

# ارتعاشات در سیستم‌های چرخنده‌ای

انوشیروان فرشیدیان فر<sup>۱\*</sup>، امین ثقفی<sup>۲</sup>، ایمان ثقفی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> استاد دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد

<sup>۲</sup> دانشجوی دکترای مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد

<sup>۳</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

\*farshid@um.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۹۱/۰۸/۰۴

تاریخ دریافت: ۹۱/۰۶/۲۷

## چکیده

چرخنده‌ها به عنوان یکی از منابع مهم ارتعاشات و صدا در سیستم‌های دوار صنعتی شناخته شده اند. پیش‌بینی و کنترل ارتعاشات چرخنده‌ها به منظور طراحی یک سیستم انتقال چرخنده‌ای بهینه مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. مدل‌های متنوعی از چرخنده‌ها برای اهداف مختلفی ارائه شده اند که از مهم‌ترین این اهداف می‌توان به بررسی و تحلیل ارتعاشی، تحلیل تنش، کنترل نوفه، تحلیل پایداری، قابلیت اطمینان و عمر خستگی سیستم اشاره نمود. این پژوهش به بررسی و مطالعه ارتعاشات سیستم‌های انتقال چرخنده‌ای، تحقیقات و پیشرفت‌های انجام گرفته در این زمینه می‌پردازد. بطور کلی، مدل‌های ریاضی و عوامل مؤثر در دینامیک غیرخطی سیستم‌های چرخنده‌ای بررسی و همچنین به موارد و موضوعات قابل تأمل برای تحقیقات بیشتر در این زمینه نیز اشاره می‌گردد.

**واژه‌های کلیدی:** چرخنده، ارتعاشات غیرخطی، سیستم انتقال، جعبه‌دنده

## ۱. مقدمه

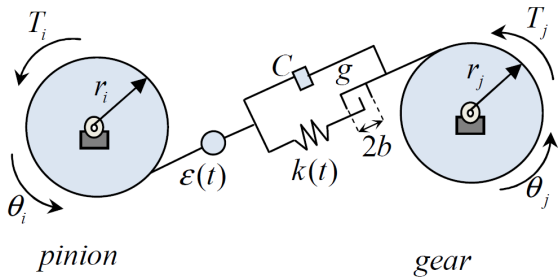
چرخنده‌ها یکی از منابع مهم و مؤثر در ایجاد ارتعاشات و نوفه در سیستم‌های انتقال قدرت و جعبه‌دنده‌ها می‌باشند. به دلیل حساسیت زیاد سیستم چرخنده‌ای به پارامترهای مختلف طراحی، پاسخ ارتعاشی سیستم پیچیده و کنترل آن دشوار می‌گردد. بنابراین به منظور طراحی و گسترش یک سیستم چرخنده‌ای آرام و بادوام، فهم دقیق از قوانین و روابط حاکم بر دینامیک چرخنده ضروری می‌باشد. با توجه به اهمیت موضوع، تحقیقات گسترده‌ای در زمینه دینامیک غیرخطی چرخنده‌ها صورت پذیرفته است. مدل‌های ارائه‌شده در بررسی‌های گسترده نشان‌دهنده تغییرات قابل توجهی در فرضیات پایه و اساسی می‌باشند. برای یک دوره طولانی، سیستم‌های انتقال چرخنده‌ای با تئوری ارتعاشات خطی بدون توجه به عوامل غیرخطی مورد بررسی قرار می‌گرفت [۱]. با پیشرفت ارتعاشات و بررسی دقیق‌تر بارگذاری دینامیکی و پاسخ ارتعاشی سیستم‌های چرخنده‌ای رفته‌رفته معلوم شد که ارتعاش سیستم‌های چرخنده‌ای باید به صورت غیرخطی مورد بررسی قرار گیرد. پارامترهای غیرخطی مؤثر در ارتعاشات سیستم‌های چرخنده‌ای از قبیل سختی درگیری

متغیر با زمان چرخنده‌ها<sup>۱</sup>، پس‌زنی<sup>۲</sup>، خطاهای انتقال چرخنده<sup>۳</sup>، اصطکاک بین سطوح دنده‌ها و غیره، بر روی سیستم‌های چرخنده‌ای به طور وسیعی در سال‌های اخیر مورد بررسی قرار گرفته است. هدف از این پژوهش ارائه یک دید کلی از تحقیقات صورت‌گرفته در زمینه ارتعاشات سیستم‌های چرخنده‌ای می‌باشد. یک تقسیم‌بندی کلی از مدل‌های مختلف چرخنده با توجه به عوامل و پارامترهای مؤثر در ارتعاشات سیستم، ارائه می‌گردد. در ادامه نیز بیان مفصلی از مشخصه‌های ارتعاشی سیستم چرخنده‌ای و تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل سختی درگیری متغیربازمان دندانه‌ها، پس‌زنی و مسأله تکرار ضربه<sup>۴</sup>، تغییر پروفیل دندانه<sup>۵</sup>، خطای انتقال، نسبت درگیری اینولوت (*ICR*)<sup>۶</sup> و اصطکاک دندانه‌ها، بر روی رفتار دینامیکی چرخنده ارائه می‌شود.

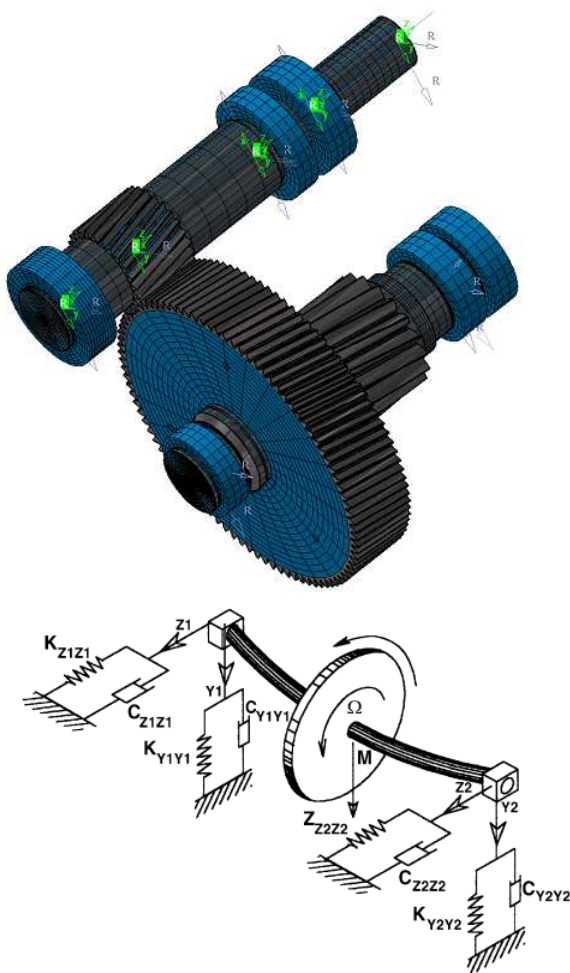
## ۲. مدلسازی سیستم چرخنده‌ای

این بخش اطلاعاتی خلاصه در مورد مدل‌ها، تقریب‌ها و فرضیات مورد استفاده در مدلسازی سیستم‌های چرخنده‌ای ارائه می‌دهد.

در حالی که در مدل‌های پیچشی-انتقالی علاوه بر انعطاف‌پذیری پیچشی، انعطاف‌پذیری عرضی محورها نیز مطرح شده است.



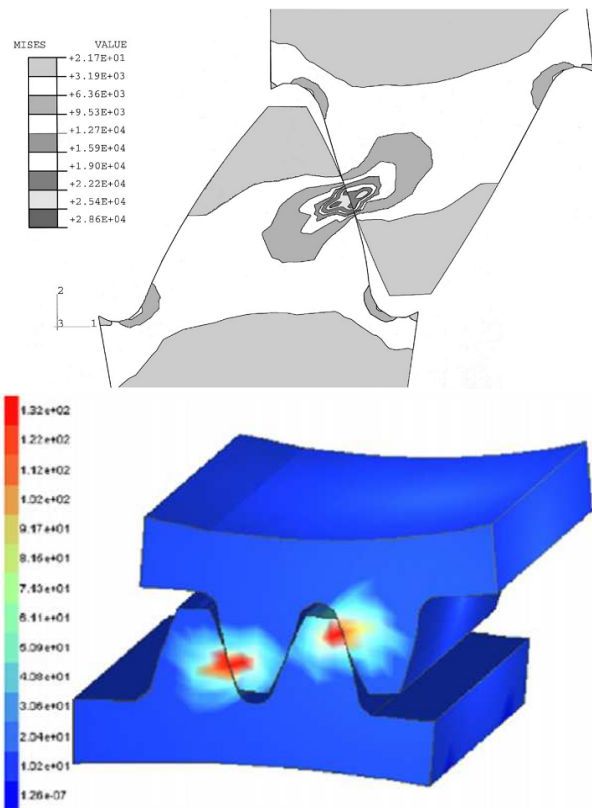
شکل ۲. مدل دینامیکی یک جفت چرخدنده



شکل ۳. مدل چرخدنده با در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری محورها و یاتاقان‌ها

مطالعات پیشرفته در زمینه ارتعاشات سیستم‌های چرخدنده‌ای را می‌توان در مدل‌های دینامیک کامل جعبه‌دنده ارائه نمود. توجه و تمرکز اصلی این مدل‌ها بر روی تحلیل دینامیکی سیستم‌های چرخدنده‌ای بوده که همه اجزای درگیر در سیستم از قبیل جفت‌چرخدنده‌ها، محورها، یاتاقان‌ها، موتور،

همان‌طور که اشاره شد، مدل‌های متنوعی از چرخدنده‌ها با اهداف مختلفی ارائه شده‌اند. مطالعات زیادی وجود دارد که در آن دندانه‌ها به عنوان تنها جزء سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرند. اجزای دیگر سیستم به صورت کاملاً صلب فرض شده و از انعطاف‌پذیری (پیچشی و یا عرضی) شفت‌ها، یاتاقان‌ها و سایر اجزا صرف‌نظر می‌گردد [۴-۲]. عموماً در این قبیل تحلیل‌ها، تمرکز اصلی بر روی تحلیل تنش‌های تماسی (شکل ۱) و نیز ارتعاشات پیچشی و انتقالی چرخدنده‌های درگیر می‌باشد که در این بررسی‌ها غالباً، چرخدنده‌ها به صورت یک سیستم جرم و فنر مطابق شکل (۲) مدل می‌شوند.



شکل ۱. تحلیل تنش در سطح دندانه‌ها

باید به این مسأله توجه داشت که در مدل‌هایی که از سهم جرم و سختی محورها صرف‌نظر شده، نتایج حاصل مطابقت خوبی با داده‌های آزمایشی ندارند. برای دستیابی به نتایج دقیق نیاز به ارائه مدل‌های دینامیکی کامل‌تری می‌باشد که سهم انعطاف‌پذیری محورها و یاتاقان‌ها و نیز جرم اجزای دیگر نیز در آنها در نظر گرفته شده باشد [۹-۵]. مدل‌های ارائه شده در این حالت اساساً شامل مدل‌های پیچشی و یا پیچشی-انتقالی می‌باشند (شکل ۳). در مدل‌های پیچشی فقط سختی پیچشی محورهای چرخدنده در نظر گرفته شده

