

تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری در یک تیر ویسکوالاستیک میکرو، مدل شده

با استفاده از مدل ویسکوالاستیک مرتبه کسری کلونین - وویت

مصطفی عباسزاده استادیار دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران mkhaghani@nri.ac.ir	فیروز بختیاری نژاد استاد دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران baktiari@aut.ac.ir	علی کمالی* استادیار دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران alikalalie@aut.ac.ir	احسان لقمان دانشجوی دکتری دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران masayesh@nri.ac.ir
---	---	--	--

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۰۵

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۳/۰۸

چکیده

در سال‌های اخیر با رشد حسابان کسری به تدریج کاربردهای ریاضیات مرتبه کسری در علوم مهندسی در حال پیدایش هستند. یکی از کاربردهایی که در سال‌های اخیر توجه محققان را به خود جلب کرده است مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک با استفاده از حسابان کسری است. در این پژوهش یک تیر میکرو که با استفاده از مدل ویسکوالاستیک کسری کلونین - وویت^۱ مدل‌سازی شده، بررسی می‌گردد. تیر مورد نظر در این پژوهش با در نظر گرفتن کرنش‌های خطی، تئوری تنش کوپل اصلاح شده (MCST^۲)، مدل ویسکوالاستیک مرتبه کسری کلونین - وویت مدل‌سازی می‌شود و با استفاده از اصل هامیلتون^۳، معادله حرکت به صورت یک معادله مرتبه کسری با مشتقات جزئی حاصل می‌شود. معادله به دست آمده با استفاده از ترکیب المان محدود و تفاضل محدود حل می‌شود. معادلات در حوزه زمان با استفاده از تفاضل محدود و در حوزه مکان با استفاده از المان محدود و گالرکین گسسته‌سازی می‌شوند. شبیه‌سازی‌های انجام شده نشان می‌دهد که مشتق مرتبه کسری تأثیر فراوانی در دامنه و پاسخ ارتعاشات آزاد و اجباری تیر مورد نظر دارد و باعث افزایش یا کاهش میرایی می‌شود. علاوه بر این اثرات طول تیر و ضریب میرایی ویسکوالاستیک نیز بررسی شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند پدیده تشدید اثرات مشتق مرتبه کسری را نیز به شدت تحت تأثیر قرار می‌دهند. نتایج این مقاله می‌تواند برای بهبود مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک به کار گرفته شود.

واژگان کلیدی: حسابان کسری^۴، تیر میکرو، مدل ویسکوالاستیک مرتبه کسری، روش تفاضل محدود

۱. مقدمه

با پیشرفت بیشتر حسابان کسری و ارائه تئوری‌ها و روش‌های جدید برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی کسری و معادلات مرتبه کسری با مشتقات جزئی، به مرور این ریاضیات وارد مباحث فیزیکی شده است. بحث ارتعاشات خطی و غیرخطی سیستم‌های پیوسته موضوعی است که در دهه اخیر نظر پژوهشگران زیادی را متوجه خود ساخته است. در ادامه تعدادی از تحقیقات انجام شده در این زمینه آورده شده‌اند.

دی لورنزو^۵ و همکارانش در سال ۲۰۱۲ به مقایسه مدل‌های ماکسول^۶، کلونین و مدل مرتبه کسری پرداختند [۱]. در تست‌های آزمایشگاهی پیش از آن در برخی موارد مدل ماکسول و در برخی موارد مانند خزش^۷ نتایج مدل کلونین نتایج بهتری را ارائه می‌دادند. در این مقاله دینامیک تیر اوایلر-برنولی مرتبه کسری مورد مطالعه قرار گرفته است. کاجیچ^۸ و همکارانش در سال ۲۰۱۷ ارتعاشات آزاد تیر نانو روی بستر ویسکوالاستیک را مورد مطالعه قرار دادند [۲]. آنها تیر نانو را با استفاده از تئوری غیرمحلای الاستیسیته و تئوری ویسکوالاستیک مرتبه کسری مدل‌سازی نمودند. حل تحلیلی در این مقاله به وسیله تبدیل لاپلاس انجام شده است.

سریوستاوا^۹ و همکارانش در سال ۲۰۱۷ روشی تحلیلی بر اساس آنالیز q -homotopy و تبدیل لاپلاس برای به‌دست آوردن و تحلیل مدل ارتعاشاتی کسری غشاهای بزرگ، ارائه کرده‌اند [۳]. نتایج مقاله در مقایسه با روش‌های عددی نتایج مناسبی را نشان می‌دهد.

یکی از مسائلی که در سیستم‌های غیرخطی مطرح است این است که، ماکزیمم دامنه ارتعاشات و میرایی سیستم دارای یک ارتباط قوی و غیرخطی هستند. همچنین نتایج عددی و آزمایشگاهی در برخی موارد و با تغییر فرکانس‌های تشدید نتایج نزدیکی را نشان نمی‌دهند.

آمایلی^{۱۰} برای اولین بار در سال ۲۰۱۷ مدلی مطرح کرد که وابستگی فرکانسی میرایی با استفاده از مشتق مرتبه کسری تنظیم می‌شود تا با رفتار ماده تطبیق پیدا کند [۴]. حل مسئله نیز با استفاده از روش هارمونیک بالانس^{۱۱} به‌دست آمد. نتایج آزمایشگاهی با افزایش دامنه ارتعاش، افزایش میرایی را نشان می‌دهد و مدل ارائه شده با دقت خوبی این موضوع را نشان می‌داد.

