می‌توان دریافت که بیشترین فرکانس طبیعی در هر عدد موج در نانوپوسته‌های کربنی با حرکت محوری و بدون سیال خواهد بود. ملاحظه می‌شود که فرکانس موج برای نانوپوسته‌های کربنی ثابت حاوی سیال کمتر از نانوپوسته‌های کربنی دارای حرکت محوری حاوی سیال است؛ لذا می‌توان اظهار داشت که اولاً سیال عبوری از درون نانوسازه موجب کاهش فرکانس طبیعی می‌شود و ثانیاً حرکت محوری نانوپوسته که موجب افزایش انرژی جنبشی سیستم

می‌شود فرکانس طبیعی سیستم را افزایش می‌دهد. همچنین در شکل ۲-ب ملاحظه می‌شود که با افزایش عدد موج سرعت فاز سیستم کاهش می‌یابد؛ این کاهش سرعت از ابتدا تا تقریباً عدد موج دهم با شیب تندی صورت می‌پذیرد و سپس حالت یکنواختی برقرار شده و با شیب ملایم‌تری کاهش می‌یابد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود سرعت فاز نیز در نانوپوسته‌های دارای حرکت محوری بدون سیال دارای بیشترین مقدار است.

با مقایسه‌ی نقاط مشخص شده در شکل ۲-الف، در اعداد موج ۱۰، ۵۰ و ۱۰۰، می‌توان دریافت که فرکانس طبیعی در نانوپوسته‌های کربنی دارای حرکت محوری بدون سیال نسبت به نانوپوسته دارای حرکت محوری حاوی نانوسیال و نیز نسبت به فرکانس نانوپوسته کربنی ثابت حاوی نانوسیال عبوری به ترتیب تقریباً ۱۵/۷٪ و ۵۴/۴٪ افزایش یافته است. شایان ذکر است این مقدار درصد افزایش برای نسبت سرعت‌های فاز در هر عدد موج با ترتیب موارد ذکر شده کاملاً مشابه و یکسان هستند (شکل ۲-ب).

از این نتایج می‌توان استنباط نمود که در هر عدد موج، عبور سیال از درون سازه باعث کاهش و حرکت محوری نانولوله موجب افزایش در فرکانس طبیعی و همچنین در سرعت فاز سیستم می‌شود. همچنین نتایج نشان می‌دهند که سرعت طولی CNS نقش مؤثرتری نسبت به سرعت جریان سیال برای بزرگی اندازه موج پراکنده شده و تشدید فرکانس طبیعی دارد.



شکل ۲. (الف). تغییرات فرکانس موج، (ب) تغییرات سرعت فاز نسبت به تغییر عدد موج برای نانوپوسته‌های ثابت حاوی سیال و نانوپوسته‌های دارای حرکت محوری با و بدون نانوسیال عبوری.

۴-۲-۲. با اثر میدان‌های حرارتی و رطوبت

حرارتی

شکل‌های ۳-الف و ب تغییرات فرکانس طبیعی نانوپوسته کربنی دارای حرکت محوری حامل نانوسپال نسبت به تغییرات عدد موج تحت سه نوع میدان حرارتی طولی، میدان حرارتی محیطی و اعمال هم‌زمان میدان‌های حرارتی طولی و محیطی را به ترتیب در دماهای پایین و دماهای بالا نشان می‌دهند. با در نظر گرفتن مقادیر عدد ناسن و پارامتر غیرمحلّی به ترتیب برابر با $0/01$ و $0/1$ ، مشاهده می‌شود که فرکانس‌های طبیعی در اعداد موج پایین به صورت صعودی افزایش می‌یابند. همانند زیربخش پیشین ملاحظه می‌شود که در عدد موج ۱۰ مقدار فرکانس موج به نقطه اوج خود رسیده و سپس روند کاهشی به خود می‌گیرد. در ادامه بر اثر میدان‌های نیرویی اعمال شده این روند کاهشی کند، سریع و یا حتی ممکن است به روند افزایشی تبدیل شود. فرکانس‌ها تا رسیدن به نقطه اوج خود تحت هر سه نوع میدان‌های نیرویی حرارتی دارای مقادیری بسیار نزدیک به یکدیگر هستند و به اصطلاح امواج غیرمتفرق^{۱۴} هستند.

همان‌طور که در شکل ۳-الف مشاهده می‌شود به‌عنوان مثال در عدد موج ۱۰ مقدار فرکانس طبیعی تحت میدان حرارتی محیطی، طولی و طولی-محیطی به ترتیب برابر با $1/462e7$ ، $1/474e7$ و $1/477e7$ (rad/s) هستند. سپس اختلاف مقدار فرکانس‌ها تحت میدان‌های حرارتی مذکور با افزایش عدد موج افزایش خواهد یافت به طوری که در عدد موج ۵۰ مقدار فرکانس‌ها به ترتیب برابر با $1/392e7$ ، $1/035e7$ و $1/48e7$ و در عدد موج ۱۰۰ به ترتیب برابر با $1/195e7$ ، $2/214e7$ و $2/431e7$ (rad/s) هستند.

ملاحظه می‌شود که کمترین مقدار فرکانس طبیعی مربوط به حالتی است که میدان حرارتی محیطی به سیستم اعمال می‌شود و بیشترین مقدار فرکانس تحت اعمال هم‌زمان میدان‌های حرارتی طولی و محیطی حاصل خواهد شد. با

مقایسه مقدار فرکانس‌های طبیعی حاصل شده نسبت به حالتی که هیچ میدان نیرویی حرارتی به سیستم وارد نمی‌شود (یعنی نانوپوسته دارای حرکت محوری و با حضور نانوسپال عبوری در شکل ۲-الف)، می‌توان دریافت که با اعمال نیروهای حرارتی محیطی، طولی و طولی-محیطی مقدار فرکانس موج در عدد موج ۱۰ به ترتیب $0/2$ ، $1/0$ و $1/2$ درصد افزایش می‌یابند. مقدار درصد افزایش فرکانس در عدد موج ۵۰ به ترتیب $12/6$ ، $35/0$ و $38/9$ درصد و در عدد موج ۱۰۰ به ترتیب تقریباً برابر با $45/7$ ، $70/7$ و $73/3$ درصد می‌باشد. لذا می‌توان اظهار داشت که تحت اعمال میدان‌های حرارتی در دماهای پایین، پس از پیک حاصل شده، با افزایش عدد موج مقدار فرکانس موج افزایش قابل توجهی خواهد داشت.