- [23] J. Wang, T.C. Lim, M. Li, Dynamics of a hypoid gear pair considering the effects of time-varying mesh parameters and backlash nonlinearity, *J. Sound & Vib.*, 308, 302–329, 2007.
- [24] A. Kahraman, G.W. Blankenship, Interactions between commensurate parametric and forcing excitations in a system with clearance, *J. Sound & Vib.*, 194(3), 317–336, 1996.
- [25] S. Theodossiadis, S. Natsiavas, Non-linear dynamics of gear-pair systems with periodic stiffness and backlash, *J. Sound & Vib.*, 229(2), 287–310, 2000.
- [26] L. Walha, T. Fakhfakh, M. Haddar, Nonlinear dynamics of a two-stage gear system with mesh stiffness fluctuation, bearing flexibility and backlash, *Mech. and Machine Theory*, 44, 1058–1069, 2009.
- [27] Y. Shen, S. Yang, X. Liu, Nonlinear dynamics of a spur gear pair with time-varying stiffness and backlash based on incremental harmonic balance method, *I. J. Mech. S.*, 48, 1256–1263, 2006.
- [28] G.W. Blankenship, R. Singh, A new gear mesh interface dynamic model to predict multi-dimensional force coupling and excitation, *Mech. and Machine Theory*, 30(1), 43–57, 1995.
- [29] H. Iida, A. Tamura, Coupled torsional-flexural vibration of shaft in a geared system, *Proc. of Conf. Vibr. Rotating Mech.*, Institution of Mech. E., 67–72, 1984.
- [30] T.C. Lim, J. Li, Dynamic analysis of multi-mesh countershaft transmission, *J. Sound & Vib.*, 219(5), 905–919, 1999.
- [31] S. Oda, T. Koide, K. Miyachika, Dynamic behavior of thinrimmed helical gears with various web, *Bull. JSME.*, 28, 2434–2441, 1985.
- [32] H. Okamura, Y. Suzuki, N. Nakano, Experiments and analysis of sound-damping rings for gears: application of snap rings, *ASME DE*, 88, 345–354, 1996.
- [33] J.R. Ottewill, S.A. Neild, R.E. Wilson, An investigation into the effect of tooth profile errors on gear rattle, *J. Sound & Vib.*, 329, 3495–3506, 2010.
- [34] G. Bonori, F. Pellicano, Non-smooth dynamics of spur gears with manufacturing errors, *J. Sound & Vib.*, 306, 271–283, 2007.
- [35] M. Inalpolat, A. Kahraman, A dynamic model to predict modulation sidebands of a planetary gear set having manufacturing errors, *J. Sound & Vib.*, 329, 371–393, 2010.
- [36] D. Park, A. Kahraman, A surface wear model for hypoid gear pairs, *Wear*, 267, 1595–1604, 2009.
- [37] S. Dhanasekaran, R. Gnanamoorthy, Gear tooth wear in sintered spur gears under dry running conditions, *Wear*, 265, 81–87, (2008).
- [38] R.J. Comparin, R. Singh, An analytical study of automobile neutral gear rattle, *ASME J. Mech. Des.* 112, 237–245, 1990.
- [39] T. Sakai, Y. Doi, K. Yamatommo, T. Ogasawara, M. Narita, Theoretical and experimental analysis of rattling noise of automotive gearbox, *SAE Paper*, 810-773, 1982.
- [40] G.S. Whiston, Global dynamics of a vibro-impacting linear oscillator, *J. Sound & Vib.*, 118(3), 395–429, 1987.
- [5] H. Vinayak, R. Singh, C. Padmanabhan, Linear dynamic analysis of multi-mesh transmissions containing external rigid gears, *J. Sound & Vib.*, 185(1), 1–32, 1995.
- [6] H. Iida, coupled torsional-flexural vibration of a shaft in geared system of rotor, *bulletin of the JSME*, 23(186), 2111–2117, 1980.
- [7] A. Kahraman, dynamic analysis of geared rotor by Finite Element, *J. Mech. Des.*, 114, 507–514, September 1992.
- [8] W. Kim, H.H. Yoo, J. Chung, Dynamic analysis for a pair of spur gears with translational motion due to bearing deformation, *J. of Sound & Vib.*, 329, 4409–4421, 2010.
- [9] M.S. Abbes, M.S. Trigui, F. Chaari, T. Fakhfakh, M. Haddar, Dynamic behaviour modelling of a flexible gear system by the elastic foundation theory in presence of defects, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 29, 887–896, 2010.
- [10] M. Kato, Evaluation of sound power radiated by a gearbox, *International Gearing Conference*, University of Newcastle, UK, 1994.
- [11] M.S. Abbes, S. Bouaziz, F. Chaari, M. Maatar, M. Haddar, An acoustic-structural interaction modelling for the evaluation of a gearbox-radiated noise, *I. J. Mech. S.*, 50, 569–577, 2008.
- [12] H. Yuan, C. Guan Teik, W. Lim, S. Shepard Jr., Experimental study on active vibration control of a gearbox system, *J. Sound & Vib.*, 282, 713–733, 2005.
- [13] A. Kahraman, G.W. Blankenship, Experiments on nonlinear dynamic behavior of an oscillator with clearance and periodically time-varying parameters, *ASME J. Appl. Mech.*, 64, 217–226, 1997.
- [14] H. Vinayak, R. Singh, Multi-body dynamics and modal analysis of compliant gear bodies, *J. Sound & Vib.*, 210(2), 171–214, 1998.
- [15] G.W. Hill, On the part of motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon, *Acta Math.*, 8, 1–36, 1886.
- [16] E. Mathieu, Memoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique, *J. Math. Pures Appl.*, 13, 137–203, 1868.
- [17] M. Benton, A. Seireg, Simulation of resonances and instability conditions in pinion-gear systems, *ASME J. Mech. Des.*, 100, 26–32, 1978.
- [18] M. Benton, A. Seireg, Factors influencing instability and resonance in Geared systems, *ASME J. Mech. Des.*, 103, 372–378, 1981.
- [19] S. He, R. Gunda, R. Singh, Effect of sliding friction on the dynamics of spur gear pair with realistic time-varying stiffness, *J. Sound & Vib.*, 301, 927–949, 2007.
- [20] J. Wang, T.C. Lim, Effect of tooth mesh stiffness asymmetric nonlinearity for drive and coast sides on hypoid gear dynamics, *J. Sound & Vib.*, 319, 885–903, 2009.
- [21] A. Kahraman, R. Singh, Non-linear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearance, *J. Sound & Vib.*, 144(3), 469–506, 1991.
- [22] C. Padmanabhan, R. Singh, Spectral coupling issues in a two-degree-of freedom system with clearance non-linearities, *J. Sound & Vib.*, 155(2), 209–230, 1992.

- [60] D.R. Houser, V.M. Bolze, J.M. Graber, Static and dynamic transmission error measurements and predictions for spur and helical gear sets, *Proc. of 7th ASME Int Power Transmission and Gearing Conf.*, San Diego, CA, 365–372, 1996.
- [61] A. Kahraman, J. Lim, H. Ding, A Dynamic Model of a Spur Gear Pair with Friction, *12th IFToMM World Congress*, Besançon, France, June 18–21, 2007.
- [62] O. Lundvall, N.Str. Omberg, A. Klarbring, A flexible multi-body approach for frictional contact in spur gears, *J. Sound & Vib.*, 278, 479–499, 2004.
- [63] S. He, S. Cho, R. Singh, Prediction of dynamic friction forces in spur gears using alternate sliding friction formulations, *J. Sound & Vib.*, 309, 843–851, 2008.
- [64] P. Velex, V. Cahouet, Experimental and numerical investigations on the influence of tooth friction in spur and helical gear dynamics, *ASME J. Mech. Des.*, 122, 515–522, 2000.
- [65] M. Vaishya, R. Singh, Analysis of periodically varying gear mesh systems with Coulomb friction using Floquet, *J. Sound & Vib.*, 243, 525–545, 2001.
- [66] H. Winter, M. Kojima, A study on the dynamics of geared system—Estimation of overload on gears in system, *Proc. Int. Symp. Gearing and Power Trans.*, Tokyo, c-12, 1981.
- [67] A. Kahraman, R. Singh, Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance nonlinearities in a geared system, *J. Sound & Vib.*, 146(1), 135–156, 1991.
- [68] A. Raghobhama, S. Narayanan, Bifurcation and chaos in geared rotor bearing system by incremental harmonic balance method, *J. Sound & Vib.*, 226(3), 469–492, 1999.
- [69] K. Sato, S. Yamamoto, T. Kawakami, Bifurcation sets and chaotic states of a geared system subjected to harmonic excitation, *Computational Mech.*, Berlin 7, 173–182, 1991.
- [70] C. Wan, C. Jian, Strong nonlinearity analysis for gear-bearing system under nonlinear suspension, bifurcation and chaos, *Nonlinear Analysis: RealWorld Applications*, 11, 1760–1774, 2010.
- [71] C. Wan, C. Jian, S. M. Chang, Bifurcation and chaos analysis of spur gear pair with and without nonlinear suspension, *Nonlinear Analysis: RealWorld Applications*, 12, 979–989, 2011.
- [72] R.G. Parker, S.M. Vijayakar, T. Imajo, Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modeling and experimental comparisons, *J. Sound & Vib.*, 237, 435–455, 2000.
- [73] R. Li, T. Lin, Z. Tao, C. Yang, Structure modal analysis of gearbox, *Proc. of ICMT*, 360–362, 2001.
- [74] V.K. Ambarisha, R.G. Parker, Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models, *J. Sound & Vib.*, 302, 577–595, 2006.
- [41] S. Dubowsky, F. Freudenstein, Dynamic analysis of mechanical systems with clearances, Part 1, Formulation of dynamic model, *ASME J. Eng. Ind.*, 93, 305–309, 1971.
- [42] M.A. Veluswami, F.R.E. Crossley, Multiple impacts of a ball between two plates, Part 1: Some experiments observations, *ASME J. Eng. Ind.*, 97, 820–827, 1975.
- [43] Y. Yue, J.H. Xie, H.D. Xu, Symmetry of the Poincare map and its influence on bifurcations in a vibro-impact system, *J. Sound & Vib.*, 323, 292–312, 2009.
- [44] R.G. Munro, *The dynamic behavior of spur gears*, PhD dissertation, Cambridge Univ., 1962.
- [45] K. Nakamura, Tooth separations and abnormal noise on power transmission gears, *Bull. JSME* 10, 846–854, 1967.
- [46] H.N. Ozguven, D.R. Houser, Dynamic analysis of high speed gears by using loaded static transmission error, *J. Sound & Vib.*, 125, 71–83, 1988.
- [47] L.E. Galhoud, S.F. Masri, J.C. Anderson, Transfer function of a class of nonlinear multidegree of freedom oscillator, *ASME J. Appl. Mech.*, 54, 215–225, 1987.
- [48] T. Sato, K. Umezawa, J. Ishikawa, Effects of contact ratio and profile correction on gear rotational vibration, *Bull. JSME* 26, 2010–2016, 1983.
- [49] H.F. Quintero, S. Cardona, L. Jordi, An analytical model for the tooth profile generation of noncircular gear, *12th IFToMM World Congress*, Besançon France, June 18–21, 2007.
- [50] J. Hedlund, A. Lehtovaara, Modeling of helical gear contact with tooth deflection, *Tribology International*, 40, 613–619, 2007.
- [51] H.H. Lin, D.P. Townsend, F.B. Oswald, Profile modification to minimize spur gear dynamic loading, *Proc. of ASME 5th Int Power Trans Gearing Conf*, Chicago IL, 1, 455–465, 1989.
- [52] H.E. Staph, A parametric analysis of high-contact-ratio spur gears, *ASLE Trans.* 19, 201–215, 1976.
- [53] C.H. Liou, H.H. Lin, F.B. Oswald, D.P. Townsend, Effect of contact ratio on spur gear dynamic load with no tooth profile modifications, *ASME J. Mech. Des.*, 118, 439–443, 1996.
- [54] A. Kahraman, G.W. Blankenship, Effect of involute contact ratio on spur gear dynamics, *ASME J. Mech. Des.*, 121, 112–118, 1999.
- [55] K.F. Martin, A review of friction predictions in gear teeth, *Wear*, 49, 201–238, 1978.
- [56] K.L. Johnson, D.I. Spence, Determination of gear tooth friction by disc machine, *Tribol. Int.*, 24, 269–275, 1991.
- [57] M. Yoshizaki, C. Naruse, R. Nemoto, S. Haizuka, Study on frictional loss of spur gears (concerning the influence of tooth form, load, tooth surface roughness and lubricating oil), *Tribol. Trans.*, 31, 138–146, 1991.
- [58] B. Rebecchi, F. Oswald, D.P. Townsend, Measurement of gear tooth dynamic friction, *Proc. of 7th ASME Int Power Transmission and Gearing Conf.*, San Diego, CA, 355–363, 1996.
- [59] S. Wu, H.S. Cheng, A friction model of partial-EHL contacts and its application to power loss in spur gears, *Tribol. Trans.*, 34, 397–407, 1991.



