

# فرکانس‌های تشدید ظاهری در دیسک‌های دوار

حمید مهدیقلی  
استادیار دانشکده مهندسی مکانیک  
دانشگاه صنعتی شریف  
mehdi@sharif.edu

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۶/۱۵

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۸/۴

## چکیده

در این مقاله با در نظر گرفتن مودهای قطری در یک مدل ساده‌شده یک دیسک دوار، پاسخ آن به تحریک هارمونیک غیردوار مورد بررسی قرار می‌گیرد. نشان داده خواهد شد که فرکانس‌های تشدید دیسک در حالت‌های ثابت و دوار متفاوت می‌باشد. همچنین، فرکانس‌های دیسک دوار در یک مرجع ساکن متشکل از سه مؤلفه خواهد بود که این مقادیر با نتایج حاصل از بررسی‌های تجربی ارائه‌شده، مورد تأیید قرار می‌گیرد.

**واژگان کلیدی:** فرکانس تشدید ظاهری، مودهای قطری، آزمون چکش، دیسک دوار

## ۱. مقدمه

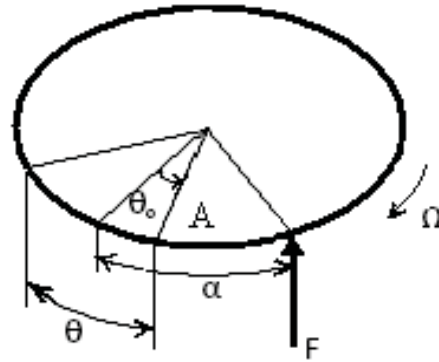
در تحلیل ارتعاشی دیسک‌های دوار، مودهای قطری به خاطر داشتن شرایط مناسب در مقابل عوامل تحریک در ماشین‌های دوار حائز اهمیت می‌باشند. با وجود این که پژوهش‌های فراوانی برای شناسایی مودهای ارتعاشی و ارتعاشات اجباری دیسک‌های دوار صورت گرفته است [۱،۲]، در بخش شناسایی جزئیات پاسخ تحقیقات کم و نوعاً ناقصی گزارش شده است. مودهای قطری منشأ موجهای متحرک و موجهای ایستا بوده که به عنوان مسبب بسیاری از خرابی‌ها در دیسک‌های توربین‌ها شناخته شده اند [۳،۴]. در دیسک‌ها اغلب مودها دوگانه می‌باشند، یعنی دو مود با فرکانس و میرایی برابر و شکل مود یکسان ولی نود درجه نسبت به هم، به صورت سینوس و کسینوس در روی دیسک قرار دارند [۵]. ویسن سل و همکاران پاسخ

نیروی متمرکز جانبی روی دیسک دوار را مطالعه نموده‌اند [۶]. آنها نشان داده اند که احتمال زیادی برای وضعیت تشدید در مدل‌های مذکور وجود خواهد داشت. استاپلز در مقاله خود پاسخ موج متحرک را در پوسته توربین، مدلسازی و بررسی نمود [۷]. او شرایط تشدید و اهمیت موج متحرک را با استفاده از دو لرزاننده<sup>۱</sup> به جای استفاده از یک لرزاننده نشان داد. در این پژوهش، ابتدا پاسخ حالت پایای هریک از زوج مودهای قطر گرهی در یک دیسک دوار تحت نیروی هارمونیک ساکن (غیردوار) به دست آمده و سپس با ترکیب آنها پاسخ کلی برای یک زوج مود قطری مشخص می‌شود. با توجه به روابط به دست آمده فرکانس‌های تشدید و سرعت دورانی بحرانی از دید ناظر ساکن یا حسگر غیرتماسی، بررسی می‌شود.