در شکل ۴-ب مشاهده می‌شود که در دماهای بالا روند پراکندگی فونون‌ها^{۱۵} کاملاً متفاوت با انتشار امواج در دماهای پایین است. در اینجا بیشترین فرکانس و محدوده پایداری سیستم مربوط به حالتی است که سیستم تحت تأثیر میدان حرارتی محیطی قرار داشته و کمترین مقادیر فرکانس‌های طبیعی تحت اعمال هم‌زمان میدان‌های حرارتی طولی و محیطی حاصل می‌شود. در دماهای بالا مشاهده می‌شود که فرکانس سیستم در عدد موج پایین‌تری به نقطه اوج مقدار خود رسیده و سپس با شیب تندی به سمت صفر میل می‌کنند. همچنین می‌توان دریافت که پس از کاهش فرکانس‌های موج بیشترین محدوده از اعداد موج که در آن وضعیت غیرمتفرقی برای امواج رخ می‌دهد به ترتیب تحت میدان‌های حرارتی طولی-محیطی، طولی و محیطی حاصل می‌شود.

در دماهای بالا نقطه اوج مقدار فرکانس‌های طبیعی تحت میدان‌های حرارتی محیطی، طولی و طولی-محیطی به ترتیب در عدد‌های موج (k) $9/6$ ، $8/5$ و $8/3$ واقع می‌شوند. میزان تغییر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به حالت بدون اعمال

نیروهای حرارتی (شکل ۲-الف) در عدد موج ۱۰ برابر با ۷٪/۵، ۶٪/۱- و ۱٪/۲- است. این میزان کاهش برای اعداد موج بالاتر کاملاً قابل توجه خواهد بود. لذا می توان اظهار داشت که اعمال میدان های نیرویی حرارتی در دماهای بالا باعث کاهش مقادیر فرکانس طبیعی سیستم در هر عدد موج می شود.

با اعمال میدان های حرارتی در دماهای اتاق مقدار فرکانس طبیعی سیستم افزایش می یابد. کمترین مقدار افزایش فرکانس موج نسبت به حالت بدون میدان های نیرویی حرارتی مربوط به میدان حرارتی محیطی و بیشترین آن با اعمال همزمان میدادین حرارتی طولی و محیطی حاصل خواهد شد. روند انتشار موج تحت میدان های حرارتی مورد بررسی در دماهای بالا متفاوت از دماهای پایین است. در این حالت مقدار فرکانس موج سیستم در عدد موج پایین تری به قله (پیک) مقدار خود می رسد و پس از این روند افزایشی، با شیب تندی کاهش می یابد. در دماهای بالا بیشترین محدوده اعداد موج که در آن امواج غیرمتفرق هستند به ترتیب تحت میدان های حرارتی طولی-محیطی (LCT)، طولی (LT) و محیطی (CT) حاصل می شود.

در شکل ۳-ج تغییرات مقدار سرعت فاز نسبت به افزایش عدد موج نانوپوسته های کربنی دارای حرکت محوری حامل نانوسیال تحت اعمال همزمان میدان های حرارتی طولی و محیطی در دماهای اتاق و دماهای بالا نشان داده شده اند. ملاحظه می شود که تحت میدان های نیرویی حرارتی سرعت فاز با افزایش عدد موج کاهش می یابد. مقدار سرعت فاز برای هر عدد موج در دماهای پایین مقدار بیشتری نسبت به دماهای بالا در همان عدد موج دارد. این اختلاف بین مقدار سرعت فاز در دماهای بالا و پایین با افزایش عدد موج افزایش خواهد یافت به طوری که در آغاز اختلاف سرعت فاز ۰/۵٪ است، در عدد موج ۱۰ به ۸/۱٪ می رسد و این روند افزایش میزان اختلاف تا انتها ادامه خواهد داشت.

در شکل های ۴-الف و ب تغییرات فرکانس طبیعی نانوپوسته کربنی دارای حرکت محوری حامل نانوسیال نسبت به تغییرات عدد موج تحت میدان های حرارتی و رطوبت حرارتی طولی (LTH)، محیطی (CTH) و طولی-محیطی (LCTH) به ترتیب در دماهای پایین و دماهای بالا نمایش داده شده اند. در اینجا تأثیر میدان های رطوبت حرارتی به میزان ۵٪، ۱۵٪ و ۳۰٪ میدان نیرویی حرارتی اعمال شده در نظر گرفته و نتایج حاصله مورد مقایسه و بررسی قرار می گیرند. روند افزایش/کاهش مقدار فرکانس طبیعی نسبت به افزایش عدد موج مشابه حالت قبل یعنی حالت بدون اعمال میدان رطوبت حرارتی است ولی مقدار فرکانس در هر عدد موج با توجه به میزان درصد نفوذ رطوبت ناشی از حرارت تغییر می کند.

در شکل ۴-الف به عنوان مثال در عددهای موج ۱۰ و ۵۰ تحت اعمال همزمان میدان های حرارتی و رطوبتی طولی و محیطی با در نظر گرفتن رطوبت حرارتی به میزان ۵٪، مقدار فرکانس طبیعی به ترتیب ۰/۰۷ و ۱/۵ درصد بیشتر از حالتی است که فقط میدان حرارتی در نظر گرفته می شود. این میزان افزایش فرکانس طبیعی به ازای اثرگذاری ۱۵ و ۳۰ درصدی رطوبت حرارتی در عدد موج ۱۰ به ترتیب ۰/۲ و ۰/۴ درصد و در عدد موج ۵۰ به ترتیب برابر با ۴/۴٪ و ۸/۲٪ خواهد بود. لذا می توان اظهار داشت اولاً میدان رطوبت حرارتی در دماهای پایین موجب افزایش مقدار فرکانس موج در هر عدد موج خواهد شد. ثانیاً با افزایش عدد موج اثر رطوبت حرارتی بر مقدار فرکانس سیستم افزوده می شود.