# طراحی و ساخت دستگاه سنجش حجم با استفاده از امواج صوتی و حذف اثر تغییرات دما در اندازه‌گیری حجم

سید علی سلیمانی ایوری<sup>۱\*</sup>، سید هادی قادری<sup>۲</sup>، احسان حاجی اسماعیلی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشکده برق و روباتیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

<sup>۲</sup> دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

\*solimani\_ali@shahroodut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۱/۰۶/۲۸ تاریخ پذیرش: ۹۱/۰۸/۰۴

## چکیده

در این مقاله روشی آسان، کم‌هزینه و سریع برای اندازه‌گیری حجم ارائه شده است. برای نیل به این هدف، دستگاهی به نام حجم‌سنج اکوستیک طراحی و ساخته شده است. در این دستگاه، اندازه‌گیری حجم با استفاده از ایجاد تغییرات کوچک در حجم هوا و اندازه‌گیری تغییرات فشار حاصل از آن انجام می‌شود. دیاگرام بلوکی کل سیستم، دقت مبدل آنالوگ به دیجیتال، تعداد نمونه‌ها در یک دوره تناوب، مدت نمونه‌برداری، بررسی پاسخ فرکانسی سیستم، دلایل حساس بودن سیستم به تغییرات دما و نحوه جبران آن و نمایش نمودارهای لازم و نتیجه‌گیری مناسب موضوعاتی است که این مقاله به آنها پرداخته است. این دستگاه از سه بخش کامپیوتر، کنترل کننده و محفظه مکانیکی تشکیل شده است. کامپیوتر وظیفه دریافت و پردازش اطلاعات، کنترل کننده وظیفه کنترل فرکانس، دامنه و تقویت خروجی میکروفون‌ها و دریافت اطلاعات از واحد مکانیکی و ارسال آنها به کامپیوتر را بر عهده دارد. محفظه مکانیکی ساختاری استوانه‌ای داشته که جسم مورد نظر درون آن قرار می‌گیرد با استفاده از یک بلندگو تغییر فشاری درون آن ایجاد و با دو عدد میکروفون تغییرات فشار اندازه‌گیری می‌شود. توسط الگوریتم‌هایی، اطلاعات لازم جمع‌آوری و پردازش‌های متفاوتی روی اطلاعات انجام می‌شود و با استفاده از قوانین ترمودینامیک، حجم جسم محاسبه می‌گردد. سرعت بالا در اندازه‌گیری، هزینه کم، سادگی و دقت قابل قبول، بارزترین ویژگی‌های دستگاه ساخته شده است. اندازه‌گیری و تحلیل‌های مکانیکی و الکترونیکی نشان می‌دهد بهترین فرکانس مورد استفاده ۴۰ هرتز است که در این میان محدودیت اصلی را محفظه مکانیکی ایجاد می‌کند. دو راه برای مقابله با تغییرات دما وجود دارد یک راه کنترل دمای محیط و دیگری جبران آن است. بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهد مشکل اصلی در محفظه مکانیکی است. به این خاطر، حسگر دما روی محفظه مکانیکی قرار گرفته و با تغییرات کند دمای محیط، اطلاعات لازم از میکروفون‌ها و حسگر دما دریافت و ثبت شده است. اطلاعات جمع‌آوری شده پردازش شده و با استفاده از روش بهینه‌سازی  $PSO$ <sup>۱</sup> تابعی استخراج شده است که ترکیب آن با سیگنال‌های اندازه‌گیری شده میکروفون‌ها با دقت خوبی می‌تواند اثر تغییرات دما را حذف نماید به نحوی که اندازه‌گیری مستقل از تغییرات دما داشته باشیم.

## واژه‌های کلیدی: اندازه‌گیری حجم، جمع‌آوری اطلاعات، جبران سازی دما، الگوریتم $PSO$

### ۱. مقدمه

به وسیله آن حجم هوای درون محفظه مشخص می‌گردد. با دانستن حجم کل محفظه می‌توان حجم مایع درون آن را به دست آورد. در [۴] نیز روش و دستگاهی ارائه شده است که به وسیله آن می‌توان حجم هوای درون یک محفظه را اندازه گرفت. در این دستگاه دو محفظه وجود دارند که به وسیله یک پرده از یکدیگر جدا شده اند. جابه‌جایی این پرده تغییر حجمی را در دو محفظه به وجود آورده و دو میکروفون در دو محفظه سیگنالی را متناسب با شدت صوت اندازه‌گیری شده ایجاد می‌کنند. این سیگنال‌ها به مقادیری از پیش تعیین شده نسبت داده می‌شوند و با استفاده از آن حجم هوای درون محفظه مشخص می‌گردد. در [۵] روش و دستگاهی ارائه شده

طرح‌ها و روش‌های متعددی برای اندازه‌گیری حجم ارائه شده است که ایده کلی حاکم بر بسیاری از آنها اعمال تغییر حجم در یک محفظه بسته و بررسی تغییر فشار و یا سایر خواص ترمودینامیکی آن می‌باشد. در [۱ و ۲] روش‌ها و ابزاری بر پایه این اصل ترمودینامیک که دو سیال با فشار و دمای یکسان، حجم مخصوص یکسانی دارند ارائه شده است. در [۳] روش و دستگاهی پیشنهاد شده است که می‌تواند برای اندازه‌گیری حجم مایع درون یک محفظه مورد استفاده قرار گیرد. در این دستگاه تغییر حجمی به وسیله جابه‌جایی پرده بلندگو اعمال شده و تغییر فشار ناشی از آن به وسیله یک میکروفون اندازه‌گیری می‌شود و

سوم، دیگرام بلوکی الکترونیک دستگاه در بخش چهارم، اندازه‌گیری‌ها و آزمایش‌های مختلف در بخش پنجم و مقابله با تغییرات دما و نتیجه‌گیری در بخش‌های ششم و هفتم بررسی خواهد شد.

## ۲. مکانیک دستگاه اندازه‌گیری حجم

حجم‌سنج آکوستیک دارای دو محفظه مجزا، محفظه مرجع<sup>۲</sup> و محفظه اندازه‌گیری<sup>۳</sup> می‌باشد که به وسیله پرده بلندگو از یکدیگر جدا شده اند (شکل ۱). جسم، درون محفظه اندازه‌گیری قرار گرفته و پرده بلندگو به وسیله سیگنالی به حرکت در می‌آید. با پایین آمدن پرده بلندگو حجم محفظه اندازه‌گیری کاهش یافته و حجم محفظه مرجع به همان اندازه افزایش می‌یابد. از آنجا که این فرایند بسیار سریع انجام شده و زمان لازم برای تبادل گرما وجود ندارد، می‌توان آن را فرایندی بی‌دررو در نظر گرفت. برای چنین فرایندی با توجه به این که انحراف ضریب تراکم‌پذیری از عدد یک کمتر از ۰.۰۰۰۱ بوده و با فرض اینکه انرژی درونی هوا تنها به دما وابسته باشد، رابطه  $PV^\gamma = Const.$  برای محفظه‌های مرجع و اندازه‌گیری قابل استفاده خواهد بود که در آن  $V_r, P$  و  $\gamma$  به ترتیب بیانگر فشار، حجم و نسبت گرماهای ویژه هوا می‌باشند. در نتیجه:

$$\frac{\Delta P_r}{P_{0_r}} + \gamma_r \frac{\Delta V_r}{V_r} = 0 \quad \text{محفظه مرجع} \quad (1)$$

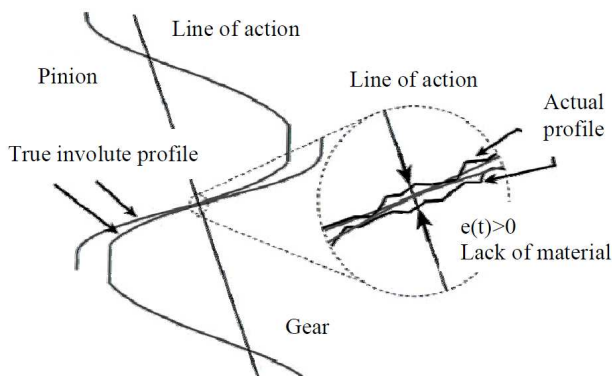
$$\frac{\Delta P_m}{P_{0_m}} + \gamma_m \frac{\Delta V_m}{V_m} = 0 \quad \text{محفظه اندازه‌گیری} \quad (2)$$

در این رابطه زیرنویس‌های  $r$  و  $m$  به ترتیب نشان‌دهنده محفظه مرجع و محفظه اندازه‌گیری هستند. با ترکیب این دو رابطه می‌توان رابطه‌ای را به دست آورد که مستقل از خصوصیات ترمودینامیکی هوا و همچنین تغییر حجم اعمال شده باشد.

$$\begin{cases} P_{0_r} = P_{0_m} = P_0 \\ \gamma_r = \gamma_m = \gamma \\ \Delta V_r = -\Delta V_m = \Delta V \end{cases} \Rightarrow -\frac{\Delta P_r}{\Delta P_m} = \frac{V_m}{V_r} \Rightarrow V_m = V_r \left( -\frac{\Delta P_r}{\Delta P_m} \right) \quad (3)$$

به این ترتیب با داشتن نسبت فشار در دو محفظه می‌توان نسبت حجم هوای درون محفظه‌ها را اندازه گرفت. در حجم‌سنج آکوستیک ارائه شده برای اندازه‌گیری این تغییر فشارها از دو میکروفون استفاده شده است.

است که می‌توان با استفاده از آن حجم اجسامی مانند بدن انسان را اندازه گرفت. این دستگاه دارای یک محفظه بسته می‌باشد که یک بلندگو با قابلیت ایجاد صوتی با فرکانس متغیر و یک میکروفون برای اندازه‌گیری این صوت در جداره آن قرار گرفته است. اصول کار این دستگاه تشدید هلمهولتز و وابستگی فرکانس تشدید محفظه به حجم درون آن است. با ایجاد صوت با فرکانس‌های مختلف و اندازه‌گیری فرکانس تشدید می‌توان حجم جسم را اندازه گرفت. اندازه‌گیری‌های انجام شده نشان می‌دهد که حجم اضافه شده به محفظه رابطه خطی با فرکانس تشدید اندازه‌گیری شده دارد. ایشی [۶] نیز روش و دستگاهی را ارائه می‌دهد که می‌تواند برای اندازه‌گیری حجم جسمی که درون محفظه این دستگاه قرار گرفته است مورد استفاده قرار گیرد. در این دستگاه دو محفظه وجود دارد که به وسیله یک پرده بلندگو از یکدیگر جدا شده اند. پرده بلندگو، تغییر حجم هم اندازه‌ای را در این دو محفظه بوجود آورده و دو میکروفون تغییر فشار ناشی از این تغییر حجم یکسان را اندازه‌گیری می‌کنند. قوانین ترمودینامیک حاکم و همچنین اندازه‌گیری‌های انجام شده بیانگر آن است که نسبت فشار در دو محفظه و نسبت حجم فضای خالی آنها رابطه‌ای خطی با یکدیگر دارند و با کالیبره کردن دستگاه برای دو حجم مرجع می‌توان حجم اجسام دیگر را اندازه گرفت. او همچنین تأثیر عوامل متعددی نظیر فرکانس صوت، حجم فضای خالی درون محفظه و تعداد نمونه‌گیری را بر دقت اندازه‌گیری حجم بررسی می‌کند [۷]. کاربرد این دستگاه برای اندازه‌گیری حجم یک محفظه بسته نیز پیشنهاد شده است [۸]. همچنین می‌توان این دستگاه را برای اندازه‌گیری اتوماتیک حجم وزنه‌ها و نمونه‌ها با دقت بالا مورد استفاده قرار داد [۹]. ایشی همچنین شکل دیگری از این دستگاه را پیشنهاد می‌کند که در آن از یک بلندگو برای ایجاد تغییر حجم و یک میکروفون برای اندازه‌گیری فشار استفاده می‌شود. در این دستگاه یک لوله دو محفظه را به هم مرتبط می‌سازد که فشار دو سر آن برابر فشار دو محفظه بوده و درون این لوله فشار بصورت خطی تغییر می‌کند. نقطه‌ای که در آن فشار درون لوله با فشار اولیه یکسان است می‌تواند برای اندازه‌گیری نسبت حجم دو محفظه مورد استفاده قرار گیرد [۱۰]. در این مقاله ساختار مکانیکی دستگاه طراحی شده در بخش دوم و



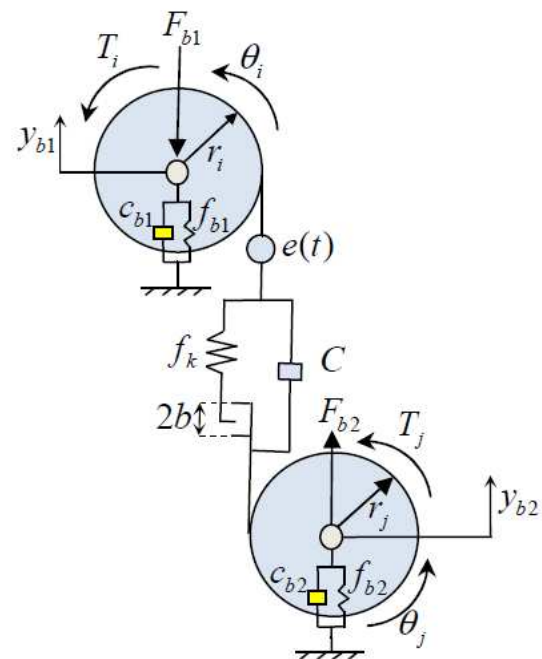
شکل ۹. خطاهای ساخت در پروفیل دندانه [۳۴].