بحرینی^{۱۲} و همکارانش در سال ۲۰۱۳ ارتعاشات یک تیر ویسکوالاستیک با مرتبه کسری را بررسی کردند [۵]. در این پژوهش بحرینی و همکارانش برای حل از روش المان محدود غیرخطی استفاده کردند و معادله ساختاری را براساس ویسکوالاستیک مرتبه کسری در نظر گرفتند. همچنین تیر با شرایط مرزی و بارگذاری مختلف در این مقاله تحلیل شده است. در این مقاله اثر نمای مرتبه کسری روی تغییر شکل‌های بزرگ تیر ویسکوالاستیک بعد از گذشت ۱۰، ۱۰۰ و ۱۰۰۰ ساعت بررسی شده است.

یی‌تانگ^{۱۳} و همکارانش در سال ۲۰۱۸ ارتعاشات آزاد و غیرخطی یک لوله ویسکوالاستیک با مدل مرتبه کسری که حاوی مایع بود را بررسی کردند [۶]. مدل لوله با اعمال تئوری تیر اوایلر برنولی و اصل هامیلتون و با توجه به مدل کسری و هندسه غیرخطی به‌دست آمد. نتایج این تحقیق اثرات مرتبه کسری، نسبت جرم، سرعت مایع و ضریب غیرخطی را روی دامنه لوله نشان می‌دهد. نتیجه قابل توجه این تحقیق این بود که دامنه لوله ویسکوالاستیک حامل جریان با مدل مرتبه کسری مقادیر بیشتری را نسبت به مدل‌های قبلی پیش‌بینی می‌کند. برای حل مسئله در این مقاله از روش تحلیلی-تقریبی مقیاس‌های چندگانه^{۱۴} استفاده شده است.

پرمون^{۱۵} و همکارانش در سال ۲۰۱۷ ارتعاشات غیرخطی ورق ویسکوالاستیک با معادله ساختاری مرتبه کسری کلونین-وویت را در مقاله ارائه کردند [۷].

در [۷] معادلات غیرخطی کوپل با توجه به تابع تنش ابری^{۱۶} به دست آمده‌اند و سپس با استفاده از روش گالرکین گسسته‌سازی شده‌اند. همچنین از روش مقیاس‌های چندگانه، حل تحلیلی برای ورق با تکیه‌گاه ساده و گیردار به دست آمده است. در نهایت معادلات دامنه-فرکانس و فاز-فرکانس برای حالات تشدید زیرهارمونیک^{۱۷}، سوپر هارمونیک^{۱۸} و تشدید ارائه می‌شوند. روابط به دست آمده برای مطالعه اثرات تحریک، پارامتر مرتبه کسری روی پاسخ‌های فرکانسی ورق ویسکوالاستیک استفاده شده‌اند. در سال ۲۰۱۷ ارتعاشات غیرخطی تیر با مدل کسری تحت تأثیر تحریک هارمونیک در [۸] مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مقاله ماده ویسکوالاستیک تیرها با مدل مرتبه کسری زنی^{۱۹} توصیف شده است. معادلات دامنه با استفاده از المان محدود و روش هارمونیک-بالانس به دست می‌آیند. در این مقاله پایداری در حالت ماندگار بررسی می‌شود و نمودارهای دامنه-فرکانس نیز رسم می‌شوند تا اثرات خواص ویسکوالاستیک مرتبه کسری روی پایداری و دامنه بررسی شوند. در سال ۲۰۱۷ تأثیر مدل ویسکوالاستیک مرتبه کسری روی پیچش تیر در [۹] مورد مطالعه قرار گرفت. این مقاله به گسترش روش عددی LEM^{۲۰} در حل پرداخته است. لواندوفسکی^{۲۱} و پاولاک^{۲۲} در سال ۲۰۱۱ سازه‌های قاب دارای میرایی مرتبه کسری را تحقیق کردند [۱۰]. در این تحقیق آنها معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری را در فضای حالت نوشتند و سپس به حل مسئله مقدار ویژه غیرخطی به دست آمده پرداختند. انصاری و همکارانش در سال ۲۰۱۷ رفتار یک تیر ویسکوالاستیک نانو را تحت شرایط مختلف مرزی مورد بررسی قرار دادند [۱۱]. آنها برای در نظر گرفتن اثرات مقیاس نانو از تئوری گرادین کرنش اصلاح شده^{۲۳} استفاده نمودند. برای مدل‌سازی تیر در این مقاله از مدل تیر تیموشنکو و مدل ویسکوالاستیک کسری کلونین-وویت استفاده شده است. معادلات تیر با استفاده از اصل هامیلتون

به دست می‌آیند. برای حل معادلات، ابتدا به وسیله روش گالرکین معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به معادلات دیفرانسیل معمولی کسری تبدیل می‌شوند. در نهایت در این مقاله اثرات مرتبه کسری، ویسکوالاستیسیته و پارامتر بعد^{۲۴} روی پاسخ تیر تیموشنکو و در شرایط مرزی مختلف بررسی شده‌اند. همچنین انصاری و همکارانش در پژوهش دیگری به بررسی ارتعاشات آزاد یک تیر تیموشنکو نانو با مدل ویسکوالاستیک مرتبه کسری پرداختند [۱۲]. در این پژوهش از دو روش نیمه تحلیلی و عددی برای حل مسئله استفاده شده است. دقت روش عددی با توجه به روش نیمه تحلیلی تأیید می‌شود. به کار بردن روش نیمه تحلیلی استفاده شده برای شرایط مرزی مختلف مشکل است. اثرات مشتق کسری، پارامتر غیرمحل نانو روی تیر مسئله و در شرایط مرزی مختلف در این مرجع بررسی شده‌اند. ارتعاشات غیرخطی و اجباری ورق‌های نازک ویسکوالاستیک در [۱۳] تحقیق شده‌اند. مدل ویسکوالاستیک در نظر گرفته شده در این مرجع مدل کلونین-وویت مرتبه کسری است. حل مسئله با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه انجام شده است. مسئله برای حالات تشدید داخلی^{۲۵} و تشدید با تحریک خارجی بررسی شده است. ارتعاشات ریل راه آهن با مدل مرتبه کسری در [۱۴] مورد مطالعه قرار گرفت. سیستم مورد نظر به وسیله یک تیر روی بستر ویسکوالاستیک مدل می‌شود. در این مقاله اثرات پارامترهای نمای مرتبه کسری، سرعت بارگذاری و ... روی پاسخ بررسی شده‌اند. ارتعاشات غیرخطی ورق با مدل ویسکوالاستیک زنی مرتبه کسری در مرجع [۱۵] تحقیق شد. برای مدل غیرخطی ورق اثرات اینرسی دورانی و برش نیز در نظر گرفته شده‌اند. برای حل مسئله در این مقاله از روش المان محدود و روش هارمونیک-بالانس استفاده شده است. راسیخین^{۲۶} و همکارانش [۱۶] ارتعاشات