در دماهای بالا (شکل ۴-ب)، افزایش اثرگذاری رطوبت حرارتی از صفر تا ۵٪، ۱۵٪ و ۳۰٪ تحت نیروهای حرارتی و رطوبتی موجب کاهش مقدار فرکانس طبیعی در هر عدد موج می شود. اختلاف مقدار فرکانس سیستم تحت میدان های رطوبت حرارتی اعمالی با افزایش میزان تأثیر رطوبت و افزایش عدد موج افزوده خواهد شد تا جاییکه مقدار فرکانس

موج به سمت صفر میل کرده و سپس تا انتها بدون تفرق و انتشار تحت تمامی میدان‌های حرارتی و رطوبتی به‌طور یکسان کاهش می‌یابد. به‌عنوان مثال کاهش فرکانس نانوپوسته دارای حرکت محوری حاوی نانوسیال به ازای افزایش میزان اثرگذاری رطوبت حرارتی از ۰ تا ۵، ۱۵ و ۳۰ درصد تحت میدان‌های حرارتی-رطوبتی طولی و محیطی در عدد موج ۱۰ به‌ترتیب برابر با ۰/۴۴٪، ۱/۱۲٪ و ۲/۴۳٪ است.

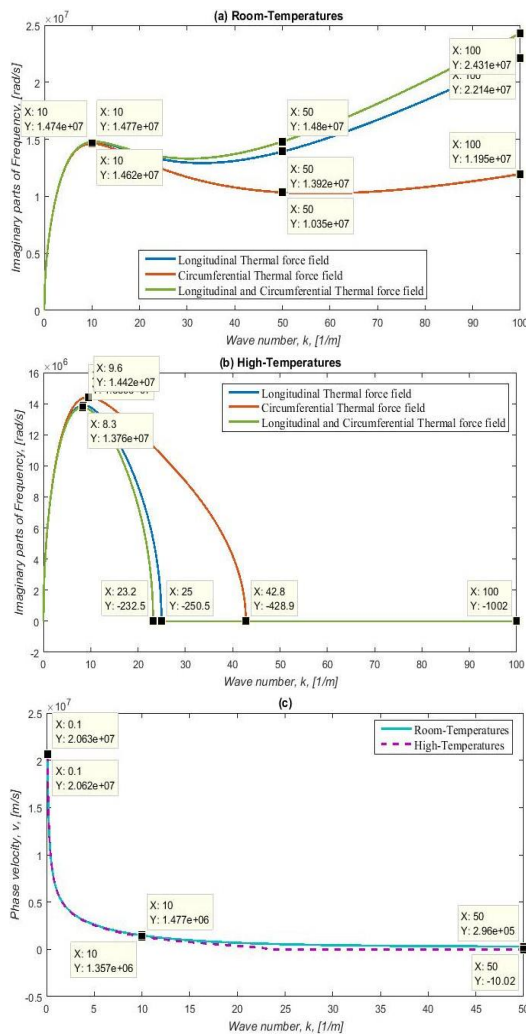
همچنین می‌توان نتیجه گرفت که اثر میدان رطوبت حرارتی در کاهش مقدار فرکانس طبیعی نانوسیستم در دماهای بالا بیشتر از اثر آن در افزایش مقدار فرکانس در دماهای اتاق است.

در شکل ۴-ج تغییرات سرعت فاز نسبت به تغییر عدد موج نانوپوسته‌های کرنی دارای حرکت محوری حامل نانوسیال تحت اعمال هم‌زمان میدان‌های حرارتی و رطوبت حرارتی طولی و محیطی در دماهای اتاق و دماهای بالا نمایش داده شده است. در اینجا میزان اثر رطوبت ۱۵ درصد حرارت اعمالی در نظر گرفته شده است. همان‌طور که می‌توان ملاحظه کرد تحت میدان‌های نیرویی حرارتی و رطوبتی نیز سرعت فاز با افزایش عدد موج کاهش می‌یابد. اختلاف مقدار سرعت فاز در دماهای بالا و پایین در ابتدا ۰/۰۵٪، در عدد موج ۱۰ به ۹/۴٪ رسیده و این روند افزایش میزان اختلاف تا انتها ادامه خواهد یافت.

علاوه بر این، با مقایسه نمودارهای ۲-ب، ۳-ج و ۴-ج می‌توان دریافت که میدان حرارتی و رطوبت حرارتی اعمال شده موجب افزایش سرعت فاز سیستم در دماهای پایین و کاهش سرعت فاز در دماهای بالا برای هر عدد موج می‌شود. میدان حرارتی اعمال شده در هر جهتی از جهت‌های مورد بررسی موجب افزایش مقدار سرعت فاز سیستم در دماهای پایین و کاهش آن در دماهای بالا در هر عدد موج می‌شود. همچنین مشاهده شد که میزان اثر حرارت و رطوبت حرارتی

بر سرعت فاز نانوسیستم در دماهای بالا بیشتر از دماهای اتاق است.

میدان رطوبت حرارتی میزان افزایش و کاهش فرکانس طبیعی و سرعت فاز در هر عدد موج به‌ترتیب در دماهای اتاق و بالا را تشدید می‌کند. به‌عبارت دیگر میدان رطوبتی منجر به تقویت اثرات میدان نیرویی حرارتی می‌شود. همچنین شایان ذکر است میزان اثر این تقویت در دماهای بالا بیشتر است.

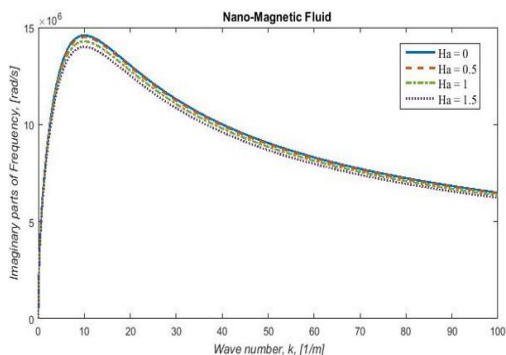


شکل ۳. تغییرات فرکانس موج نانوپوسته‌های دارای حرکت محوری حاوی نانوسیال عبوری تحت میدان‌های حرارتی طولی، محیطی و طولی-محیطی در (الف) دماهای پایین، (ب) دماهای بالا و (ج) تغییرات سرعت فاز نسبت به تغییر عدد موج تحت میدان حرارتی طولی-محیطی.