## ۲. پاسخ هارمونیک زوج مود قطرگرهی دیسک

با توجه به این که موج‌های متحرک به خاطر مودهای قطری به وجود می‌آیند و تغییرشکل این مودها هم فقط در جهت محیطی می‌باشد، می‌توان پاسخ دیسک در اثر تحریک یک مود قطری را تنها با رفتار تار محیطی آن ارائه نمود. مطابق شکل ۱ مدل دیسک دواری را در نظر می‌گیریم که با سرعت  $\Omega$  می‌گردد در حالی که نیروی هارمونیک  $F$  و غیرمتحرک به صورت عرضی به آن اعمال می‌شود. ابتدا پاسخ یکی از زوج مود  $n$  قطری را به دست می‌آوریم. شکل مود به صورت  $\varphi(\theta) = \sin n\theta$  و فرکانس طبیعی آن  $\omega_n$  فرض می‌شود. مختصه  $\theta$  با دیسک حرکت می‌کند در حالی که مختصه  $\theta_0$  غیردوار و ثابت است. موقعیت محل اعمال نیرو و نقطه  $A$  یک نقطه عمومی از دیسک می‌باشد. نیروی تعمیم‌یافته برای مود در نظر گرفته شده عبارت است از:

$$Q(t) = (F_0 \cos \omega t) \delta[\theta - (\Omega t + \alpha)] \quad (1)$$



شکل ۱. مدل تحریک هارمونیک مود قطری یک دیسک دوار

با فرض میرایی ناچیز برای دیسک، پاسخ نرمال با استفاده از انتگرال کانولوشن به دست می‌آید:

$$q(t) = \frac{1}{m_n \omega_n} \int_0^t Q(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (2)$$

که در آن  $m_n$  جرم مودال یا جرم تعمیم‌یافته می‌باشد. با جایگذاری معادله ۱ در معادله ۲ و پس از انتگرال‌گیری و ساده‌سازی، بخش پایا، که در واقع مختصه نرمال مود  $n$

قطری است، به دست می‌آید. بنابر این، پاسخ مربوطه برابر می‌شود با:

$$X_{n1}(\theta, t) = q_s(t) \varphi(\theta) \\ X_{n1}(\theta, t) = -W_1 \sin[(\omega + n\Omega)t + n\alpha] \sin n\theta + \\ + W_2 \sin[(\omega - n\Omega)t - n\alpha] \sin n\theta \quad (3)$$

که در آن داریم:

$$W_1 = \frac{F_0}{2m_n [(\omega + n\Omega)^2 - \omega_n^2]} \\ W_2 = \frac{F_0}{2m_n [(\omega - n\Omega)^2 - \omega_n^2]} \quad (4)$$

ملاحظه می‌شود که پاسخ از دو موج ایستا با فرکانس‌های  $(\omega \pm n\Omega)$  ترکیب شده است. معادلات ۳ و ۴ نشان می‌دهند که در دو فرکانس، دامنه پاسخ خیلی زیاد خواهد شد. این دو، فرکانس‌هایی هستند که مخرج را صفر می‌کنند:

$$\omega_a^- = \omega_n - n\Omega \\ \omega_a^+ = \omega_n + n\Omega \quad (5)$$

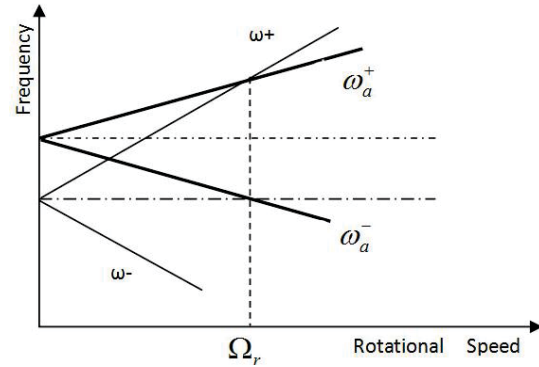
این دو فرکانس، فرکانس‌های تشدید ظاهری نامیده می‌شوند. اکنون اگر مختصه ساکن  $\theta_0$  را برای تحلیل در نظر بگیریم، کافی است بر اساس شکل ۱ تغییر متغیر  $\theta = \theta_0 + \Omega t$  را در معادلات به دست آمده انجام دهیم. پس از جایگذاری و ساده‌سازی، سهم مود سینوسی در پاسخ در اثر تحریک هارمونیک ساکن به دست می‌آید:

$$X_{n1}(\theta_0, t) = -\frac{W_1}{2} \cos[n\theta_0 - \omega t - n\alpha] + \\ + \frac{W_1}{2} \cos[n\theta_0 + (\omega + 2n\Omega)t + n\alpha] - \\ + \frac{W_2}{2} \cos[n\theta_0 + \omega t - n\alpha] + \\ + \frac{W_2}{2} \cos[n\theta_0 - (\omega - 2n\Omega)t + n\alpha] \quad (6)$$

معادله ۶ پاسخ برای مود سینوسی از زوج مود  $n$  قطری دیسک دوار بر حسب مختصه ثابت است و نشان می‌دهد که فرکانس‌هایی که توسط یک حسگر ساکن اندازه‌گیری می‌شوند عبارتند از:  $\omega$  و  $(\omega \pm 2n\Omega)$ . این سه فرکانس در شکل ۲ ترسیم شده‌اند. نکته قابل توجه این است که فرکانس‌های تشدید ظاهری حاصل از معادله ۶ همان‌هایی

هستند که در معادله ۶ معرفی گردیدند. بنابر این آنها مستقل از مختصات انتخابی می‌باشند. اگر فرکانس تحریک  $\omega$  باشد، در سرعت دورانی  $r\Omega$  تشدید اتفاق می‌افتد.

$$\Omega_r = \frac{\omega_{n1} - \omega}{n}$$



شکل ۲. فرکانس‌های تحریک و پاسخ در یک دیسک دوار از دید مختصات ساکن

### ۳. مشارکت زوج مود قطرگرهی دیسک دوار در پاسخ هارمونیک

با ترکیب روابط ۶ و ۹، مشارکت زوج مود قطری در پاسخ هارمونیک ساکن دیسک دوار مشخص می‌شود:

$$X_n(\theta_0, t) \quad (10)$$

در حالتی که دیسک کاملاً متقارن و در جهت محیطی یکنواخت باشد، دو فرکانس طبیعی و جرمهای مودال هر زوج مود قطری یکسان بوده و معادله ۱۰ به صورت زیر ساده می‌شود، که معرف دو موج متحرک می‌باشد.

$$X_n(\theta_0, t) = -W_{13} \cos[n\theta_0 - \omega t - n\alpha] - W_{24} \cos[n\theta_0 + \omega t - n\alpha] \quad (11)$$

به طوری که  $W_{13} = W_1 = W_3$  و  $W_{24} = W_2 = W_4$  می‌باشند. شکل ۳ برداشت دو فرکانس تشدید در دیسک را در هر سرعت دورانی نشان می‌دهد.  $\omega_n$  معرف همان فرکانس‌های طبیعی  $\omega_{n1}$  و  $\omega_{n2}$  می‌باشد. به عنوان مثال، هنگامی که فرکانس نیروی تحریک  $\omega$  باشد، در سرعت دوران  $\Omega_r$  تشدید اتفاق می‌افتد.

$$\Omega_r = \frac{\omega_n - \omega}{n}$$

نقطه C در این نمودار وضعیت پاسخ در حالت نیروی غیرهارمونیک ثابت را نشان می‌دهد. برای این حالت معادله ۱۲ به صورت زیر در می‌آید:

$$X_n(\theta_0, t) = -2W \cos[n\theta_0 - n\alpha] \quad (12)$$

که در آن  $W_{13} = W_{24} = W$  شده است. معادله ۱۲ معرف یک موج ساکن است که در دیسک دوار از دید ناظر ساکن مشاهده می‌شود.