غیرخطی پوسته استوانه‌ای با مدل ویسکوالاستیک مرتبه کسری کلونین-وویت را مطالعه کردند.

آنها در حل مسئله ترکیبات تشدید داخلی را در نظر گرفتند و مسئله را به روش‌های عددی حل کردند. ارتعاشات غیرخطی تیر اویلر-برنولی نانو و ویسکوالاستیک موضوع دیگری است که در مرجع [۱۷] تحقیق شد.

در این مرجع برای مدل‌سازی ویسکوالاستیک از مدل مرتبه کسری استفاده شده است. در این مقاله اثرات جابه‌جایی اولیه، مرتبه مشتق کسری، پارامتر سطح، نسبت ضخامت به طول و ... روی تیر ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه ساده و گیردار-آزاد بررسی شده‌اند. همچنین برای حل مسئله پس از جداسازی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، از تکنیک پیش‌بینی-اصلاح^{۲۷} استفاده شده است.

ارتعاشات و دینامیک غیرخطی یک تیر میکرو ویسکوالاستیک موضوع مقاله [۱۸] است. در این مقاله مدل‌سازی یک تیر با به‌کارگیری مدل ویسکوالاستیک کسری کلونین-وویت و به‌کار بردن اصل هامیلتون به‌دست آمده است. همچنین برای حل مسئله ابتدا با استفاده از روش گالرکین جداسازی انجام شده و سپس به وسیله روش مقیاس‌های چندگانه مسئله حل شده است. در این مقاله اثرات ترم مرتبه کسری روی دینامیک، دامنه، فرکانس و دوشاخگی بررسی شده‌اند. همچنین وقوع آشوب با استفاده از ملینکوف^{۲۸} پیش‌بینی می‌شود. ارتعاشات سازه ساندویچی ویسکوالاستیک موضوعی است که در مرجع [۱۹] تحقیق شده است. سازه استفاده شده در این مقاله یک تیر است که قسمت ویسکوالاستیک آن با استفاده از ریاضیات کسری مدل‌سازی شده و برای حل مسئله در این مرجع، تکنیک‌های عددی استفاده شده‌اند.

در سال ۲۰۱۹ جوادی و همکارانش [۲۰] ارتعاشات غیرخطی و اجباری یک لوله ویسکوالاستیک با مدل مرتبه کسری که حاوی سیال بود را بررسی کردند و به مطالعه تأثیرات مدل مرتبه کسری روی تشدید اولیه و ثانویه

پرداختند. آنها از مدل تیر اویلر-برنولی و تئوری غیرخطی فن کارمن برای مدل‌سازی مسئله استفاده کردند. در این مرجع برای حل مسئله، پس از گسسته‌سازی به روش گالرکین، روش مقیاس‌های چندگانه استفاده شده است. نتایج این پژوهش اهمیت مشتق مرتبه کسری را در ارتعاشات نشان می‌داد. لواندوفسکی و باثوم^{۲۹} در [۲۱] به آنالیز دینامیک تیرهای کامپوزیت شامل لایه‌های الاستیک و ویسکوالاستیک پرداختند. مدل‌سازی قسمت ویسکوالاستیک در این مقاله با توجه به مدل ویسکوالاستیک کسری زنر^{۳۰} انجام شده است. همچنین از هر دو مدل اویلر-برنولی و تیموشنکو برای مدل‌سازی تیر در این مقاله بهره گرفته شده است. برای حل مسئله در این مقاله از روش المان محدود استفاده شده است.

ارتعاشات آزاد و اجباری نانو لوله کربن در مرجع [۲۲] بررسی شده است. در این مرجع رفتار ویسکوالاستیک به صورت مدل کسری در نظر گرفته شده است. برای مدل‌سازی از تیر اویلر-برنولی و تئوری فن کارمن استفاده شده است. برای حل این مسئله ابتدا گسسته‌سازی با استفاده از گالرکین انجام شده است و سپس از روش مقیاس‌های چندگانه معادلات دیفرانسیل کسری معمولی حل شده‌اند.

در این پژوهش یک تیر میکرو که با استفاده از مدل ویسکوالاستیک کسری کلونین-وویت مدل‌سازی شده است بررسی می‌گردد.

تیر مورد نظر در این پژوهش با در نظر گرفتن کرنش‌های خطی، تئوری تنش کوپل اصلاح شده (MCST^{۳۱})، مدل ویسکوالاستیک مرتبه کسری کلونین-وویت مدل‌سازی می‌شود و با استفاده از اصل هامیلتون، معادله حرکت به صورت یک معادله مرتبه کسری با مشتقات جزئی حاصل می‌شود. معادله به‌دست آمده با استفاده از ترکیب المان محدود و تفاضل محدود حل می‌شود که در هیچ یک از پژوهش‌های گذشته استفاده نشده است.