در سال ۱۹۸۹، لین<sup>۲۸</sup> و همکارانش [۵۱] بیان کردند که تغییر پروفیل دندانه‌ها بطور مؤثری بیشینه بار دینامیکی را کاهش می‌دهد. آنها همچنین پیشنهاد کردند که تغییر پروفیل با منحنی‌های خطی و یا سهمی‌گون، آن را برای عملکرد بهتر چرخنده بهینه می‌کند. آن‌ها همچنین تحقیقات تجربی و آزمایشگاهی بر روی تأثیر خلاصی نوک دندانه انجام داده و تأثیر خلاصی نوک و یا پای دندانه را از دیدگاه تئوری اثبات نمودند.

#### ۳.۴. نسبت درگیری اینولوت (ICR)

معمولاً تغییرات سختی درگیری، سرچشمه اصلی ارتعاشات در چرخنده‌ها بوده و تغییر نسبت درگیری تأثیر مهمی در سختی درگیری و بنابراین بر دینامیک چرخنده دارد. محققان بسیاری نشان دادند که پاسخ دینامیکی و ارتعاشی یک مجموعه چرخنده بطور قابل توجهی تحت تأثیر نسبت درگیری چرخنده قرار دارد [۴۸، ۱۸]. به هر حال، رابطه بین دینامیک و نسبت درگیری بطور کامل مشخص نمی‌باشد. تغییر طول سر دنده‌ها مطلوب‌ترین و آسان‌ترین روش برای کنترل نسبت درگیری بدون افزایش تنش در دندانه‌ها می‌باشد [۵۲]. نظر به این وضعیت و با استفاده از کد دینامیک چرخنده ناسا (DANST) [۵۱]، لیو<sup>۲۹</sup> و همکارانش [۵۳] یک شبیه‌سازی کامپیوتری ارائه نمودند که بیانگر تأثیر تغییر نسبت درگیری چرخنده بر رفتار دینامیکی سیستم بود. آنها برای ایجاد نسبت درگیری در بازه ۱،۲۰ تا ۲،۴۰ سر دندانه چرخنده را تغییر می‌دادند.

به منظور پیش‌بینی مقدار بهینه و مطلوب نسبت درگیری کهرمان و بلنکنشپ [۵۴]، تأثیرات ضرایب فوریه سختی درگیری چرخنده‌ها را مورد بررسی قرار دادند. آنها همچنین تأثیر نسبت درگیری اینولوت را بر رفتار ارتعاشی پیشگی هشت جفت چرخنده با نسبت‌های درگیری مختلف بصورت آزمایشی بررسی کردند. نتایج نشان‌دهنده این واقعیت بود که



شکل ۸. مدل سه درجه آزادی یک سیستم چرخنده‌ای

همچنین تأثیر پارامترهای سیستم از قبیل نسبت بین سختی‌های یاتاقان و سختی‌های درگیری چرخنده بر روی رفتار ارتعاشی غیرخطی سیستم و نیز شرایط آشوب، حل‌های حالت پایدار، ساب‌هارمونیک و شبه‌هارمونیک نیز بررسی گردید.

#### ۳.۳. خطاهای ساخت و تغییر پروفیل دندانه‌ها

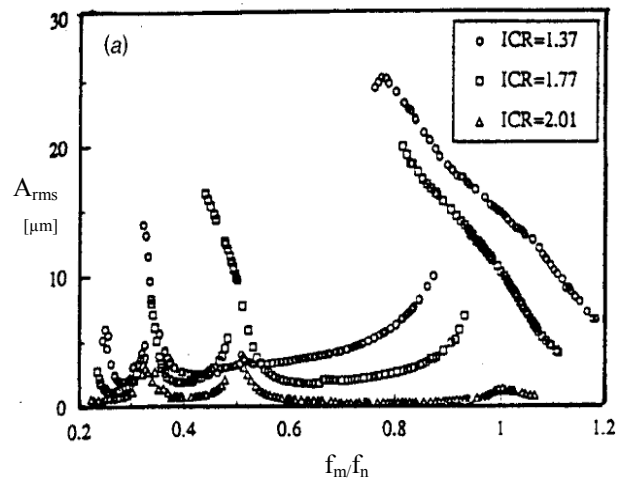
همان‌طور که اشاره شد، خطاهای انتقال ایستایی به عنوان یکی از پارامترهای مؤثر در ارتعاشات سیستم‌های چرخنده‌ای مطرح می‌گردد. خطاهای انتقال ایستایی به دلیل خطاهای ساخت و تغییر شکل دندانه‌ها از شکل اینولوت سالم یکی از مهم‌ترین منابع تولید ارتعاش و صدا در چرخنده‌ها می‌باشد که تمام اجزای جعبه‌دنده را نیز تحت تأثیر قرار می‌دهد. در بسیاری از تحقیقات، خطاهای ساخت چرخنده به عنوان یکی از منابع و عوامل ارتعاشات سیستم بررسی شده است [۳۵-۳۳]. در مدل‌سازی‌های انجام گرفته، خطای ساخت عموماً به صورت یک توزیع اتفاقی از خطاهای پروفیل برای هر جفت‌دندانه ارائه می‌گردد که با توجه به تغییر جفت‌دندانه‌های درگیر در طول چرخه تماس، خطای انتقال کلی به صورت سری فوریه در معادلات سیستم وارد می‌شود (شکل ۹).

باید به این مسأله اشاره کرد که تغییر پروفیل دندانه‌ها به عنوان یک شیوه مهم در کاهش تحریک‌های درگیری دندانه‌ها و نیز در بهبود رفتار دینامیکی یک سیستم چرخنده‌ای می‌تواند استفاده گردد. بنابراین محققین بسیاری توجه خود را به تغییر و اصلاح پروفیل دندانه معطوف داشته‌اند [۴۸-۵۰].

که معمولاً به عنوان یک عامل غالب و گاهی اوقات منشأ صدا و ارتعاشات چرخنده‌ها است نادیده گرفته می‌شود. با این وجود طراحی چرخنده با کمینه کردن تغییرات خطای انتقال همیشه کاهش صدا را در پی ندارد. احتمال ایجاد صدای چرخنده‌ها به دلیل اصطکاک به عنوان یک پارامتر تعیین کننده توسط محققین مختلف گزارش شده است [۶۵-۶۰]. به عنوان نمونه می‌توان به بررسی ولکس<sup>۳۳</sup> و کهوات<sup>۳۴</sup> [۶۴]، اشاره نمود که تحریک‌های اصطکاک دندان‌ها را در غالب یک مدل دینامیکی چرخنده‌های سه‌بُعدی تعمیم یافته مطرح کردند. مقایسه بین نتایج محاسبه و شبیه‌سازی شده، نشان‌دهنده دقت مدل پیشنهادی در ارائه تأثیر اصطکاک دندان‌ها روی رفتار سیستم‌های چرخنده‌ای داشت.

همچنین یک مدل تحلیلی برای جفت‌چرخنده‌ها با سختی درگیری متغیر با زمان، میرایی لزج و پارامترهای اصطکاک لغزشی توسط وایشا<sup>۳۵</sup> و سینک [۶۵] ارائه گردیده است. این مدل، اصطکاک لغزشی را در معادلات دینامیکی جفت‌چرخنده‌های ساده منظور کرده است. با استفاده از تئوری فلوک<sup>۳۶</sup>، پاسخ سیستم تحت تأثیر خطای انتقال استاتیکی، تغییرات پارامتریک سختی درگیری و گشتاور اصطکاک، تعیین شد. همچنین تأثیر اصطکاک بر روی رفتار دینامیکی و مشخصه‌های پایداری چرخنده‌ها نیز بررسی گردید. شکل (۱۱) سهم نسبی هر یک از عوامل سختی درگیری، اصطکاک و انحراف پروفیل را نشان می‌دهد.

نسبت‌های درگیری مختلف باعث تغییرات دامنه ارتعاش می‌گردد. همچنین آنها تأثیر  $ICR$  بر روی دامنه‌های خطای انتقال دینامیکی ( $DTE$ )<sup>۳۰</sup> را تعیین کرده، به طور آزمایشی راهکارهایی را برای طراحی یک جفت چرخنده بی‌صدا ارائه دادند. بر اساس تحلیل و آزمایش‌های آنها، نسبت تماس گردید. ( $m$  عدد صحیح نسبت تماس و  $n$  یک عدد صحیح از صفر تا  $r$  می‌باشد). شکل (۱۰) جذر میانگین مجذور دامنه خطاهای انتقال دینامیکی ( $A_{rms}$ )، برای سه جفت چرخنده با  $ICR = 1.37, 1.77, 2.01$  را ارائه می‌دهد. نتایج، اشاره به تأثیر عمده  $ICR$  روی پاسخ دینامیکی در سراسر محدوده فرکانسی دارد.

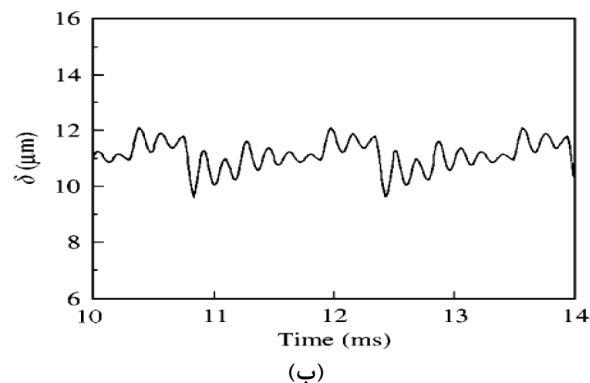
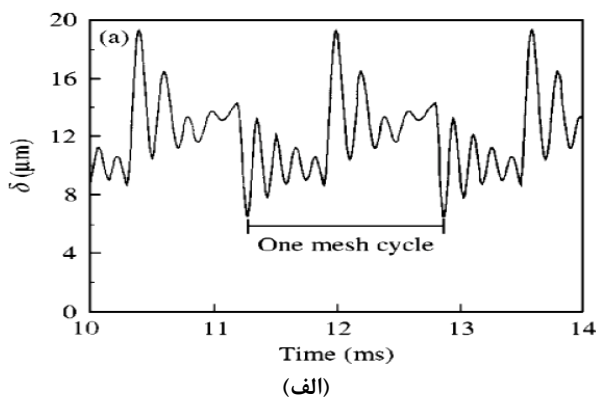


شکل ۱۰. پاسخ‌های جفت چرخنده با نسبت درگیری مختلف [۵۴]. ( $ICR = 1.37, 1.77, 2.01$ )

### ۳.۵. اصطکاک دندان‌ها

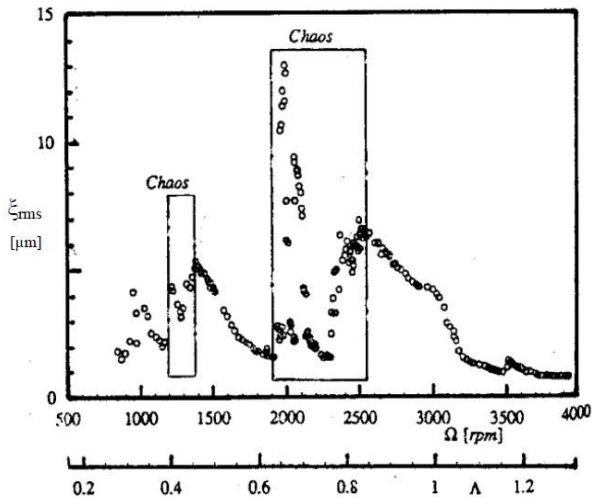
محاسبه اصطکاک در سیستم‌های چرخنده‌ای یک مسأله چالش‌برانگیز می‌باشد. با توجه به بررسی انجام شده توسط مارتین<sup>۳۱</sup> [۵۵]، فرمول‌های تجربی بسیاری برای ضریب اصطکاک در دسترس است. محاسبات اصطکاک برای صفحه کلاچ ماشین‌ها [۵۶]، مجموعه چرخنده‌ها در سرعت‌های پایین و متوسط [۵۷] و نیز سیستم‌های چرخنده‌ای در سرعت‌های بالا [۵۸] انجام شده است. از طرف دیگر، محاسبات تئوری را می‌توان از تئوری روانکاری الاستوهیدرودینامیک ( $EHD$ )<sup>۳۲</sup> و بعضی از فرمول‌بندی‌های شبه تحلیلی، به دست آورد [۵۹].