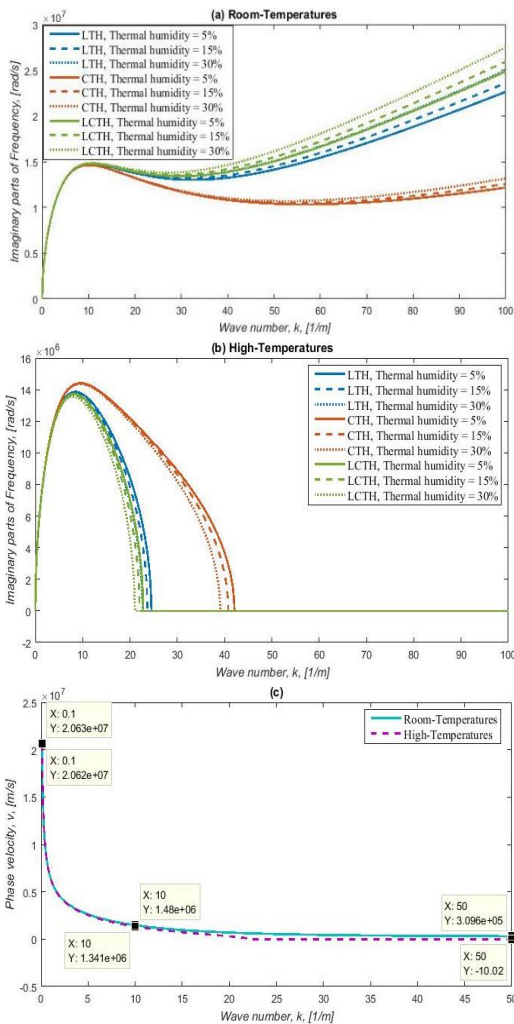
این زیربخش اثر حرارت اعمالی و رطوبت ناشی از آن بر چگالی نانوسازه و نانوسیال عبوری از داخل آن و تأثیر این تغییرات چگالی بر شیوه انتشار فرکانس‌های طبیعی سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد.

پیش از ورود به بحث مورد نظر در این زیربخش لازم است میزان تأثیر شدت اثر مغناطیسی سیال با استفاده از عدد هارتمن بررسی و بیان شود.

در شکل ۵ فرض شده است که میدان مغناطیسی تنها بر نانوسیال عبوری اثر گذاشته و بدین ترتیب تغییرات فرکانسی سیستم نسبت به تغییر عدد موج نشان داده شده است. برای بررسی اثر میدان مغناطیسی بر سیال عبوری از عدد هارتمن با مقادیر مختلف ۰، ۰/۵، ۱ و ۱/۵ که بیان‌گر تغییر در میزان کیفیت مغناطیسی سیال است، استفاده شده است. در نگاه اول، از این شکل و نتایج حاصله می‌توان دریافت که عبور نانوسیال مغناطیسی موجب کاهش فرکانس موج سیستم شده و پایداری سیستم کاهش می‌یابد. با افزایش عدد هارتمن، که به معنی افزایش خاصیت مغناطیسی سیال عبوری است، مقدار فرکانس سیستم بیشتر کاهش می‌یابد. اختلاف مقدار فرکانس طبیعی برای سیالات مغناطیسی با شدت مختلف تا رسیدن به عدد موج ۱۰ به اوج خود رسیده و سپس با روند ملایمی کاهش می‌یابد.



شکل ۵. تغییرات فرکانس موج نسبت به تغییر عدد موج با در نظر گرفتن اثر میدان مغناطیسی بر نانوسیال در نانوپوسته‌های کربنی دارای حرکت محوری حامل نانوسیال



شکل ۴. تغییرات فرکانس موج نانوپوسته‌های دارای حرکت محوری حاوی نانوسیال عبوری تحت میدان‌های حرارتی و رطوبت حرارتی طولی، محیطی و طولی-محیطی در (الف) دماهای پایین، (ب) دماهای بالا با میزان رطوبت حرارتی ۰/۵، ۱/۵ و ۳۰٪ نیروی حرارتی (ج) تغییرات سرعت فاز نسبت به تغییر عدد موج تحت میدان‌های حرارتی و رطوبت حرارتی طولی-محیطی

۳-۴. اثرات تغییر چگالی نانوسازه و نانوسیال مغناطیسی عبوری به موجب میدان‌های حرارتی و رطوبتی بر انتشار امواج

یکی از موضوعاتی که به‌خصوص با توجه به نانومقیاس بودن سیستم باید مورد توجه قرار بگیرد تغییر مقدار چگالی سازه و سیال به موجب تغییرات دما و رطوبت مورد بررسی است. در

همان‌طور که پیش‌تر ذکر شد موضوعی که کمتر مورد توجه قرار گرفته این است که تغییر حرارت و به تبع رطوبت حرارتی منجر به تغییراتی در چگالی سازه و سیال مورد بررسی خواهد شد. لذا تغییرات چگالی نیز به‌خصوص در مقیاس نانو می‌تواند قابل توجه باشد و باید مورد بررسی قرار گیرد. براساس قوانین فیزیک گرما، با انبساط گرمایی حجمی تغییر چگالی مواد بر اثر تغییرات دما به‌صورت زیر قابل محاسبه است [۴۷]:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V^*(1 + 3\alpha\Delta T)} \quad (44)$$

$$= \frac{\frac{m}{V^*}}{(1 + 3\alpha\Delta T)} = \frac{\rho^*}{(1 + 3\alpha\Delta T)}$$

که در آن m ، ρ^* و V^* به‌ترتیب جرم، چگالی ظاهری و حجم ظاهری در شرایط محیطی و بدون تغییرات دمایی هستند. با توجه به مطالب ذکر شده فوق و وابستگی و رابطه مستقیم رطوبت حرارتی نسبت به میزان حرارت، می‌توان معادله ۴۴ را تعمیم داده و در اینجا رابطه جدید زیر را تعریف نمود:

$$\rho_{\text{new}} = \frac{\rho^*}{(1 + 3[\alpha_{ij}\Delta T + \beta_{ij}\Delta m^H])^2}, \quad (45)$$

for $i, j = x, \theta$

از این معادله می‌توان دریافت که با افزایش اثرات حرارتی و رطوبتی چگالی ماده (هم سازه و هم سیال) کاهش می‌یابد. با توجه به معادله به‌دست آمده آشکار است که با افزایش مقدار حرارت و رطوبت حرارتی هم چگالی سازه و هم چگالی نانوسیال کاهش می‌یابد. همچنین با توجه به رابطه بین فرکانس طبیعی نسبت به چگالی، قابل انتظار است که با کاهش چگالی ناشی از افزایش حرارت، مقدار فرکانس طبیعی سیستم نیز دستخوش تغییراتی قرار گیرد.