### ۴. تحلیل تجربی

برای انجام تحقیق تجربی روی نتایج به دست آمده در بخشهای قبلی، ابتدا دیسکی را مطابق شکل ۴ به طور مصنوعی غیریکنواخت کرده تا فرکانس‌های زوج مود دو قطری آن به مقدار کافی از هم متمایز گردند. تجهیزات اندازه‌گیری و مدار آزمایش نیز در شکل ۴ نشان داده شده است. دیسک مورد آزمایش، از جنس فولاد به قطر ۳۴

تا اینجا، پاسخ مود سینوسی زوج مود قطری به دست آمد. به همان روش نیز می‌توان پاسخ مربوط به مود کسینوسی این زوج مود را به شکل زیر به دست آورد:

$$X_{n2}(\theta, t) = -W_3 \cos[(\omega + n\Omega)t + n\alpha] \cos n\theta + W_2 \cos[(\omega - n\Omega)t - n\alpha] \cos n\theta \quad (7)$$

که در آن داریم:

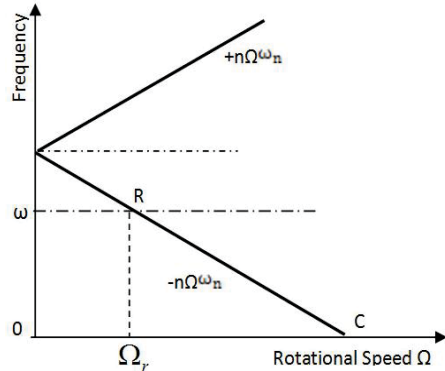
$$W_3 = \frac{F_0}{2m_{n2}[(\omega + n\Omega)^2 - \omega_{n2}^2]} \quad (8)$$

$$W_4 = \frac{F_0}{2m_{n2}[(\omega - n\Omega)^2 - \omega_{n2}^2]}$$

معادله ۷ معرف دو مؤلفه ارتعاش ثابت با فرکانس‌های  $\omega \pm n\Omega$  می‌باشد. با تحلیل در مختصات ثابت  $\theta_0$ ، رابطه ای مشابه معادله ای که برای مود سینوسی به دست آمد، حاصل می‌گردد:

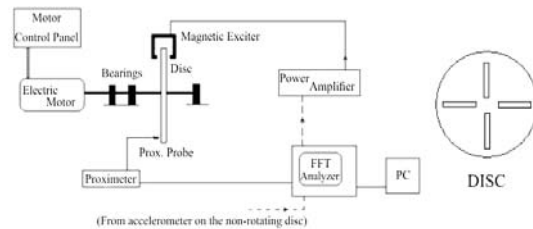
$$X_{n2}(\theta_0, t) = -\frac{W_3}{2} \cos[n\theta_0 - \omega t - n\alpha] - \frac{W_3}{2} \cos[n\theta_0 + (\omega + 2n\Omega)t + n\alpha] + \frac{W_4}{2} \cos[n\theta_0 - (\omega - 2n\Omega)t + n\alpha] - \frac{W_4}{2} \cos[n\theta_0 + \omega t - n\alpha] \quad (9)$$

سائتی متر و ضخامت ۵ میلی متر است. نیروی تحریک هارمونیک بر روی دیسک دوار توسط یک مغناطیس الکتریکی اعمال می شود.



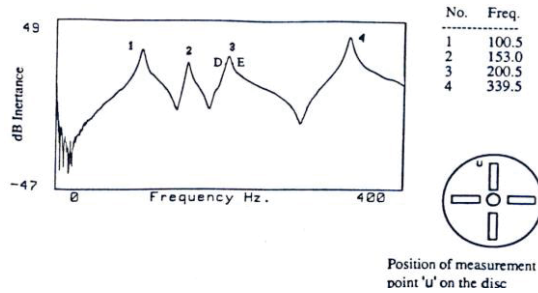
شکل ۳. نمودار تغییرات فرکانس های طبیعی ظاهری مود قطری