که در آن m_{ij} تانسور تنش میکرو^{۳۳} و x_{ij} تانسور گرا دیان چرخش متقارن^{۳۳} هستند که به صورت رابطه ۴ محاسبه می‌گردند:

$$\begin{aligned} m_{xy} &= m_{yx} = \mu l^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ x_{xy} &= x_{yx} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \sigma_{xx} &= E \varepsilon_{xx} \end{aligned} \quad (4)$$

که در رابطه‌ی ۴، l مؤلفه بعد^{۳۴} تیر است. فرض می‌شود یک نیروی عرضی متغیر با زمان روی کل تیر وجود دارد و یک میراکننده ویسکوز نیز روی سراسر تیر برقرار است. به این ترتیب δW_{nc} به صورت رابطه ۵ به دست می‌آید:

$$\delta W_{nc} = \int_0^L (F - C_d \dot{w}) \delta w \, dx \quad (5)$$

در رابطه ۵، F نیروی خارجی اعمال شده بر تیر و C_d میرایی تیر است. با توجه به روابط ۲ تا ۵ و استفاده از اصل هامیلتون معادله حرکت به صورت رابطه ۶ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_d \frac{\partial w}{\partial t} \\ + (EI + \mu Al^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ + F(x) \cos(\omega t) \\ = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

که در این رابطه w فرکانس نیروی تحریک است. با توجه به این نکته که تیر تکیه‌گاه ساده است شرایط مرزی به صورت رابطه ۷ نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} w &= 0 \quad @ \quad x = 0, L \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \quad @ \quad x = 0, L \end{aligned} \quad (7)$$

مدل ویسکوالاستیک کلونین-وویت مرتبه کسری به صورت رابطه ۸ نوشته می‌شود [۱۱]:

$$\sigma = E \left(\varepsilon + \bar{g} \frac{\partial \alpha}{\partial t} (\varepsilon) \right) \quad (8)$$

که در این رابطه α مرتبه مشتق است که می‌تواند از ۰ تا ۱ تغییر کند و \bar{g} ضریب ویسکوالاستیسیته است.

از مهم‌ترین نوآوری‌های این مقاله می‌توان به بررسی اثرات مرتبه کسری در نزدیکی تشدید اشاره نمود. نتایج این مقاله می‌تواند به مدل‌سازی دقیق‌تر مواد ویسکوالاستیک کمک کند.

۲. معادلات حرکت

در این بخش معادلات حرکت یک تیر اویلر-برنولی میکرو با مدل ویسکوالاستیک مرتبه کسری و تکیه‌گاه ساده با استفاده از روش اصل هامیلتون به دست می‌آیند. تیر در نظر گرفته شده یک تیر به طول L ، چگالی ρ ، مدول الاستیسیته E ، مدول برشی μ و سطح مقطع A می‌باشد. از آنجا که هدف معادلات خطی تیر است، باید کرنش‌های خطی تیر در نظر گرفته شوند. کرنش‌های خطی یک تیر اویلر برنولی به صورت رابطه ۱ در نظر گرفته می‌شود:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1)$$

که در رابطه ۱، ε_{xx} کرنش تیر، w جابه‌جایی تیر در راستای عرضی هستند. حال با توجه به اصل هامیلتون نیاز است که انرژی جنبشی سیستم نوشته شود. انرژی جنبشی سیستم به صورت رابطه ۲ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} T \\ = \frac{1}{2} \int_0^L \int \int_A \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dA \, dx \\ = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (2)$$

که در معادله‌ی ۲ انرژی جنبشی تیر و t زمان هستند. انرژی پتانسیل تیر (U) میکرو با توجه به تئوری تنش کوپل اصلاح شده به صورت رابطه ۳ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \int_0^L [\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + m_{xy} x_{xy} \\ + m_{yx} x_{yx}] dV \end{aligned} \quad (3)$$

با استفاده از رابطه ۸، رابطه ۶ به صورت رابطه ۹ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_d \frac{\partial w}{\partial t} \\ & + (EI + \mu Al^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ & + (EI + \mu Al^2) \bar{g} \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] \\ & + F(x) \cos(\omega t) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

برای حل و نتیجه‌گیری، مناسب‌تر است معادله حرکت ۹ به صورت بی بعد نوشته شود. معادله حرکت بی بعد را می‌توان به شکل رابطه ۱۰ نوشت:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} + (1 + \eta_1) \frac{\partial^4 w^*}{\partial t^{*4}} \\ & + (\gamma \\ & + \eta_2) \frac{\partial}{\partial t^{*\alpha}} \left[\frac{\partial^4 w^*}{\partial t^{*4}} \right] \\ & + c \frac{\partial w^*}{\partial t^*} \\ & - \tilde{f} \cos(\tilde{\Omega} t^*) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{w}{h}, x^* = \frac{x}{L}, t^* = t \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \\ c &= \frac{c_d L^4}{EI} \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}, \tilde{f} = \frac{FL^4}{EI h} \end{aligned} \quad (11)$$

(۱۳)

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= \omega \sqrt{\frac{\rho AL^4}{EI}}, \gamma = \bar{g} \left(\frac{EI}{\rho AL^4} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \\ \eta_1 &= \frac{\mu Al^2}{EI}, \eta_2 = \frac{\mu Al^2}{EI} \bar{g} \left(\frac{EI}{\rho AL^4} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

که در این روابط h ضخامت تیر است. در ادامه از گذاشتن علامت $((*)$) و $((\sim))$ برای ساده‌تر شدن روابط صرف نظر می‌شود.