شکل ۶-الف و ب تغییرات فرکانس‌ها و انتشار موج نسبت به عدد موج را با حضور سیالات مختلف با و بدون در نظر گرفتن تغییرات چگالی سازه و سیال بر اثر افزایش حرارت و رطوبت حرارتی به‌ترتیب در دماهای پایین و بالا نشان می‌دهند. در این دو شکل نیروی حرارتی به‌طور هم‌زمان در جهت‌های طولی و محیطی اعمال شده و میزان رطوبت حرارتی برابر

۱۵٪ حرارت در نظر گرفته شده است. در اینجا نانوسیالات مغناطیسی خون، دی‌اتیل‌اتر، هیدروژن مایع و هوا به‌عنوان سیالات مایع و گاز مورد بررسی قرار می‌گیرند. همان‌طور که می‌توان مشاهده کرد در دمای اتاق اصلاح مقدار چگالی برای سیالات مختلف موجب افزایش مقدار فرکانس سیستم می‌شود. در شکل ۶-ب می‌توان شاهد کاهش مقدار فرکانس‌های طبیعی نانوپوسته حاوی نانوسیالات مغناطیسی مختلف با اصلاح مقدار چگالی سازه و سیال در دمای بالا بود. به‌منظور مقایسه و بحث و بررسی بیشتر، چگالی اولیه سیالات مختلف عبوری از درون نانوپوسته و درصد کاهش یا افزایش فرکانس‌های طبیعی سیستم مربوط به شکل‌های ۶-الف و ب در جدول ۶ ارائه شده‌اند. لازم به ذکر است میزان افزایش یا کاهش سرعت فاز نیز با درصدهای مربوط به فرکانس‌ها برابر هستند.

با بررسی دقیق‌تر جزئیات حاصل شده در نمودارهای شکل‌های ۶ و مقادیر فرکانس‌های به‌دست آمده می‌توان دریافت که در محدوده‌های دمایی مورد بررسی چه دماهای پایین ($\Delta T = 30^\circ\text{C}$) (واحد ذکر شود) و چه برای دماهای بالا ($\Delta T = 230^\circ\text{C}$) به‌ترتیب میزان درصد افزایش و کاهش فرکانس‌های موج با چگالی‌های اصلاحی نسبت به مقدار فرکانس‌ها با چگالی اولیه در هر عدد موج تقریباً مقدار ثابتی است. به‌عنوان مثال مقدار فرکانس طبیعی در عدد موج ۱۰ برای سیالات مختلف در دماهای اتاق تقریباً ۰/۰۱۵٪ افزایش و در دماهای بالا ۰/۰۷۵٪ کاهش می‌یابد.

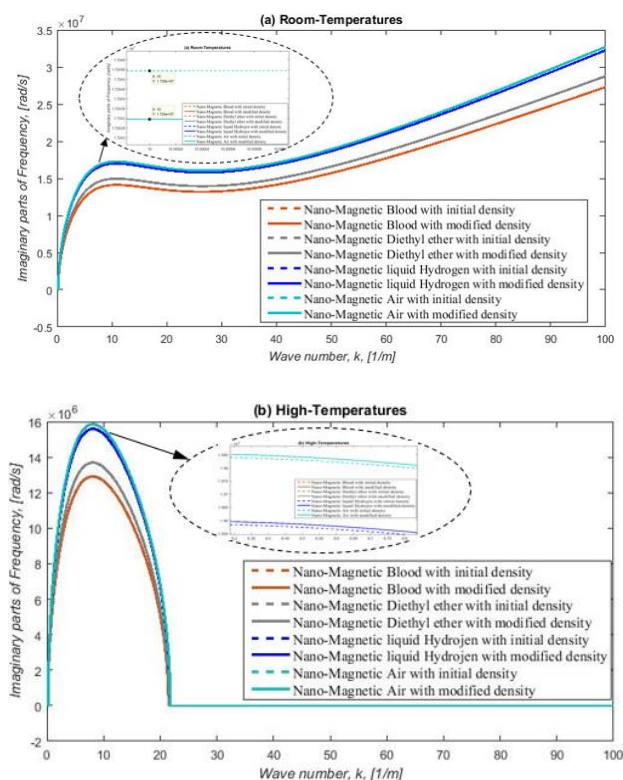
با توجه به ارقام به‌دست آمده ملاحظه می‌شود که میزان درصد تغییر فرکانس‌ها در دماهای بالا بیشتر است. همچنین آشکار است که در هر دو شرایط دمای پایین و بالا، با حضور سیال چگال‌تر مقدار درصد کاهش یا افزایش فرکانس سیستم کمتر است. لذا می‌توان گزارش داد که هرچه مواد چگالی بیشتری داشته باشند، افزایش دما و رطوبت ناشی از آن تأثیر کمتری بر افزایش یا کاهش فرکانس‌های موج به‌ترتیب در

دماهای پایین و بالا خواهند داشت. با افزایش حرارت و رطوبت چگالی مواد دستخوش تغییر می‌شوند. این تغییر چگالی در مقیاس نانو می‌تواند قابل توجه باشد. لذا در این تحقیق بررسی شد که با اصلاح مقدار چگالی میزان

فرکانس طبیعی و سرعت فاز در دماهای اتاق افزایش و دماهای بالا کاهش می‌یابد.

جدول ۶. میزان تغییرات فرکانس طبیعی نانوپوسته دارای حرکت محوری حاوی نانوسیالات مغناطیسی گوناگون به موجب تغییر چگالی ناشی از میدان‌های حرارتی و رطوبتی اعمال شده هم‌زمان در جهت‌های طولی و محیطی در عدد موج ۱۰.