در بیشتر مدل‌های دینامیکی چرخنده‌ها، اصطکاک در مقایسه با تغییرات سختی دندان‌های درگیر و خطای انتقال



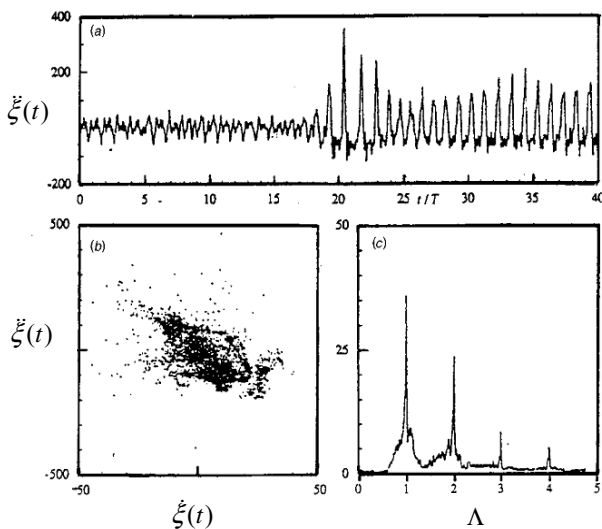


پس‌زنی و سختی درگیری متغیر با زمان را بررسی کردند. یک شیوه تعقیب مسیر با استفاده از تکنیک تعقیب طول قوس برای نشان دادن دیاگرام‌های انشعاب و دوشاخه‌شدگی اتخاذ و حرکت‌های آشفته نیز به صورت عددی بررسی گردید. پاسخ نیرویی محاسبه شده و حرکت آشفته یک جفت چرخنده در شکل‌های (۱۲) و (۱۳) نشان داده شده است. این نمودارها به طور قطع نشان دهنده یک رفتار آشفته در سیستم‌های مکانیکی با لقی غیرخطی و دارای پارامترهای متغیر با زمان می‌باشند.

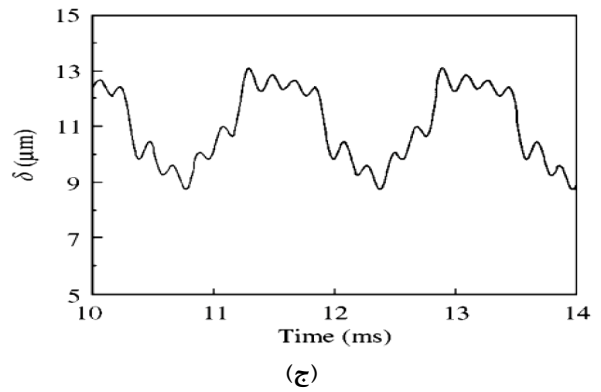


شکل ۱۲. پاسخ محاسبه شده یک جفت چرخنده [۱۳].

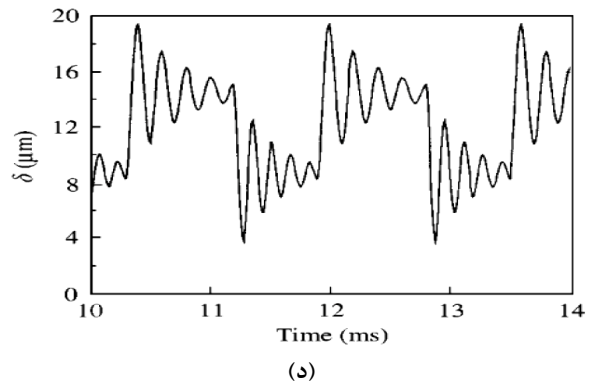
همچنین، مطالعاتی با استفاده از مدل دینامیکی تماس در روش اجزای محدود بر روی پاسخ دینامیکی یک جفت چرخنده با سختی درگیری متغیر با زمان و پس‌زنی نیز انجام گرفته است [۷۲-۷۴].



شکل ۱۳. حرکت آشفته محاسبه برای شکل (۱۲) در  $\Lambda = 0.78$  (a). پاسخ زمانی، (b) نمودار پوانکاره، (c) طیف فوریه [۱۳].



(ج)



(د)

شکل ۱۱. خطای انتقال دینامیکی به واسطه: (الف) ترکیب تمام پارامترهای تحریک، (ب) فقط اصطکاک، (ج) فقط انحراف پروفیل و (د) فقط تغییرات پارامتریک سختی [۶۵].

### ۳.۶. سیستم‌های چرخنده‌ای با چندین جزء غیرخطی

در بخش‌های قبلی، ارتعاشات غیرخطی سیستم‌های چرخنده‌ای با در نظر گرفتن یک جزء غیرخطی (سختی درگیری متغیر و یا پس‌زنی) بررسی شد. به هر حال، باید توجه داشت که در بیشتر موارد سیستم‌های چرخنده‌ای شامل چندین جزء غیرخطی از قبیل سختی متغیر با زمان، پس‌زنی، خطای انتقال و اصطکاک بین سطح دندانها و غیره می‌باشند، که دو مورد اول از اهمیت بیشتری برخوردارند. از دهه ۱۹۸۰ مدل‌های غیرخطی‌ای ارائه شد که در آنها پس‌زنی و تغییرات سختی درگیری توامان مورد بررسی قرار می‌گرفت [۶۷، ۶۶، ۲۷، ۲۶، ۲۳].

بررسی‌ها و آزمایش‌های انجام شده توسط محققین مختلف بر روی سیستم‌های چرخنده‌ای با لقی که در معرض ترکیبی از تحریک اجباری خارجی و پارامتریک بودند، نشان‌دهنده یک طیف قوی از پدیده‌های غیرخطی شامل یک نمونه از عدم پیوستگی در منحنی‌های پاسخ نیرویی، حرکت‌های پایدار چندگانه، تشدیدهای ساب‌هارمونیک و سوپرهارمونیک، ترکیب انشعابات، و حرکت آشفته می‌باشند [۶۸-۷۱، ۳۴، ۲۴، ۱۳].

به عنوان مثال می‌توان به کار راگوتاما<sup>۳۷</sup> و نرایانان<sup>۳۸</sup> [۶۸] اشاره نمود که پاسخ سیستم چرخنده‌ای روتور-یاتاقان با

پارامترها در سیستم‌های چرخنده‌ای مورد مطالعه قرار گرفته است، اما تلاش‌های بیشتر برای ارائه یک مدل کامل‌تر به منظور طراحی یک سیستم چرخنده‌ای با ارتعاشات و صدای کم و قابلیت اعتماد بالا هنوز ادامه دارد.

### پی‌نوشت

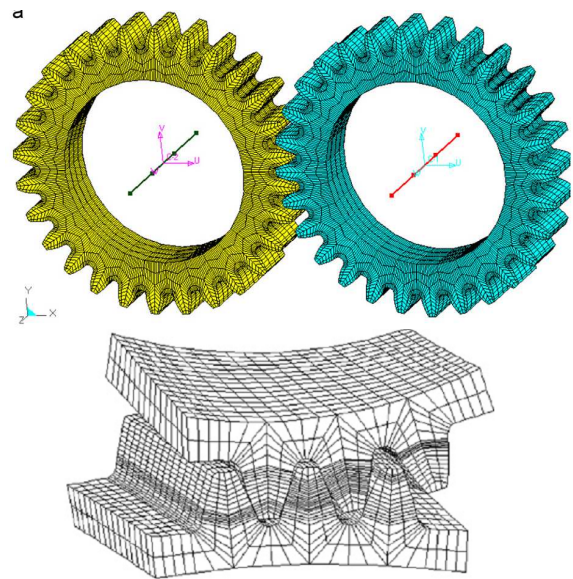
1. Time varying mesh stiffness
2. Backlash
3. Transmission error
4. Vibro-impact
5. tooth profile modification
6. involute contact ratio
7. linear time-invariant
8. Ozguven
9. linear time-varying
10. Mathieu
11. Hill
12. nonlinear time-invariant
13. nonlinear time-varying
14. infinite determinants
15. Galerkin method
16. Blankenship
17. Singh
18. Lim
19. rattle
20. Nakamura
21. Houser
22. Galhoud
23. gap
24. Sub-harmonic
25. Super-harmonic
26. Quasi-periodic
27. Kahraman
28. Lin
29. Liou
30. dynamic transmission error
31. Martin
32. elastohydrodynamic
33. Vexlex
34. Cahouet
35. Vaishya
36. Floquet
37. Raghothama
38. Narayanan

### مراجع

- [1] H. N. Ozguven, D. R. Houser, Mathematical models used in gear dynamics: A review, *J. Sound & Vib.*, 121(3), 383–411, 1988.
- [2] A. Kahraman, R. Singh, Non-linear dynamics of a spur gear pair, *J. Sound & Vib.*, 142(1), 49–75, 1990.
- [3] R. Singh, H. Xie, R. J. Comparin, Analysis of automobile neutral gear rattle, *J. Sound & Vib.*, 131, 177–196, 1989.
- [4] R.W. Gregory, S.L. Harris, R.G. Munro, Dynamic behavior of spur gears, *Proc. Inst. Mech. Eng., IMechE Conf.*, 178, 207–226, 1963.

از ویژگی‌های اصلی این مدل می‌توان به محاسبه نیروهای درگیری دینامیکی با استفاده از جزئیات تحلیل تماس در هر درگیری و نیز عدم نیاز به مشخص کردن تحریک به دلیل سختی‌های درگیری و خطای انتقال ایستایی اشاره داشت. یک نمونه مش‌بندی اجزای محدود برای یک جفت چرخنده در شکل (۱۴) نشان داده شده است.

باید به این مطلب اشاره داشت که تحقیقات اخیر بیشتر بر روی سیستم‌های چرخنده‌ای با چندین جزء غیرخطی، متمرکز شده است. محققین در تلاش اند تا برای ارائه مدل‌های جدید و کامل‌تر تأثیرات پارامترهای مختلف در سیستم را بررسی نمایند.



شکل ۱۴. مدل اجزای محدود جفت چرخنده

### ۴. نتیجه‌گیری

با توجه به اهمیت و کاربرد وسیع سیستم‌های چرخنده‌ای در صنعت، در این پژوهش سعی شد تا یک درک کلی از دینامیک غیرخطی سیستم‌های انتقال چرخنده‌ای و نیز آخرین دستاوردها و تحقیقات انجام گرفته در این زمینه ارائه گردد. بدین منظور برخی از مدل‌های چرخنده ارائه و تأثیر پارامترهای مختلف در ارتعاشات سیستم بیان گردید.

در یک سیستم انتقال چرخنده‌ای در کنار لقی‌ها، سختی متغیر با زمان، اصطکاک و خطاهای ساخت که به آن اشاره شد، معمولاً پارامترهای زیادی از قبیل تأثیر خارج از مرکز بودن چرخنده‌ها، انعطاف‌پذیری تکیه‌گاه‌ها و محورها، روانکاری و بسیاری از پارامترهای دیگر دخیل می‌باشند. این پارامترها باید در مدل‌های دینامیکی سیستم‌های چرخنده‌ای به منظور بررسی تأثیرات آنها بر روی مشخصه‌های سیستم در نظر گرفته شوند. با وجود این که تأثیرات برخی از این

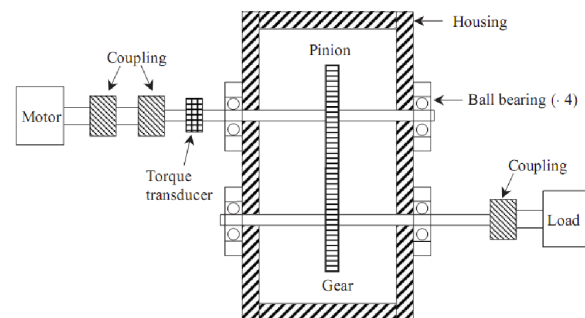
بدنه و پایه‌های صلب یا انعطاف‌پذیر را نیز شامل می‌شوند (شکل ۴) [۱۰-۱۲].