۳. حل معادله حرکت

رابطه ۱۰ یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای خطی مرتبه کسری است. برای گسسته‌سازی مشتق کپوتو^{۳۵} از رابطه ۱۲ استفاده می‌گردد [۲۳]:

$$\begin{aligned} D^\alpha u^n &= \frac{1}{\Delta t^\alpha} \left[b_0 u^n \right. \\ & - \sum_{m=0}^{n-1} (b_{n-m-1} \\ & \left. - b_{n-m}) u^m - b_n u^0 \right] \quad (12) \\ b_m^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} [(m+1)^{1-\alpha} \\ & - m^{1-\alpha}] \end{aligned}$$

که در این رابطه Γ نماد تابع گاما، n شماره گام، u یک پارامتر نمادین و D نماد مشتق کپوتو هستند. به منظور گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل ۱۰ از روابط ۱۳ استفاده می‌گردد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1}}{\Delta t^2}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{w^{n+1} - w^{n-1}}{2\Delta t}, \\ D^\alpha [w_{xxx}] &= \frac{1}{\Delta t^\alpha} \left[b_0 w_{xxx}^{n+1} - \sum_{m=0}^n (b_{n-m} - b_{n-m+1}) w_{xxx}^m - b_{n+1} w_{xxx}^0 \right] \end{aligned}$$

روش گالرکین و انتخاب توابع $\varphi_k(x)$ به شکل رابطه ۱۶ مسئله قابل حل است:

$$\varphi_k(x) = \sin(k \pi x) \quad (۱۶)$$

۴. حل عددی و نتایج

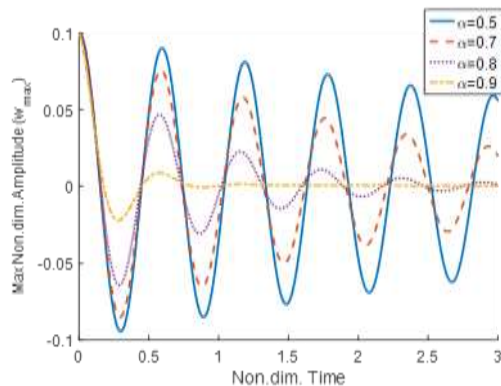
برای حل عددی در این قسمت تیر میکرو از جنس اپوکسی^{۳۶} با مقادیر عددی موجود در ۱۷ انتخاب شده است [۲۴]:

$$\begin{aligned} E &= 1.44 \text{ Gpa}, & l &= 1.7 * 10^{-6} \text{ m}, \\ h &= 5.4 * l, \\ \mu &= 521.7 \text{ Mpa}, \\ b &= 2 * h, \\ \rho &= 1220 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \\ L &= 200 * l \end{aligned} \quad (۱۷)$$

که در این رابطه b عرض تیر مورد تحلیل است. همچنین مقدار N برابر با ۳ در نظر گرفته شده است.

شکل ۱ همگرایی روش تفاضل محدود را بررسی می‌کند: با توجه به شکل ۱ برای مقادیر نتایج تفاوتی ندارد و به همین دلیل می‌توان گفت روش تفاضل محدود برای $\Delta t \leq 0.001$ همگرا شده است. در ادامه برای رسم نمودارها $\Delta t \leq 0.001$ در نظر گرفته شده است.

شکل ۲ اثر مرتبه مشتق کسری را بر پاسخ ارتعاشات آزاد تیر نشان می‌دهد:



شکل ۲. اثر مشتق کسری روی ارتعاشات آزاد تیر میکرو
 $\bar{g} = 0.00001, c = 0.2$

با استفاده از روابط ۱۳، معادله دیفرانسیل ۱۰ به صورت

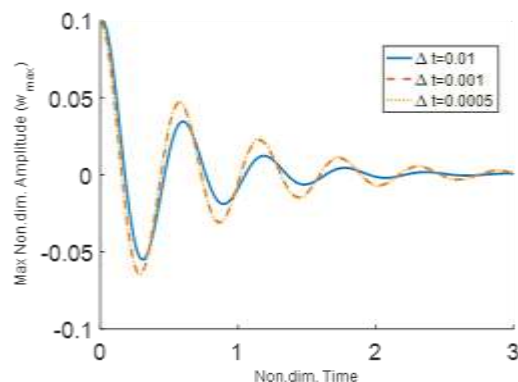
$$V = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ (تغییر متغیر می‌شود) (استفاده می‌شود):}$$

$$\begin{aligned} & \frac{w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1}}{\Delta t^2} \\ & + (1 + \eta_1) V_{xx}^{n+1} \\ & + c \frac{w^{n+1} - w^{n-1}}{2\Delta t} \\ & + \frac{(\gamma + \eta_2) \Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} \left[b_0 V_{xx}^{n+1} \right. \\ & \left. - \sum_{m=1}^n (b_{n-m} - b_{n-m+1}) V_{xx}^m \right. \\ & \left. - b_{n+1} V_{xx}^0 = F \cos(\Omega t_n) \right] \\ & V^{n+1} = w_{xx}^{n+1} \end{aligned} \quad (۱۴)$$

در ادامه از روش المان محدود برای گسسته‌سازی در حوزه مکان به صورت فرمول ۱۵ استفاده می‌شود:

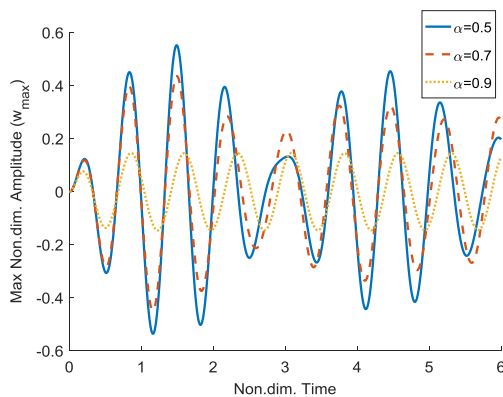
$$\begin{aligned} w^n(x) &= \sum_{k=1}^N \lambda_k^n \varphi_k(x) \\ V^n(x) &= \sum_{k=1}^N \theta_k^n \varphi_k(x) \end{aligned} \quad (۱۵)$$