نانوسیال مغناطیسی	چگالی اولیه (kg.m^{-3})	درصد افزایش فرکانس سیستم در دماهای پایین	درصد کاهش فرکانس سیستم در دماهای بالا
خون	۱۰۶۰	۰/۰۱۴۲	۰/۰۷۲۰
دی‌اتیل‌اتر	۷۱۳/۴	۰/۰۱۴۵	۰/۰۷۵۰
هیدروژن مایع	۷۰/۸۵	۰/۰۱۵۴	۰/۰۷۷۱
هوا	۱/۱۶۹	۰/۰۱۷۱	۰/۰۷۸۲



شکل ۶. تغییرات فرکانس طبیعی نانوسیستم نسبت به افزایش عدد موج و با حضور نانوسیالات مغناطیسی خون، دی‌اتیل‌اتر، هیدروژن مایع و هوا با و بدون در نظر گرفتن تغییرات چگالی سازه و سیال ناشی از حرارت و رطوبت حرارتی (الف) در دماهای پایین و (ب) در دماهای بالا

۵. نتیجه‌گیری

در این تحقیق، با ارائه و پیشنهاد مدل تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای استوانه‌ای، سینوسی، غیرمحلّی و اصل همیلتون معادلات حاکم بر انتشار موج نانوپوسته کربنی دارای حرکت محوری حاوی جریان نانوسیال مغناطیسی عبوری تحت بارهای هیدرودینامیکی، حرارتی و رطوبتی استخراج شد. برای این منظور با اعمال میدان‌های حرارتی و رطوبت ناشی از آن مسئله به صورت ترمو-هیگرو-الاستیک در آمد. با عبور سیالات مختلف اعم از نانومایع و نانוגاز از درون نانوپوسته، سیستم به صورت مسئله برهم‌کنش نانوسیال-نانوسازه مورد بررسی قرار گرفت. سپس با حل تحلیلی معادلات به دست آمده تغییرات فرکانس موج، سرعت فاز و شیوه انتشار موج تحت شرایط مختلف نانوسیستم محاسبه و بررسی شد. بدین منظور هر یک از اثرات اعمال میدان‌های حرارتی و رطوبتی در جهت‌های طولی، محیطی و طولی-محیطی در دماهای اتاق و دماهای بالا، اثرات میدان مغناطیسی بر سیال عبوری، اثر تغییر چگالی سازه و سیال به موجب نیروهای حرارتی و رطوبت ناشی از آن و نیز اثر سرعت سیال عبوری و سازه دارای حرکت محوری با استفاده از مدل و روش مرتبه بالای پیشنهادی CSN-HSDT برای نخستین بار مورد بحث و بررسی قرار گرفت.

از نتایج حاصل شده در این تحقیق، نتیجه‌های خلاصه زیر قابل توجه هستند:

- از نتایج حاصله می‌توان استنباط نمود که در هر عدد موج، عبور سیال از درون سازه باعث کاهش و حرکت محوری نانولوله موجب افزایش در فرکانس طبیعی و همچنین در سرعت فاز نانوسیستم می‌شود.
- سرعت محوری نانوسازه در مقایسه با سرعت نانوسیال عبوری از درون آن تأثیر بیشتری بر پراکندگی موج و افزایش فرکانس طبیعی سیستم هم در دماهای پایین و هم در دماهای بالا دارد. این اثر افزایشی با افزایش عدد

موج کاهش یافته به طوری که میزان درصد اختلاف بین مقدار فرکانس نانوپوسته دارای حرکت محوری حاوی نانوسیال نسبت به فرکانس نانوپوسته کربنی ساکن حاوی سیال کاهش خواهد یافت.

- با اعمال میدان‌های حرارتی در دمای اتاق مقدار فرکانس طبیعی سیستم افزایش می‌یابد. کمترین مقدار افزایش فرکانس موج نسبت به حالت بدون اعمال میدان‌های نیرویی حرارتی، مربوط به میدان حرارتی محیطی و بیشترین آن با اعمال هم‌زمان میدانی حرارتی طولی و محیطی حاصل خواهد شد. روند انتشار موج تحت میدان‌های حرارتی مورد بررسی در دماهای بالا متفاوت از دماهای پایین است. در این حالت مقدار فرکانس موج سیستم در عدد موج پایین‌تری به قله (پیک) مقدار خود می‌رسد و پس از این روند افزایشی، با شیب تندی کاهش می‌یابد. در دماهای بالا بیشترین محدوده اعداد موج که در آن امواج غیرمتفرق هستند به ترتیب تحت میدان‌های حرارتی طولی-محیطی (LCTF)، طولی (LTF) و محیطی (CTF) حاصل می‌شود. از طرف دیگر، میدان حرارتی اعمال شده در هر جهتی از جهت‌های مورد بررسی موجب افزایش مقدار سرعت فاز سیستم در دماهای پایین و کاهش آن در دماهای بالا در هر عدد موج می‌شود. همچنین مشاهده شد که میزان اثر حرارت و رطوبت حرارتی بر سرعت فاز نانوسیستم در دماهای بالا بیشتر از دماهای اتاق است.
- میدان رطوبت حرارتی در دماهای اتاق و بالا به ترتیب میزان افزایش و کاهش فرکانس طبیعی و سرعت فاز در هر عدد موج را تشدید می‌کند. به عبارت دیگر میدان رطوبتی منجر به تقویت اثرات میدان نیرویی حرارتی می‌شود. همچنین شایان ذکر است میزان اثر این تقویت در دماهای بالا بیشتر است.

فرکانس طبیعی و سرعت فاز در دماهای اتاق افزایش و در دماهای بالا کاهش می‌یابد.

در این تحقیق سعی شد بررسی جامعی بر روی تاثیر میدان‌های نیرویی مختلف حرارتی و رطوبتی بر یکی از موارد کاربردی نانوسیستم‌ها یعنی نانوپوسته‌های دارای حرکت محوری حامل سیال مغناطیسی انجام شود. امید است که نتایج این مقاله برای طراحی و ساخت بهینه حسگرهای مقیاس نانو، محرک‌ها و سایر تجهیزات مورد استفاده در صنایع مختلف مانند وسایط دریایی، تجهیزات پزشکی انتقال دارو و لوازم تحقیقاتی در مقیاس نانو مفید باشد.