در تحقیقات و مطالعات اخیر، سعی بر این بوده تا مدل‌های دینامیک چرخنده‌ها را به صورت گروه‌هایی بر اساس روابط و مشخصه‌های خاص ارائه‌شده دسته‌بندی و بررسی نمایند. یک دسته‌بندی جامع از سیستم‌های چرخنده‌ای را می‌توان بر اساس اختلاف و تفاوت عوامل مؤثر در مدل دینامیکی چرخنده‌های درگیر پیشنهاد نمود. به این منظور نیاز به آشنایی بیشتر با مدل دینامیک چرخنده می‌باشد.

مدل مکانیکی پیشگی یک جفت چرخنده ثابت در شکل (۲) نشان داده شده است [۱۳]. در این مدل،  $\theta_i(t)$  و  $\theta_j(t)$  بیانگر مؤلفه‌های ارتعاش چرخشی چرخنده‌های درگیر  $i$  و  $j$ ،  $2b$  لقی،  $g$  تابع پس‌زنی به واسطه لقی و  $k(t)$  سختی جفت چرخنده‌ها می‌باشد.  $\mathcal{E}(t)$  نیز خطای انتقال استاتیکی به دلیل خطاهای ساخت و تغییرشکل پروفیل دندانه می‌باشد که به صورت یک تحریک جابه‌جایی معادل، ارائه می‌گردد.

با تعریف جابه‌جایی نسبی خط درگیری در صورت  $x(t) = r_i \theta_i(t) + r_j \theta_j(t)$ ، معادلات ارتعاشی به صورت یک معادله یک‌درجه‌آزادی به فرم زیر تبدیل می‌شوند.

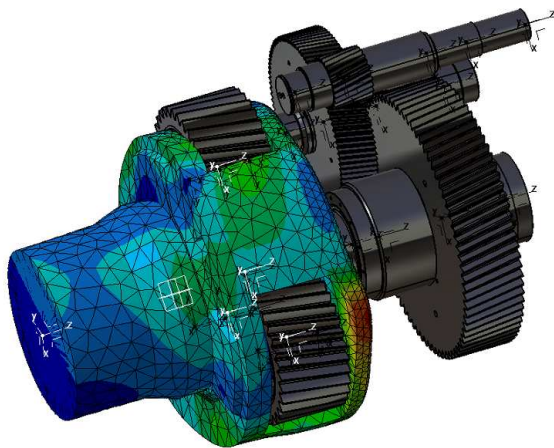
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(t)g(x(t) - \mathcal{E}(t)) = T(t) \quad (۱)$$



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۴. مدل‌های کامل جعبه دنده

که در آن:

$$g(x(t) - \mathcal{E}(t)) = \begin{cases} x(t) - \mathcal{E}(t) - b & x(t) > b \\ 0 & |x(t)| \leq b \\ x(t) - \mathcal{E}(t) + b & x(t) < -b \end{cases} \quad (۲)$$

ناشی از نوسان‌های گشتاور می‌باشد. با توجه به معادله (۱) و بر اساس عامل‌های غیرخطی مؤثر در سیستم، مدل‌های دینامیکی برای سیستم‌های چرخنده‌ای را می‌توان در چهار گروه اساسی دسته‌بندی کرد.

گروه اول مدل‌های خطی با ضرایب نامتغیر با زمان ( $LTI$ ) می‌باشد. این گروه، مدل‌های اولیه و ساده برای چرخنده‌ها را شامل می‌شود که سختی درگیری دندانه‌ها را ثابت در نظر گرفته و از پس‌زنی در چرخنده‌ها نیز صرف‌نظر می‌شود. به عبارت ساده‌تر، در این مدل‌ها در معادله (۱)،  $k(t) = k_m$  و  $g(x(t)) = x(t)$  جایگزین می‌گردد. یک بررسی وسیع در این مورد توسط آژگون<sup>۸</sup> [۱]، انجام شده است. این گروه از مدل‌ها هنوز نیز در تحلیل فرکانس طبیعی سیستم‌های چرخنده‌ای با دندانه‌های صلب، مورد استفاده قرار می‌گیرد [۵، ۱۴].

گروه دوم، مدل‌های خطی با ضرایب متغیر با زمان ( $LTV$ )، با  $g(x(t)) = x(t)$  می‌باشند. به عبارت دیگر، فقط سختی درگیری متغیر با زمان در معادلات سیستم، در نظر گرفته شده است. به دلیل تغییر تعداد جفت دندانه‌های درگیر در طول پیشش، سختی درگیری به صورت یک تابع زمانی متناوب منظور می‌گردد. در این حالت معادلات ارتعاشی به صورت پارامتریک و به شکل معادلات متیو<sup>۱۰</sup> [۱۵] و هیل<sup>۱۱</sup> [۱۶] با نیروی خارجی متناوب تبدیل می‌شود.

### ۳.۱. سیستم‌های چرخنده‌ای دارای سختی درگیری متغیربازمان

محققین در اوایل دهه ۱۹۶۰، متوجه شدند که سختی درگیری دندانه‌ها باید به صورت پارامتر متغیر با زمان مورد بررسی قرار گیرد [۴]. همان طور که در بالا بحث شد سختی درگیری جفت‌چرخنده‌ها در طی عمل پیچش و دَوَران به دلیل تغییر در تعداد جفت دندانه‌های درگیر، در نوسان است. این امر منجر به تأثیر یک ضریب متغیربازمان در معادلات حاکم می‌شود. بنابراین، ارتعاشات یک سیستم چرخنده‌ای با سختی متغیربازمان، به طور طبیعی به صورت یک مسأله ارتعاشی پارامتریک ارائه می‌گردد.

به هر حال ارتعاشات سیستم انتقالی چرخنده‌ای از نقطه نظر ارتعاشات پارامتریک تقریباً از دهه ۱۹۸۰ مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت. به طور کلی، با در نظر گرفتن پارامتریک بودن معادلات، تحقیقات در این زمینه شامل مطالعه پایداری دینامیکی و محاسبه پاسخ پایدار یک سیستم ارتعاشی می‌شود [۱۷-۲۰].

می‌توان نشان داد که مدل ریاضی برای یک جفت چرخنده ساده معادله هیل و برای یک جفت چرخنده حلزونی معادله متیو می‌باشد. بنابراین پایداری دینامیکی ارتعاش پارامتریک یک سیستم انتقال چرخنده‌ای را می‌توان با تحلیل معادلات هیل و متیو مورد بررسی قرار داد. تحلیل پایداری حتی برای معادلات دیفرانسیل خطی درجه اول و یا درجه دوم با ضریب تناوبی (معادلات هیل و متیو)، دشوار می‌باشد. روش‌های مختلفی از جمله روش دترمینان نامحدود<sup>۱۴</sup>، روش پرتوربیشن، روش گالرکین<sup>۱۵</sup>، برای حل این معادلات پیشنهاد می‌گردد.

باید یادآوری کنیم که مدل‌های اولیه استفاده شده توسط محققین، برای توصیف حرکات ترکیبی مناسب نبود. بنابراین، مدل‌های کامل‌تری برای توصیف حرکات پیچیده‌تر و با درجات آزادی بیشتر ارائه گردید. از آن جمله می‌توان به مدل تعمیم‌یافته سطح درگیری چرخنده توسط بلنکنشپ<sup>۱۶</sup> و سینک<sup>۱۷</sup> [۲۸]، اشاره داشت که می‌توانست برای تحلیل دینامیکی چرخنده‌های ساده داخلی و خارجی به کار برده شود. شکل (۵) مدل درگیری برای توصیف قابلیت حرکات ترکیبی در یک جفت چرخنده را نشان می‌دهد که مرکب از مجموعه کاملی از ۳ مختصات انتقالی و ۳ مختصات پیچشی می‌باشد.

تحقیقات بیشتر بر روی سیستم‌های چندچرخنده‌ای روی نمونه‌های ساده که از دو جفت چرخنده سوار شده بر روی سه میل محور موازی تشکیل می‌شوند، متمرکز شد [۲۹].

اگرچه معادله ارتعاش پارامتریک یک سیستم چرخنده‌ای به صورت خطی می‌باشد، اما ارتعاش سیستم به علت مشخصه‌های غیرخطی قوی باید با تئوری ارتعاشات غیرخطی بررسی و مورد مطالعه قرار گیرد [۲۰-۱۷].

گروه سوم، سیستم‌های غیرخطی با ضرایب تغییرناپذیر با زمان  $(NTI)^{۱۲}$  می‌باشد. این گروه شامل مدل‌هایی می‌شود که پس‌زنی چرخنده و سختی درگیری متوسط را در نظر می‌گیرند. در این حالت  $k(t) = k_m$  بوده و توابع مختلف برای  $g(x(t))$  مورد بررسی قرار می‌گیرد. باید توجه داشت که پس‌زنی در این سیستم‌ها به علت طراحی و همچنین خطاهای ساخت و نیز سایش در هر جفت چرخنده ایجاد می‌شود. از آنجایی که پس‌زنی شرایط غیرخطی قوی به معادلات دینامیکی سیستم اضافه می‌کند، توجه بیشتری به ارتعاشات سیستم‌های چرخنده‌ای با پس‌زنی شده است [۲۱، ۲۲].

آخرین گروه شامل سیستم‌های غیرخطی با ضرایب متغیر با زمان  $(NTV)^{۱۳}$  می‌باشد. در این مدل‌ها پس‌زنی چرخنده و تغییرات سختی درگیری به طور همزمان مورد بررسی قرار می‌گیرند [۲۷-۲۳].

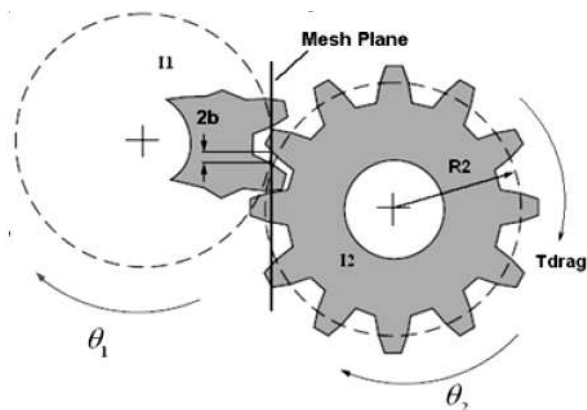
به طور کلی یک سیستم چرخنده‌ای به طور همزمان شامل سختی درگیری متغیر با زمان متناوب و پس‌زنی می‌باشد. در حال حاضر، ارتعاش غیرخطی سیستم‌های چرخنده‌ای بیشتر شامل این دو جزء غیرخطی است. ارتعاش سیستم چرخنده‌ای، ممکن است در معرض بسیاری از مشخصه‌های ارتعاشات غیرخطی دیگر نظیر اصطکاک بین سطوح دندانه‌ها، خطاهای ساخت و تغییر شکل پروفیل نیز قرار گیرد. بخش ۳ به توضیح مفصل‌تر مدل‌های ذکر شده و نیز رفتار سیستم تحت تأثیر عوامل غیرخطی می‌پردازد.

### ۳. پارامترهای مؤثر در ارتعاشات سیستم

در این بخش، بررسی مفصلی از پارامترهای مؤثر در رفتار ارتعاشی سیستم چرخنده‌ای ارائه می‌شود. مفهوم اصلی ارتعاشات پارامتریک سیستم‌های چرخنده‌ای که فقط شامل سختی درگیری متغیربازمان می‌باشند در بخش ۳.۱ بحث خواهد شد. در بخش ۳.۲ سیستم‌های چرخنده‌ای با پس‌زنی و مسأله تکرار ضربه ارائه می‌گردند. بخش‌های ۳.۳ تا ۳.۵ نیز به تأثیرات پروفیل دندانه‌ها، خطاهای انتقال، نسبت تماس اینولوت  $(ICR)$  و اصطکاک دندانه‌ها بر روی رفتار دینامیکی چرخنده می‌پردازد. تأثیرات همزمان چندین پارامتر فوق نیز در بخش ۳.۶ بررسی می‌گردد.