که در این رابطه λ_k^n و θ_k^n بردارهای زمانی هستند که در روش تفاضل محدود ایجاد شده‌اند. همچنین N نیز تعداد توابع مورد استفاده در روش گالرکین است. با استفاده از



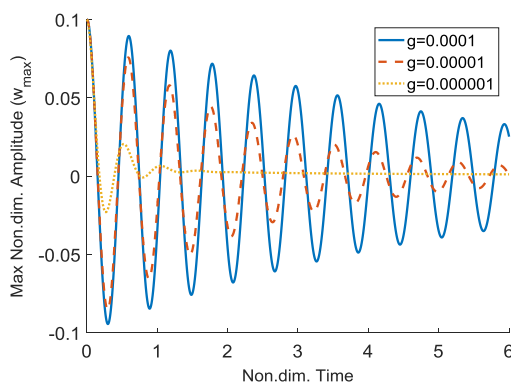
شکل ۱. بررسی همگرایی روش تفاضل محدود به ازای گام‌های زمانی متفاوت $\bar{g} = 0.00001, c = 0.2, \alpha = 0.8, f = 0$

با توجه به شکل ۲ مشخص است که مقدار مشتق کسری تأثیر زیادی در میرایی سیستم دارد به طوری که با افزایش آن دامنه ارتعاشات کاهش یافته و سریع‌تر میرا می‌شوند. شکل ۳ اثر مشتق مرتبه کسری را بر ارتعاشات اجباری تیر میکرو می‌دهد:



شکل ۳. اثر مشتق کسری روی ارتعاشات اجباری تیر میکرو
 $\bar{g} = 0.00001, c = 0.2, f = 10, \Omega = 0.8\omega_1$

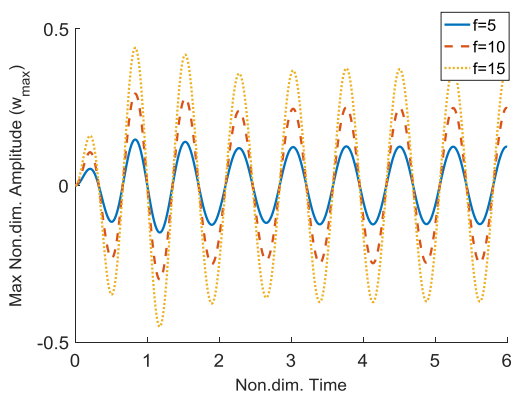
شکل ۳ نشان می‌دهد که مرتبه مشتق کسری می‌تواند تأثیر فراوانی بر ارتعاشات اجباری نیز داشته باشد و دامنه ارتعاشات را به شدت تغییر قرار دهد. در این شکل و شکل‌های بعدی منظور از ω_1 فرکانس طبیعی اصلی است. با توجه به شکل ۴ می‌توان اثر ضریب \bar{g} را در ارتعاشات آزاد مشاهده نمود.



شکل ۴. اثر ضریب \bar{g} در ارتعاشات آزاد
 $\alpha = 0.7, c = 0.2$

با توجه به شکل ۴ ضریب میرایی ویسکوالاستیک می‌تواند عاملی مؤثر در میرایی سریع‌تر ارتعاشات باشد. همان‌طور که این عامل در ارتعاشات با مدل ویسکوالاستیک معمولی تأثیرگذار است در ارتعاشات سیستم‌های با مدل کسری نیز اثرگذار است.

شکل ۵ اثر ضریب نیرو را در مسئله مورد بررسی نشان می‌دهد:

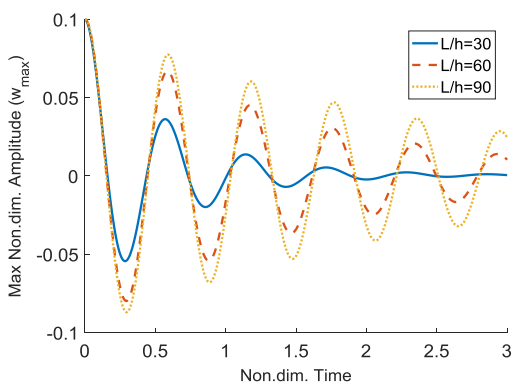


شکل ۵. اثر ضریب نیرو f در ارتعاشات اجباری

$$\alpha = 0.8, c = 0.2, \bar{g} = 0.00001, \Omega = 0.8\omega_1$$

با توجه به شکل ۵ می‌توان نتیجه گرفت ضریب نیرو در ارتعاشات مسئله تیر با مدل مرتبه کسری نیز تأثیر فراوانی دارد.

برای بررسی اثرات طول تیر از پارامتر $\frac{L}{h}$ استفاده می‌شود. شکل ۶ اثرات این متغیر را نشان می‌دهد:



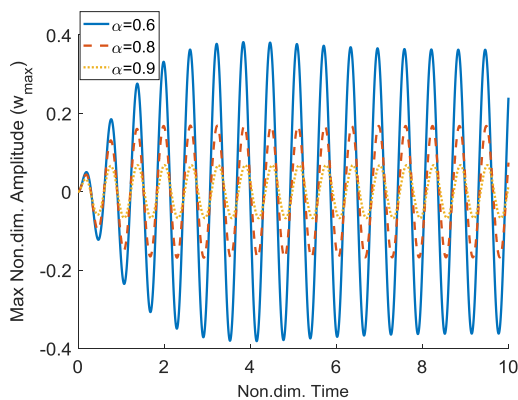
شکل ۶. اثر ضریب طول $\frac{L}{h}$ در ارتعاشات تیر