- جریان نانوسیال مغناطیسی موجب کاهش فرکانس طبیعی سیستم بوده و تأثیر آن در اعداد موج پایین بیشتر قابل توجه است به طوری که با افزایش عدد هارتمن از بزرگی فرکانس موج کم می‌شود.
- با افزایش حرارت و رطوبت ناشی از آن چگالی مواد دستخوش تغییر می‌شوند. این تغییر چگالی در مقیاس نانو می‌تواند قابل توجه باشد. لذا در این تحقیق بررسی شد که با اصلاح مقدار چگالی نانوسیستم مورد بررسی به موجب افزایش حرارت و رطوبت ناشی از آن، میزان

۶. مآخذ

- [1] Feynman, Richard P., "There's plenty of room at the bottom: An invitation to enter a new field of physics", *Miniaturization*, Reinhold, 1961.
- [2] Kroto, H. W., J. R. Heath, S. C. O'Brien, R. F. Curl, and R. E. Smaley, "C60: buckminsterfullerene", *Nature*, Vol. 318, pp. 162-163, 1985.
- [3] Ban, Siyuan, Xuchen Nie, Zhihao Lei, Jiabao Yi, Ajayan Vinu, Yang Bao, and Yanpeng Liu, "Emerging low-dimensional materials for nanoelectromechanical systems resonators", *Materials Research Letters*, 2023, Vol.11, no.1, pp.21-52.
- [4] Wan, Zhengyi, Yurui Gao, Xiangyu Chen, Xiao Cheng Zeng, Joseph S. Francisco, and Chongqin Zhu, "Anomalous water transport in narrow-diameter carbon nanotubes", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2022, Vol.119, no.39, p.e2211348119.
- [5] Arda, Mustafa, and Metin Aydogdu, "Vibration analysis of carbon nanotube mass sensors considering both inertia and stiffness of the detected mass", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2022, Vol.50, no.3, pp.841-857.
- [6] Khursheed, Rubiya, Kamal Dua, Sukriti Vishwas, Monica Gulati, Niraj Kumar Jha, Ghalib Mohammed Aldhafeeri, Fayez Ghadeer Alanazi et al., "Biomedical applications of metallic nanoparticles in cancer: Current status and future perspectives", *Biomedicine & Pharmacotherapy*, 2022, Vol.150, p.112951.
- [7] Eringen, A. Cemal, and Byoung Sung Kim, "Relation Between Non-Local Elasticity and Lattice Dynamics", 1977.
- [8] Aydogdu, Metin, and Seckin Filiz, "Modeling carbon nanotube-based mass sensors using axial vibration and nonlocal elasticity", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2011, Vol.43, no.6, pp.1229-1234.
- [9] Oveissi, Soheil, and Aazam Ghassemi, "Longitudinal and transverse wave propagation analysis of stationary and axially moving carbon nanotubes conveying nano-fluid", *Applied Mathematical Modelling*, 2018, Vol.60, pp.460-477.
- [10] Safarpour, Hamed, Seyed Ali Ghanizadeh, and Mostafa Habibi, "Wave propagation characteristics of a cylindrical laminated composite nanoshell in thermal environment based on the nonlocal strain gradient theory", *The European Physical Journal Plus*, 2018, Vol.133, no.12, p.532.
- [11] Jiang, H., B. Liu, Y. Huang, and K. C. Hwang, "Thermal expansion of single wall carbon nanotubes", *J. Eng. Mater. Technol.*, 2004, Vol.126, no.3, pp.265-270.
- [12] Tang, Hong, Hong-Liang Dai, and Yi Du, "Effect of hygrothermal load on amplitude frequency response for CFRP spherical shell panel", *Composite Structures*, 2022, Vol.281, p.114978.

- [13] Wang, Q., and V. K. Varadan, "Wave characteristics of carbon nanotubes", *International Journal of Solids and Structures*, 2006, Vol.43, no.2, pp.254-265.
- [14] Xu, Zhichao, Zhifu Zhang, Jiakuan Wang, Xu Chen, and Qibai Huang, "Acoustic analysis of functionally graded porous graphene reinforced nanocomposite plates based on a simple quasi-3D HSDT", *Thin-Walled Structures*, 2020, Vol.157, p.107151.
- [15] Nguyen, Tuan HA, and Jarkko Niiranen, "Nonlocal continuum damage modeling for functionally graded plates of third-order shear deformation theory", *Thin-Walled Structures*, 2021, Vol.164, p.107876.
- [16] Pham, Quoc-Hoa, and Phu-Cuong Nguyen, "Dynamic stability analysis of porous functionally graded microplates using a refined isogeometric approach", *Composite Structures*, 2022, Vol.284, p.115086.
- [17] Amabili, Marco, "Nonlinear vibrations and stability of shells and plates", Cambridge University Press, 2008.
- [18] Amabili, Marco, and J. N. Reddy, "A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2010, Vol.45, no.4, 2010, pp.409-418.
- [19] Mantari, J. L., and C. Guedes Soares, "Finite element formulation of a generalized higher order shear deformation theory for advanced composite plates", *Composite Structures*, 2013, Vol.96, pp.545-553.
- [20] Argyris, John, and Lazarus Tenek, "Recent advances in computational thermostructural analysis of composite plates and shells with strong nonlinearities", 1997, pp.285-306.
- [21] Kadoli, Ravikiran, and N. Ganesan, "Buckling and free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells subjected to a temperature-specified boundary condition", *Journal of sound and vibration*, 2006, Vol.289, no.3, pp.450-480.
- [22] Safarpour, Hamed, Seyed Ali Ghanizadeh, and Mostafa Habibi, "Wave propagation characteristics of a cylindrical laminated composite nanoshell in thermal environment based on the nonlocal strain gradient theory", *The European Physical Journal Plus*, 2018, Vol.133, no.12, p.532.
- [23] Rao, Yan-Ni, Qi He, and Hong-Liang Dai, "A micromechanical model for effective hygro-thermo-elastic properties of fiber reinforced composites with functionally graded interphases", *Applied Mathematical Modelling*, 2021, Vol.92, pp.78-98.
- [24] Vinson, Jack R., "The behavior of sandwich structures of isotropic and composite materials", Routledge, 2018.
- [25] Arash, B., and Q. Wang, "A review on the application of nonlocal elastic models in modeling of carbon nanotubes and graphenes", *Computational materials science*, 2012, Vol.51, no.1, pp.303-313.
- [26] Selim, Mahmoud M., and Saad Althobaiti, "Wave-based method for longitudinal vibrational analysis of irregular single-walled carbon nanotube with elastic-support boundary conditions", *Alexandria Engineering Journal*, 2022, Vol.61, no.12, pp.12129-12138.
- [27] Liu, Jun, Yingyan Zhang, Yihe Zhang, Sritawat Kitipornchai, and Jie Yang, "Machine learning assisted prediction of mechanical properties of graphene/aluminium nanocomposite based on molecular dynamics simulation", *Materials & Design*, 2022, Vol.213, p.110334.
- [28] Hong, C. C., "Advanced dynamic thermal vibration of thick FGM plates-cylindrical shells", *Ocean Engineering*, 2022, Vol.266, p.112701.
- [29] Stein, Manuel, "Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing", *AIAA journal*, 1986, Vol.24, no.9, pp.1537-1544.
- [30] Shen, Hui-Shen, "Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells", CRC press, 2016.
- [31] Wang, Guoping, Yu Zhang, and Mohammed Arefi, "Three-dimensional exact elastic analysis of nanoplates", *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 2021, Vol.21, no.3, pp.1-14.
- [32] Oveissi, Soheil, Aazam Ghassemi, Mehdi Salehi, S. Ali Eftekhari, and Saeed Ziaei-Rad, "Hydro-Hygro-Thermo-Magneto-Electro elastic wave propagation of axially moving nano-cylindrical shells conveying various magnetic-nano-fluids resting on the electromagnetic-visco-Pasternak medium," *Thin-Walled Structures*, 2022, Vol.173, p.108926.