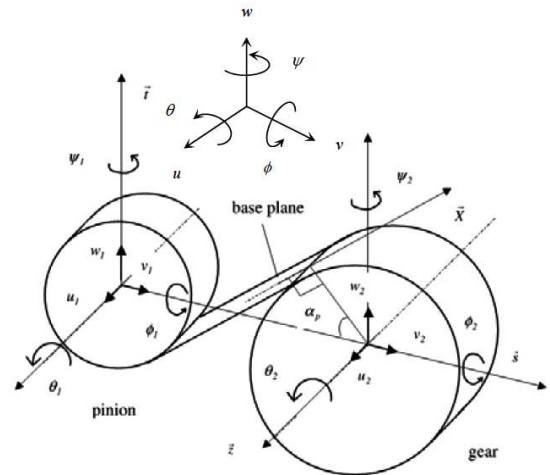


مطابق شکل (۶)، جفت چرخنده‌ها ملزم به داشتن مقداری لقی می‌باشند که برای روغنکاری بهتر و برای کاهش برهمکنش طراحی می‌شوند. همچنین خطاهای ساخت [۳۵-۳۳] و سایش [۳۶، ۳۷] نیز از عوامل ایجاد این لقی می‌باشند. در بسیاری از کاربردهای مهندسی از جمله سیستم تعویض دنده در اتومبیل و سیستم‌های انتقال ماشین ابزار، جفت چرخنده‌ها در سرعت‌های بالا و بارهای سبک، و یا با شروع و توقف مکرر کار می‌کنند. در این موارد، تماس بین دندانه‌های درگیر ممکن است به ضربه پی‌درپی و مکرر تغییر پیدا کند. این گونه تکرار ضربه باعث ایجاد ارتعاشات شدید، سروصدا و بارهای دینامیکی اضافی در سیستم می‌گردد که روی قابلیت اطمینان و عمر مجموعه چرخنده‌ای تأثیرگذار می‌باشد.



شکل ۶. لقی در جفت چرخنده درگیر

به عنوان مثال می‌توان به پدیده تق‌تق<sup>۱۹</sup> اشاره نمود که از مهمترین مشکلات ارتعاشاتی موجود در چرخنده‌های دارای پس‌زنی و تحت بار سبک می‌باشد (سیستم انتقال در خودروهای دستی). در یک چرخنده زمانی که گشتاور اینرسی که تابعی از شتاب زاویه‌ای می‌باشد از گشتاور بار بیشتر شود دندانه‌ها از هم جدا می‌شوند. جدایش و برخورد ناشی از یک دندانه به دندانه قبلی یا بعدی این پدیده را ایجاد می‌کند که با تکرار این پدیده با یک مسأله تکرار ضربه مواجه می‌شویم (شکل ۷). مشکلات مربوط به تق‌تق در چرخنده‌های راننده با بارهای سبک، تحریکات گشتاور خارجی و با فرکانس پایین توسط محققین مختلفی مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است [۳، ۳۳، ۳۸، ۳۹]. با توجه به مطلب فوق ارتعاش غیرخطی ناشی از لقی در سیستم‌های چرخنده‌ای را می‌توان یک مسأله تکرار ضربه



شکل ۵. مدل جفت چرخنده دارای ۳ مختصات انتقالی و ۳ مختصات پیچشی

نظر به این که تلاش‌ها و تحقیقات صورت‌گرفته بر روی سیستم‌های چرخنده‌ای دو-درگیری و تک-درگیری محدود شده بود، لیم<sup>۱۸</sup> و همکارانش [۳۰]، یک مجموعه از معادلات تحلیلی کلی برای توصیف سیستم‌های چند درگیری، شامل  $n$  جفت چرخنده و  $n-1$  محور پیشنهاد کردند.

باید به این مطلب اشاره داشت که سیستم‌های چرخنده‌ای چند-درگیری، شامل چرخنده‌های نازک و بهینه‌شده از لحاظ وزن، در بسیاری از کاربردها از جمله هواپیماها و سیستم‌های انتقال در وسایل موتوری، معمول و رایج می‌باشد. فرکانس‌های طبیعی این گونه چرخنده‌های ترکیبی ممکن است در محدوده فرکانس‌های تحریک درگیری چرخنده قرار گیرند. مشکلات ارتعاشی و صوتی ایجاد شده در این زمینه نیز توسط برخی از محققین، بررسی شده است [۳۱، ۳۲]. به هر حال، تحقیقات صورت‌گرفته بر روی دینامیک چرخنده‌ها اساساً بر روی تحلیل ریاضی سیستم‌های چرخنده‌ای با بدنه صلب متمرکز شده است. مطالعات محدودی بر روی سیستم‌های باچنددرگیری ارائه شده است، که شامل تغییرشکل و جابه‌جایی در یاتاقان‌ها و محورهای چرخنده‌ها نیز می‌باشد [۵]. تحقیقات اخیر بر روی سیستم‌های چرخنده‌ای پیچیده که سهم تغییرشکل یاتاقان‌ها و محورها را نیز در بر می‌گیرد، متمرکز شده است.

### ۳.۲. سیستم‌های چرخنده‌ای با پس‌زنی و تکرار ضربه

در این بخش مسائل مربوط به تکرار ضربه و سیستم‌های چرخنده‌ای دارای پس‌زنی، شامل مدل‌های ریاضی، مشخصات ارتعاشی، و پیشرفت در تحقیقات مربوطه مورد بحث و بررسی خواهد گرفت.



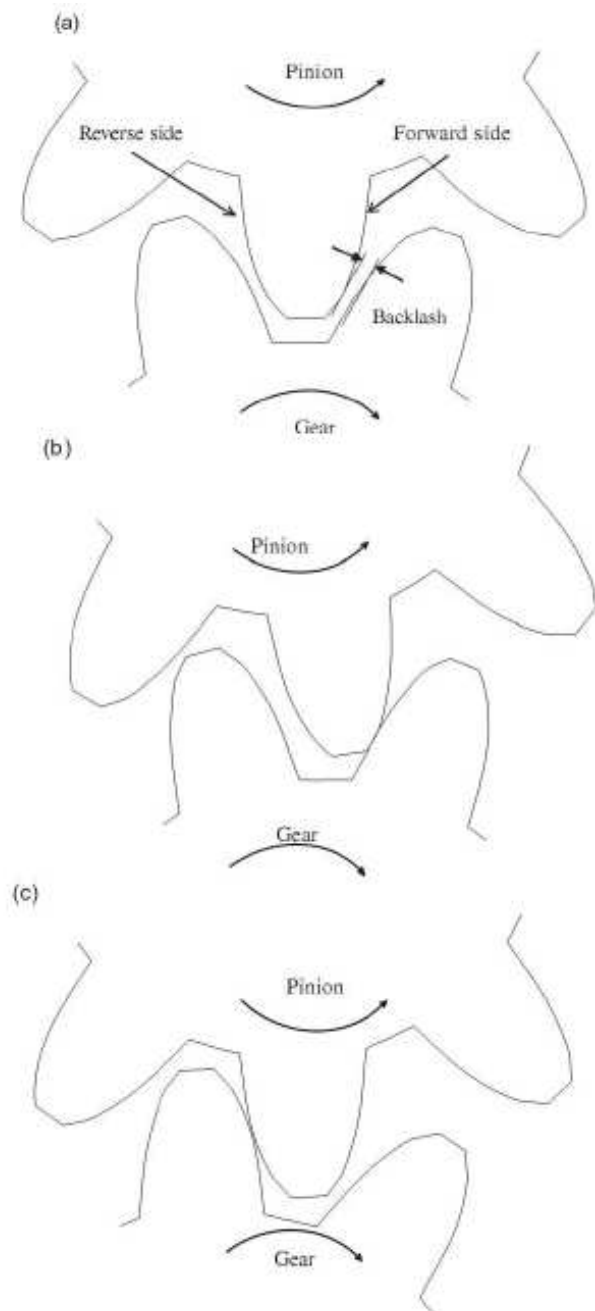
این مدل می‌تواند برخی از رفتارهای مهم ارتعاشات غیرخطی لقی را برای سیستم‌های چرخنده‌ای، آشکار کند [۴۳-۴۱].

از سال ۱۹۶۲ تلاش‌های زیادی به صورت مطالعات آزمایشی بر روی رفتار دینامیکی جفت‌چرخنده‌های ساده که دارای پس‌زنی می‌باشند، صورت گرفته است [۴۴، ۱۴]. اینگونه مطالعات آزمایشی، به وضوح نشان می‌دهد که رفتار دینامیکی جفت‌چرخنده‌ها را نمی‌توان به طور دقیق با یک مدل خطی محاسبه کرد. در حقیقت، غیرخطی بودن پس‌زنی جفت‌چرخنده یا یک ضربه، در اصل یک تابع گسسته می‌باشد و این یک اثر غیرخطی قوی در معادلات دیفرانسیل حاکم، از خود نشان می‌دهد. بنابراین، محققین بسیاری با ارائه مشخصات لقی و مشخصات دینامیک غیرخطی سیستم‌های چرخنده‌ای به محاسبه دینامیک جفت‌چرخنده‌ها پرداختند. تحقیقات بر روی دینامیک غیرخطی لقی در سیستم‌های چرخنده‌ای با مطالعات ناکامورا<sup>۲۰</sup> [۴۵] آغاز شد.

در دهه ۱۹۸۰، محققین بسیاری در زمینه سیستم‌های چرخنده‌ای و دینامیک سیستم‌های تکرار ضربه، بررسی‌هایی انجام داده‌اند. برای مثال ازگوون و هانس<sup>۲۱</sup> [۴۶]، به بررسی مدل پیچشی یک‌درجه‌آزادی جفت‌چرخنده‌ها با استفاده از روش‌های عددی پرداختند. گالهد<sup>۲۲</sup> و همکارانش [۴۷] نیز سیستم‌های انتقالی دو بعدی دارای فاصله<sup>۲۳</sup> را بررسی کردند و پاسخ هارمونیک اجباری را با استفاده از روش خطی‌سازی تکه‌ای بدست آوردند. به هر حال باید توجه داشت که روش‌هایی که توسط این محققین استفاده می‌شد، نمی‌توانست بعضی از پدیده‌های غیرخطی مهم از قبیل پاسخ‌های ساب‌هارمونیک<sup>۲۴</sup> سوپرهارمونیک<sup>۲۵</sup> و آشوب را پیش‌بینی کند. به این منظور بعضی از محققین، روش‌های عددی و همچنین روش‌های تحلیلی را برای مطالعه بر روی تعدادی از مسائل معمول در سیستم‌های غیرخطی ترکیب کردند. نتایج غالباً وجود حل پایدار چندگانه و وابستگی جواب‌ها به شرایط اولیه، پاسخ‌های ساب‌هارمونیک، شبه‌تناوبی<sup>۲۶</sup>، آشفته و غیره را نشان می‌داد [۲].

در این زمینه همچنین می‌توان به تحقیق کهرمان<sup>۲۷</sup> و سینک [۲۱] اشاره نمود. آنها یک مدل دینامیکی سه‌درجه‌آزادی شامل عوامل غیرخطی لقی در یاتاقان‌ها و پس‌زنی در دندانه‌ها را برای سیستم چرخنده‌ای توسعه دادند و مشخصه‌های پاسخ فرکانسی غیرخطی آن را بررسی نمودند (شکل ۸). در مدل آن‌ها سختی‌های درگیری چرخنده به صورت نامتغیر با زمان فرض گردید. حل‌های تحلیلی و روش‌های عددی برای بررسی مشخصه‌های فرکانسی غیرخطی سیستم استفاده گردید.