$$\alpha = 0.8, c = 0.2, \bar{g} = 0.00001, f = 0$$

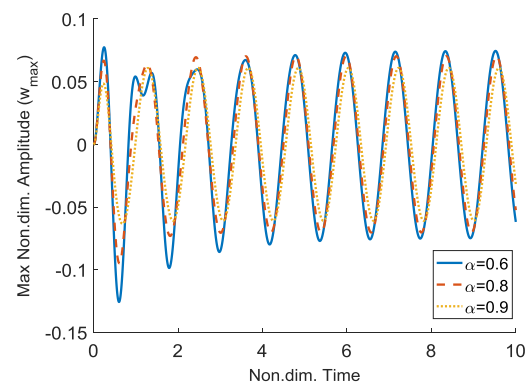
با توجه به شکل ۶ می‌توان به اثرات طول تیر در ارتعاشات آزاد پی برد. با افزایش طول تیر دامنه نوسانات و زمان نوسان کردن افزایش یافته است. با توجه به اینکه با افزایش طول و کاهش ضخامت، سختی تیر کاهش می‌یابد پس فرکانس طبیعی نیز کاهش می‌یابد و دامنه و زمان نوسان افزایش می‌یابد.

شکل ۷ برای بررسی اثرات فرکانس تحریک روی ارتعاشات تیر رسم شده است.

شکل ۷ نشان می‌دهد که فرکانس تحریک می‌تواند اثرات زیادی روی دامنه‌ی ارتعاشات داشته باشد. مهم‌ترین نکته‌ای که از این شکل برداشت می‌شود آن است که اثرات مرتبه مشتق کسری در حالتی که فرکانس تحریک به فرکانس تشدید نزدیک است بسیار شدیدتر است به طوری که در حالتی که فرکانس تحریک دور از حالت تشدید است مرتبه مشتق تأثیر زیادی روی پاسخ ندارد ولی درحالتی که فرکانس تحریک نزدیک به تشدید شده است دامنه نوسانات به شدت از مرتبه مشتق تأثیر می‌پذیرد.



شکل (ب) $\Omega = 0.95\omega_1$



شکل (الف) $\Omega = 0.5\omega_1$

شکل ۷. اثر فرکانس تحریک در ارتعاشات تیر $c = 1, \bar{g} = 0.00001, f = 5$

بسیار مهم‌تر می‌شود و تأثیرگذاری شدیدتری دارد که در این مقاله برای مشتق کسری نیز این پدیده نشان داده شد.

۶. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

با استفاده از حسابان کسری می‌توان مدل‌هایی دقیق‌تر و با انعطاف‌پذیری بیشتر برای میرایی در مواد ویسکوالاستیک ارائه نمود که یکی از این مدل‌ها مدل کلوین-وویت مرتبه کسری است. در این پژوهش از روش تفاضل محدود استفاده شده است که در پژوهش‌های قبلی کمتر مورد توجه قرار گرفته است. نتایج این مقاله می‌تواند در مدل‌سازی دقیق‌تر مواد ویسکوالاستیک کاربرد فراوانی داشته باشد. همچنین نشان داده شد که تأثیر مشتق مرتبه

۵. صحت‌سنجی نتایج

برای صحت‌سنجی نتایج می‌توان به مقایسه نتایج این مقاله با دیگر مقالات پرداخت. در مورد شکل ۲ مشاهده شد که با افزایش مرتبه مشتق کسری، دامنه نوسانات کاهش می‌یابد که این نتیجه در مرجع [۱۱] نیز به اثبات رسیده است. همچنین با افزایش طول و کاهش ضخامت، سختی تیر کاهش می‌یابد که باعث کاهش فرکانس طبیعی می‌شود و انتظار می‌رود دامنه و زمان نوسان افزایش یابد که این نکته نیز در شکل ۶ و همچنین مرجع [۱۱] مشاهده می‌شود.

در مورد تأثیر پدیده تشدید روی اثرات مرتبه مشتق کسری تا به حال تحقیقی انجام نشده است اما آمابیلی در مرجع [۳] نشان داد که میرایی با نزدیک شدن به حالت تشدید

این مورد در هر دو حالت ارتعاشات آزاد و اجباری صدق می‌کند. ضریب میرایی ویسکو الاستیک و طول تیر نیز از دیگر پارامترهایی هستند که در میرایی نقش مهمی را ایفا می‌کنند و با تغییر آنها نتایج تغییر می‌کنند. نتایج نشان می‌دهند که افزایش طول تیر یا کاهش ضخامت آن باعث افزایش زمان نوسان و دامنه نوسان می‌شوند.

کسری در حالت تشدید بسیار شدیدتر از حالت دور از تشدید است. با توجه به نمودارهای ارائه شده در بخش قبل می‌توان به اثر قابل توجه مشتق مرتبه کسری در میرایی پی‌برد. با افزایش مرتبه مشتق کسری میرایی ارتعاشات سریع‌تر رخ داده و همچنین دامنه ارتعاشات نیز شدیداً کاهش می‌یابد.