- [33] Karniadakis, George, Ali Beskok, and Narayan Aluru, "Microflows and nanoflows: fundamentals and simulation", Vol. 29, Springer Science & Business Media, 2006.
- [34] Oveissi, Soheil, Davood Toghraie, S. Ali Eftekhari, and Ali J. Chamkha, "Instabilities of SWCNT conveying laminar, incompressible and viscous fluid flow: effects of Knudsen number, the Winkler, the Pasternak elastic and the viscoelastic medium", *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2019.
- [35] Pollard, W.G., and Richard David Present, "On gaseous self-diffusion in long capillary tubes", *Physical Review*, 1948, Vol.73, no.7, p.762.
- [36] Sadeghi-Goughari, Moslem, Soo Jeon, and Hyock-Ju Kwon, "Fluid structure interaction of cantilever micro and nanotubes conveying magnetic fluid with small size effects under a transverse magnetic field", *Journal of Fluids and Structures*, 2020, Vol.94, p.102951.
- [37] Ali, Kashif, Sohail Ahmad, Ozaira Baluch, Wasim Jamshed, Mohamed R. Eid, and Amjad Ali Pasha, "Numerical study of magnetic field interaction with fully developed flow in a vertical duct", *Alexandria Engineering Journal*, 2022, Vol.61, no.12, pp.11351-11363.
- [38] Zhang, Y. Y., C. M. Wang, and V. B. C. Tan, "Assessment of Timoshenko beam models for vibrational behavior of single-walled carbon nanotubes using molecular dynamics", *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, Vol.1, no.1, pp.89-106.
- [39] Ansari, R., and H. Rouhi, "Nonlocal Flügge shell model for the axial buckling of single-walled Carbon nanotubes: An analytical approach", *International Journal of Nano Dimension*, 2015, Vol.6, no.5, pp.453-462.
- [40] Ansari, R., S. Ajori, and B. Arash, "Vibrations of single-and double-walled carbon nanotubes with layerwise boundary conditions: a molecular dynamics study", *Current Applied Physics*, 2012, Vol.12, no.3, pp.707-711.
- [41] Wen, Han, Min-Fan He, Yong Huang, and Jian Chen, "Free vibration analysis of single-walled carbon nanotubes based on the nonlocal higher-order cylindrical beam model", *Acta Acustica united with Acustica*, 2018, Vol.104, no.2, pp.284-294.
- [42] Mirsky, I., and G. Herrmann, "Nonaxially symmetric motions of cylindrical shells", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1959, Vol.31, no.2, pp.250-250.
- [43] Reddy, J. N., "Exact solutions of moderately thick laminated shells", *Journal of Engineering Mechanics*, 1984, Vol.110, no.5, pp.794-809.
- [44] Khalili, S. M. R., A. Davar, and K. Malekzadeh Fard, "Free vibration analysis of homogeneous isotropic circular cylindrical shells based on a new three-dimensional refined higher-order theory", *International journal of Mechanical sciences*, 2012, Vol.56, no.1, pp.1-25.
- [45] Armenàkas, Anthony E., Denos C. Gazis, and George Herrmann, "Free vibrations of circular cylindrical shells", Elsevier, 2016.
- [46] Shokrgozar, Ali, Hamed Safarpour, and Mostafa Habibi, "Influence of system parameters on buckling and frequency analysis of a spinning cantilever cylindrical 3D shell coupled with piezoelectric actuator", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2020, Vol.234, no.2, pp.512-529.
- [47] Vinson, J. R., R. B. Pipes, William J. Walker, and Donald R. Ulrich, *The Effects of Relative Humidity and Elevated Temperature on Composite Structures*, Delaware Univ Newark Center for Composite Materials, 1976.

پی نوشت

1. Single-Walled Carbon NanoTubes (SWCNTs)
2. Coefficient of Thermal Expansion (CTE)
3. Hygrothermal
4. Thermo-Hygro-Elastic problem (THE-problem)
5. Cylindrical-Sinusoidal-Nonlocal Higher-Order Shear Deformation Theory (CSN-HSDT)
6. Fluid-Structure Interaction problem (FSI-problem)
7. Knudsen number

-
8. Pollard
 9. Hartmann number
 10. Coefficient of Hygrohermal Expansion (CHE)
 11. Tersoff-Brenner
 12. Lennard Jones
 13. Carbon Nano-Shells (CNSs)
 14. Phonon dispersion
 15. Hartmann number