دیسک، بر حسب سرعت دوران

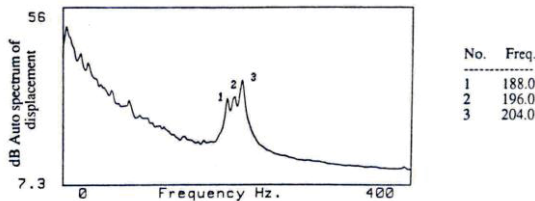


شکل ۴: دیسک مورد آزمایش و مدار دستگاه آزمایش

شاخص در ۱۸۸، ۱۹۶ و ۲۰۴ هرتز نمایان هستند که با ۳ فرکانس پاسخ  $\omega$  و  $\omega \pm 2n\Omega$  به دست آمده در بخش ۲ مطابقت دارند. نظیر این آزمایش در فرکانس تحریک نظیر نقطه  $D$  در شکل ۵، و نیز در نقاط دیگری در حوالی فرکانس پایینی مود دو قطری انجام شد و نتیجه یکسانی به دست آمد.



شکل ۵. نمونه ای از نتایج آزمایش ضربه چکش روی دیسک

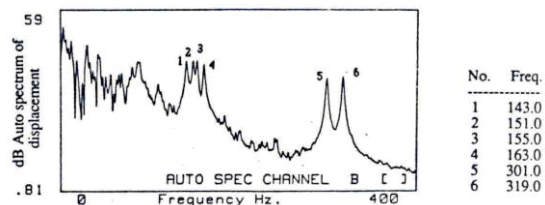


شکل ۶. طیف فرکانسی حاصل از تحریک هارمونیک دیسک دوار در فرکانس ۱۹۶ هرتز

پاسخ دیسک دوار به تحریک اتفاقی: در این آزمایش یک سیگنال اتفاقی توسط ژنراتور دستگاه تحلیلگر تبدیل فوریه سریع<sup>۲</sup> ایجاد و به محرک غیرتماسی مغناطیسی وارد شده تا دیسک دوار را به ارتعاش وادارد. در این آزمایش، دیسک در حالت بدون قطعات اضافی به کار رفته است. شکل ۷ طیف فرکانسی پاسخ دیسک با سرعت دورانی برابر ۱۸۰ دور در دقیقه (۳ هرتز) نشان داده شده است. فرکانس های تشدید به دست آمده در ارتباط با مود دو قطری دیسک عبارتند از: ۱۴۳، ۱۵۱، ۱۵۵ و ۱۶۳ هرتز، به این صورت که در اینجا  $n\Omega = 2(3) = 6 \text{ Hz}$  می باشد، و از سوی دیگر فرکانس های مود دو قطری دیسک از آزمون چکش برابر  $\omega_{n1} = 149 \text{ Hz}$  و  $\omega_{n2} = 157 \text{ Hz}$  می باشند. بنابراین ملاحظه می شود

آزمایش ها در سه قسمت انجام شده اند: آزمون چکش روی دیسک ساکن، آزمون با تحریک هارمونیک روی دیسک دوار و نیز آزمون تحریک اتفاقی روی دیسک دوار. در آزمایش های مختلف با استفاده از ضربه چکش، مطمئن شدیم که فرکانس های مودهای دو قطری دیسک برابر ۱۵۳ هرتز و ۲۰۰ هرتز می باشند. نمونه ای از این سری آزمایش ها در شکل ۵ آمده است. در آزمایش دیسک دوار تحت نیروی هارمونیک ثابت، سرعت دوران روی ۱۲۰ دور در دقیقه (۲ هرتز) و فرکانس نیروی تحریک هارمونیک برابر ۱۹۶ هرتز انتخاب گردید. این فرکانس در شکل ۵ با حرف D نشان داده شده است. طیف سیگنال به دست آمده از حسگر غیرتماسی در نزدیکی دیسک در شکل ۶ نشان داده شده است. مطابق این شکل، در پاسخ سه فرکانس

فرکانس‌های تشدید ۱۴۳ و ۱۵۵ مربوط به  $\omega_{n1}$  و فرکانس‌های تشدید ۱۵۱ و ۱۶۳ در ارتباط با  $\omega_{n2}$  هستند که تأییدکننده مقادیر تئوری در رابطه به دست آمده می‌باشند.