دانست. بنابراین یک جفت چرخنده با پس‌زنی می‌تواند به صورت یک مدل دینامیکی تکرار ضربه، مدل شود. دو مدل مکانیکی برای بررسی مسأله تکرار ضربه به کار گرفته شده است. یکی مدل ضربه صلب بوده که در این مدل، ضربه سخت فرض می‌شود و از ضریب جبران برای توصیف انرژی ازدست‌رفته، استفاده می‌گردد. اگرچه این مدل نمی‌تواند مستقیماً برای تحلیل یک سیستم چرخنده‌ای استفاده شود، ولی بعضی از مفاهیم و نتایج آن با ارزش می‌باشد [۴۰]. مدل دوم، مدل ضربه کشسان می‌باشد. ضربه در این مدل، ارتجاعی در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۷. پدیده تی‌تی‌ق در یک سیستم چرخنده‌ای

- [23] J. Wang, T.C. Lim, M. Li, Dynamics of a hypoid gear pair considering the effects of time-varying mesh parameters and backlash nonlinearity, *J. Sound & Vib.*, 308, 302–329, 2007.
- [24] A. Kahraman, G.W. Blankenship, Interactions between commensurate parametric and forcing excitations in a system with clearance, *J. Sound & Vib.*, 194(3), 317–336, 1996.
- [25] S. Theodossiadis, S. Natsiavas, Non-linear dynamics of gear-pair systems with periodic stiffness and backlash, *J. Sound & Vib.*, 229(2), 287–310, 2000.
- [26] L. Walha, T. Fakhfakh, M. Haddar, Nonlinear dynamics of a two-stage gear system with mesh stiffness fluctuation, bearing flexibility and backlash, *Mech. and Machine Theory*, 44, 1058–1069, 2009.
- [27] Y. Shen, S. Yang, X. Liu, Nonlinear dynamics of a spur gear pair with time-varying stiffness and backlash based on incremental harmonic balance method, *I. J. Mech. S.*, 48, 1256–1263, 2006.
- [28] G.W. Blankenship, R. Singh, A new gear mesh interface dynamic model to predict multi-dimensional force coupling and excitation, *Mech. and Machine Theory*, 30(1), 43–57, 1995.
- [29] H. Iida, A. Tamura, Coupled torsional-flexural vibration of shaft in a geared system, *Proc. of Conf. Vibr. Rotating Mech.*, Institution of Mech. E., 67–72, 1984.
- [30] T.C. Lim, J. Li, Dynamic analysis of multi-mesh countershaft transmission, *J. Sound & Vib.*, 219(5), 905–919, 1999.
- [31] S. Oda, T. Koide, K. Miyachika, Dynamic behavior of thinrimmed helical gears with various web, *Bull. JSME.*, 28, 2434–2441, 1985.
- [32] H. Okamura, Y. Suzuki, N. Nakano, Experiments and analysis of sound-damping rings for gears: application of snap rings, *ASME DE*, 88, 345–354, 1996.
- [33] J.R. Ottewill, S.A. Neild, R.E. Wilson, An investigation into the effect of tooth profile errors on gear rattle, *J. Sound & Vib.*, 329, 3495–3506, 2010.
- [34] G. Bonori, F. Pellicano, Non-smooth dynamics of spur gears with manufacturing errors, *J. Sound & Vib.*, 306, 271–283, 2007.
- [35] M. Inalpolat, A. Kahraman, A dynamic model to predict modulation sidebands of a planetary gear set having manufacturing errors, *J. Sound & Vib.*, 329, 371–393, 2010.
- [36] D. Park, A. Kahraman, A surface wear model for hypoid gear pairs, *Wear*, 267, 1595–1604, 2009.
- [37] S. Dhanasekaran, R. Gnanamoorthy, Gear tooth wear in sintered spur gears under dry running conditions, *Wear*, 265, 81–87, (2008).
- [38] R.J. Comparin, R. Singh, An analytical study of automobile neutral gear rattle, *ASME J. Mech. Des.* 112, 237–245, 1990.
- [39] T. Sakai, Y. Doi, K. Yamatommo, T. Ogasawara, M. Narita, Theoretical and experimental analysis of rattling noise of automotive gearbox, *SAE Paper*, 810-773, 1982.
- [40] G.S. Whiston, Global dynamics of a vibro-impacting linear oscillator, *J. Sound & Vib.*, 118(3), 395–429, 1987.
- [5] H. Vinayak, R. Singh, C. Padmanabhan, Linear dynamic analysis of multi-mesh transmissions containing external rigid gears, *J. Sound & Vib.*, 185(1), 1–32, 1995.
- [6] H. Iida, coupled torsional-flexural vibration of a shaft in geared system of rotor, *bulletin of the JSME*, 23(186), 2111–2117, 1980.
- [7] A. Kahraman, dynamic analysis of geared rotor by Finite Element, *J. Mech. Des.*, 114, 507–514, September 1992.
- [8] W. Kim, H.H. Yoo, J. Chung, Dynamic analysis for a pair of spur gears with translational motion due to bearing deformation, *J. of Sound & Vib.*, 329, 4409–4421, 2010.
- [9] M.S. Abbes, M.S. Trigui, F. Chaari, T. Fakhfakh, M. Haddar, Dynamic behaviour modelling of a flexible gear system by the elastic foundation theory in presence of defects, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 29, 887–896, 2010.
- [10] M. Kato, Evaluation of sound power radiated by a gearbox, *International Gearing Conference*, University of Newcastle, UK, 1994.
- [11] M.S. Abbes, S. Bouaziz, F. Chaari, M. Maatar, M. Haddar, An acoustic-structural interaction modelling for the evaluation of a gearbox-radiated noise, *I. J. Mech. S.*, 50, 569–577, 2008.
- [12] H. Yuan, C. Guan Teik, W. Lim, S. Shepard Jr., Experimental study on active vibration control of a gearbox system, *J. Sound & Vib.*, 282, 713–733, 2005.
- [13] A. Kahraman, G.W. Blankenship, Experiments on nonlinear dynamic behavior of an oscillator with clearance and periodically time-varying parameters, *ASME J. Appl. Mech.*, 64, 217–226, 1997.
- [14] H. Vinayak, R. Singh, Multi-body dynamics and modal analysis of compliant gear bodies, *J. Sound & Vib.*, 210(2), 171–214, 1998.
- [15] G.W. Hill, On the part of motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon, *Acta Math.*, 8, 1–36, 1886.
- [16] E. Mathieu, Memoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique, *J. Math. Pures Appl.*, 13, 137–203, 1868.
- [17] M. Benton, A. Seireg, Simulation of resonances and instability conditions in pinion-gear systems, *ASME J. Mech. Des.*, 100, 26–32, 1978.
- [18] M. Benton, A. Seireg, Factors influencing instability and resonance in Geared systems, *ASME J. Mech. Des.*, 103, 372–378, 1981.
- [19] S. He, R. Gunda, R. Singh, Effect of sliding friction on the dynamics of spur gear pair with realistic time-varying stiffness, *J. Sound & Vib.*, 301, 927–949, 2007.
- [20] J. Wang, T.C. Lim, Effect of tooth mesh stiffness asymmetric nonlinearity for drive and coast sides on hypoid gear dynamics, *J. Sound & Vib.*, 319, 885–903, 2009.
- [21] A. Kahraman, R. Singh, Non-linear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearance, *J. Sound & Vib.*, 144(3), 469–506, 1991.
- [22] C. Padmanabhan, R. Singh, Spectral coupling issues in a two-degree-of freedom system with clearance non-linearities, *J. Sound & Vib.*, 155(2), 209–230, 1992.

- [60] D.R. Houser, V.M. Bolze, J.M. Graber, Static and dynamic transmission error measurements and predictions for spur and helical gear sets, *Proc. of 7th ASME Int Power Transmission and Gearing Conf.*, San Diego, CA, 365–372, 1996.
- [61] A. Kahraman, J. Lim, H. Ding, A Dynamic Model of a Spur Gear Pair with Friction, *12th IFToMM World Congress*, Besançon, France, June 18–21, 2007.
- [62] O. Lundvall, N.Str. Omberg, A. Klarbring, A flexible multi-body approach for frictional contact in spur gears, *J. Sound & Vib.*, 278, 479–499, 2004.
- [63] S. He, S. Cho, R. Singh, Prediction of dynamic friction forces in spur gears using alternate sliding friction formulations, *J. Sound & Vib.*, 309, 843–851, 2008.
- [64] P. Velex, V. Cahouet, Experimental and numerical investigations on the influence of tooth friction in spur and helical gear dynamics, *ASME J. Mech. Des.*, 122, 515–522, 2000.
- [65] M. Vaishya, R. Singh, Analysis of periodically varying gear mesh systems with Coulomb friction using Floquet, *J. Sound & Vib.*, 243, 525–545, 2001.
- [66] H. Winter, M. Kojima, A study on the dynamics of geared system—Estimation of overload on gears in system, *Proc. Int. Symp. Gearing and Power Trans.*, Tokyo, c-12, 1981.
- [67] A. Kahraman, R. Singh, Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance nonlinearities in a geared system, *J. Sound & Vib.*, 146(1), 135–156, 1991.
- [68] A. Raghobhama, S. Narayanan, Bifurcation and chaos in geared rotor bearing system by incremental harmonic balance method, *J. Sound & Vib.*, 226(3), 469–492, 1999.
- [69] K. Sato, S. Yamamoto, T. Kawakami, Bifurcation sets and chaotic states of a geared system subjected to harmonic excitation, *Computational Mech.*, Berlin 7, 173–182, 1991.
- [70] C. Wan, C. Jian, Strong nonlinearity analysis for gear-bearing system under nonlinear suspension, bifurcation and chaos, *Nonlinear Analysis: RealWorld Applications*, 11, 1760–1774, 2010.
- [71] C. Wan, C. Jian, S. M. Chang, Bifurcation and chaos analysis of spur gear pair with and without nonlinear suspension, *Nonlinear Analysis: RealWorld Applications*, 12, 979–989, 2011.
- [72] R.G. Parker, S.M. Vijayakar, T. Imajo, Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modeling and experimental comparisons, *J. Sound & Vib.*, 237, 435–455, 2000.
- [73] R. Li, T. Lin, Z. Tao, C. Yang, Structure modal analysis of gearbox, *Proc. of ICMT*, 360–362, 2001.
- [74] V.K. Ambarisha, R.G. Parker, Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models, *J. Sound & Vib.*, 302, 577–595, 2006.
- [41] S. Dubowsky, F. Freudenstein, Dynamic analysis of mechanical systems with clearances, Part 1, Formulation of dynamic model, *ASME J. Eng. Ind.*, 93, 305–309, 1971.
- [42] M.A. Veluswami, F.R.E. Crossley, Multiple impacts of a ball between two plates, Part 1: Some experiments observations, *ASME J. Eng. Ind.*, 97, 820–827, 1975.
- [43] Y. Yue, J.H. Xie, H.D. Xu, Symmetry of the Poincare map and its influence on bifurcations in a vibro-impact system, *J. Sound & Vib.*, 323, 292–312, 2009.
- [44] R.G. Munro, *The dynamic behavior of spur gears*, PhD dissertation, Cambridge Univ., 1962.
- [45] K. Nakamura, Tooth separations and abnormal noise on power transmission gears, *Bull. JSME* 10, 846–854, 1967.
- [46] H.N. Ozguven, D.R. Houser, Dynamic analysis of high speed gears by using loaded static transmission error, *J. Sound & Vib.*, 125, 71–83, 1988.
- [47] L.E. Galhoud, S.F. Masri, J.C. Anderson, Transfer function of a class of nonlinear multidegree of freedom oscillator, *ASME J. Appl. Mech.*, 54, 215–225, 1987.
- [48] T. Sato, K. Umezawa, J. Ishikawa, Effects of contact ratio and profile correction on gear rotational vibration, *Bull. JSME* 26, 2010–2016, 1983.
- [49] H.F. Quintero, S. Cardona, L. Jordi, An analytical model for the tooth profile generation of noncircular gear, *12th IFToMM World Congress*, Besançon France, June 18–21, 2007.
- [50] J. Hedlund, A. Lehtovaara, Modeling of helical gear contact with tooth deflection, *Tribology International*, 40, 613–619, 2007.
- [51] H.H. Lin, D.P. Townsend, F.B. Oswald, Profile modification to minimize spur gear dynamic loading, *Proc. of ASME 5th Int Power Trans Gearing Conf.*, Chicago IL, 1, 455–465, 1989.
- [52] H.E. Staph, A parametric analysis of high-contact-ratio spur gears, *ASLE Trans.* 19, 201–215, 1976.
- [53] C.H. Liou, H.H. Lin, F.B. Oswald, D.P. Townsend, Effect of contact ratio on spur gear dynamic load with no tooth profile modifications, *ASME J. Mech. Des.*, 118, 439–443, 1996.
- [54] A. Kahraman, G.W. Blankenship, Effect of involute contact ratio on spur gear dynamics, *ASME J. Mech. Des.*, 121, 112–118, 1999.
- [55] K.F. Martin, A review of friction predictions in gear teeth, *Wear*, 49, 201–238, 1978.
- [56] K.L. Johnson, D.I. Spence, Determination of gear tooth friction by disc machine, *Tribol. Int.*, 24, 269–275, 1991.
- [57] M. Yoshizaki, C. Naruse, R. Nemoto, S. Haizuka, Study on frictional loss of spur gears (concerning the influence of tooth form, load, tooth surface roughness and lubricating oil), *Tribol. Trans.*, 31, 138–146, 1991.
- [58] B. Rebecchi, F. Oswald, D.P. Townsend, Measurement of gear tooth dynamic friction, *Proc. of 7th ASME Int Power Transmission and Gearing Conf.*, San Diego, CA, 355–363, 1996.
- [59] S. Wu, H.S. Cheng, A friction model of partial-EHL contacts and its application to power loss in spur gears, *Tribol. Trans.*, 34, 397–407, 1991.