۷. مآخذ

- [1] Di Lorenzo, S., Pinnola, F.P. and Pirrotta, A., "On the dynamics of fractional visco-elastic beams", In *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 2012, Vol. 45202, pp. 1273-1281, American Society of Mechanical Engineers.
- [2] Cajić, M., Karličić, D. and Lazarević, M., "Damped vibration of a nonlocal nanobeam resting on viscoelastic foundation: fractional derivative model with two retardation times and fractional parameters", *Meccanica*, 2017, Vol.52, no.1-2, pp.363-382.
- [3] Srivastava, H.M., Kumar, D. and Singh, J., "An efficient analytical technique for fractional model of vibration equation", *Applied Mathematical Modelling*, 2017, Vol.45, pp.192-204.
- [4] Amabili, Marco, "Nonlinear damping in large-amplitude vibrations: modelling and experiments", *Nonlinear Dynamics*, 2018, Vol.93, no.1, pp.5-18.
- [5] Bahraini, Seyed Masoud Sotoodeh, Mohammad Eghtesad, Mehrdad Farid, and Esmaeal Ghavanloo, "Large deflection of viscoelastic beams using fractional derivative model", *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2013, Vol.27, no.4, pp.1063-1070.
- [6] Tang, Ye, Yaxin Zhen, and Bo Fang, "Nonlinear vibration analysis of a fractional dynamic model for the viscoelastic pipe conveying fluid", *Applied Mathematical Modelling*, 2018, Vol.56, pp.123-136.
- [7] Permoon, M. R., H. Haddadpour, and M. Javadi, "Nonlinear vibration of fractional viscoelastic plate: primary, subharmonic, and superharmonic response", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2018, Vol.99, pp.154-164.
- [8] Lewandowski, Roman, and Przemysław Wielentejczyk, "Nonlinear vibration of viscoelastic beams described using fractional order derivatives", *Journal of Sound and Vibration*, 2017, Vol.399, pp.228-243.
- [9] Colinas-Armijo, N., S. Cutrona, M. Di Paola, and A. Pirrotta, "Fractional viscoelastic beam under torsion", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, Vol.48, pp.278-287.
- [10] Lewandowski, Roman, and Zdzisław Pawlak, "Dynamic analysis of frames with viscoelastic dampers modelled by rheological models with fractional derivatives", *Journal of sound and Vibration*, 2011, Vol.330, no.5, pp.923-936.
- [11] Ansari, R., M. Faraji Oskouie, and H. Rouhi, "Studying linear and nonlinear vibrations of fractional viscoelastic Timoshenko micro-/nano-beams using the strain gradient theory", *Nonlinear Dynamics*, 2017, Vol.87, no.1, pp.695-711.
- [12] Ansari, R., M. Faraji Oskouie, F. Sadeghi, and M. Bazdid-Vahdati, "Free vibration of fractional viscoelastic Timoshenko nanobeams using the nonlocal elasticity theory", *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 2015, Vol.74, pp.318-327.

- [13] Shitikova, Marina V., Yury A. Rossikhin, and Vladimir Kandu, "Interaction of internal and external resonances during force driven vibrations of a nonlinear thin plate embedded into a fractional derivative medium", *Procedia engineering*, 2017, Vol.199, pp.832-837.
- [14] Hosseinkhani, Ali, and Davood Younesian, "Vibro-acoustic analysis of the railway tracks with fractional railpads and nonlinear ballast", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2017, Vol.17, no.09, p.1750105.
- [15] Litewka, Przemyslaw, and Roman Lewandowski, "Steady-state non-linear vibrations of plates using Zener material model with fractional derivative", *Computational Mechanics*, 2017, Vol.60, no.2, pp.333-354.
- [16] Rossikhin, Yury A., Marina V. Shitikova, and Basem Ajarmah, "Numerical analysis of non-linear vibrations of a fractionally damped cylindrical shell under the conditions of combinational internal resonance", In *MATEC Web of Conferences*, 2018, Vol.148, p.03006., EDP Sciences.
- [17] Oskouie, M. Faraji, R. Ansari, and F. Sadeghi, "Nonlinear vibration analysis of fractional viscoelastic Euler—Bernoulli nanobeams based on the surface stress theory", *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2017, Vol.30, no.4, pp.416-424.
- [18] Li, Lei, and Qi-chang Zhang, "Nonlinear dynamic analysis of electrically actuated viscoelastic bistable microbeam system", *Nonlinear Dynamics*, 2017, Vol.87, no.1, pp.587-604.
- [19] Lougou, Komla Gaboutou, Hakim Boudaoud, El Mostafa Daya, and Lahcen Azrar, "Vibration modeling of large repetitive sandwich structures with viscoelastic core", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2016, Vol.23, no.4, pp.458-466.
- [20] Javadi, M., M. A. Noorian, and Saied Irani, "Primary and secondary resonances in pipes conveying fluid with the fractional viscoelastic model", *Meccanica*, 2019, Vol.54, no.14, pp.2081-2098.
- [21] Lewandowski, Roman, and Marcin Baum, "Dynamic characteristics of multilayered beams with viscoelastic layers described by the fractional Zener model", *Archive of Applied Mechanics*, 2015, Vol.85, no.12, pp.1793-1814.
- [22] He, X. Q., M. Rafiee, S. Mareishi, and K. M. Liew, "Large amplitude vibration of fractionally damped viscoelastic CNTs/fiber/polymer multiscale composite beams", *Composite Structures*, 2015, Vol.131, pp.1111-1123.
- [23] Li, Changpin, and Fanhai Zeng, "Numerical methods for fractional calculus", *CRC Press*, 2015, Vol.24.
- [24] Farokhi, Hamed, and Mergen H. Ghayesh, "Size-dependent parametric dynamics of imperfect microbeams", *International Journal of Engineering Science*, 2016, Vol.99, pp.39-55.

پی نوشت:

-
1. Kelvin Voigt fractional viscoelastic model
 2. Modified Couple Stress Theory
 3. Hamilton's principle
 4. Fractional Calculus
 5. Di- Lorenzo
 6. Maxwell model
 7. Creep
 8. Cajic
 9. Srivastava
 10. Amabili
 11. Harmonic- Balance
 12. Bahraini
 13. Yi Tang

-
14. The Method of Multiple Scale
 15. Permoon
 16. Airy stress function
 17. Sub-harmonic Resonance
 18. Super-harmonic Resonance
 19. Zener
 20. Labelled line elementless method
 21. Lewandowski
 22. Pawlak
 23. Modified strain gradient theory
 24. Length- scale
 25. Internal Resonance
 26. Rossikhin
 27. Predictor-corrector
 28. Melnikov
 29. Baum
 30. Fractional Zener Model
 31. Modified Couple Stress Theory
 32. micro stress tensor
 33. symmetric rotation gradient tensor
 34. Length-scale parameter
 35. Caputo
 36. Epoxy