شکل ۷. طیف فرکانسی دیسک دوار به تحریک اتفاقی

در شکل ۷ همچنین فرکانس‌های تشدید ظاهری برای مود سه قطری دیسک برابر ۳۰۱ و ۳۰۹ هرتز اندازه‌گیری شده است. با توجه به این که از آزمون چکش، برای این مود فرکانس‌های طبیعی  $\omega_{n1} = \omega_{n2} = 310\text{Hz}$  به دست آمده، و برای این حالت  $n\Omega = 3(3) = 9\text{ Hz}$  می‌باشد، مشاهده می‌شود که برای این مود نیز روابط تئوری به دست آمده

## ۶. مآخذ

- [1] YU, R.C., C.D. MOTE Jr. "Vibration and parametric Excitation in Asymmetric Circular plates under Moving Load." *Journal of Sound and Vibration*, vol. 119(3), (1987):409-427.
- [2] Khoshnood, A., M. A. Jalali. "Normal oscillatory modes of rotating orthotropic disks." *Journal of Sound and Vibration*, vol.314, issue 1-2, (2008):147-160.
- [3] Campbell, W. "The Protection of Steam-turbine Disk Wheels from Axial Vibration." *ASME Transaction*, vol.46, 1924.
- [4] Tobias, S.A., R.N. Arnold. "The Influence of Dynamical Imperfection on the vibration of Rotating Disks." *Institute of Mechanical Engineers Proceedings*, vol.171, 1957.
- [5] Ewins, D.J. "The Effects of Detuning upon the Forced Vibrations of Bladed Disks." *Journal of Sound and vibration*, vol. 9(1), (1969):65-79.
- [6] Weisensel, G.N. and A.L. Schlack, Jr. "Forced Response of rotating thin Annular Plates to Moving Concentrated Transverse Loads with Sudden Changes Radial Position." *Modal Analysis 7<sup>th</sup> International Conference*, Las Vegas, Nevada, vol.7, pp. 199-1204, 1989.
- [7] Staples, B.C. "Excitation of Traveling Wave Response in Axi-symmetric Structures." *Proceedings of the 15<sup>th</sup> Intl. Seminar on Modal Analysis*, 19-21 September 1990.
- [8] TSE, F.S., I.E. MORSE and R.T. HINKLE. *Mechanical Vibrations: Theory and Applications*, Allyn and Bacon, Inc., 1978.

پی‌نوشت

1. Shaker

2. FFT

برای فرکانس‌های ظاهری تشدید با مقادیر آزمایش همخوانی دارد.

## ۵. نتیجه‌گیری

پاسخ پایای هر مود قطری یک دیسک دوار به نیروی تحریک هارمونیک ساکن دارای سه مؤلفه فرکانسی  $\omega$ ،  $\omega - 2n\Omega$  و  $\omega + 2n\Omega$  از دید ناظر ثابت، و دارای دو مؤلفه فرکانسی  $\omega \pm n\Omega$  نسبت به دستگاه مختصات متصل به دیسک دوار می‌باشد. همچنین در یک دیسک دوار، فرکانس طبیعی هر یک از مودهای قطری معادل فرکانس تشدید نبوده بلکه فرکانس‌های تشدید برای هر یک از مودهای قطری برابر  $\omega_n \pm n\Omega$  می‌باشد. در یک دیسک دوار یکنواخت و همگن، پاسخ به نیروی تحریک غیر هارمونیک ثابت ( $\omega=0$ )، موج ساکن می‌باشد. این حالت برای تمام سرعت‌های دورانی است ولی در حالت تشدید سرعت دورانی برابر  $\Omega_r = \frac{\omega_n}{n}$  می‌باشد.