

روش‌های تخمین سفتی درگیری در چرخ‌دنده‌های ساده

مریم قصاب‌زاده سریزدی

استادیار

پژوهشکده فناوری خودرو، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

mghsaryazdi@aut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۰/۰۶

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۷/۲۵

چکیده

مطالعه رفتار دینامیکی و ارتعاشی چرخ‌دنده‌ها به منظور کنترل ارتعاش، نوفه و پایش وضعیت بسیار اهمیت دارد. سفتی درگیری^۱ یکی از مهم‌ترین عوامل تحریک ارتعاشی در سیستم چرخ‌دنده است و تحقیقات زیادی جهت تخمین آن انجام شده است. سفتی درگیری تحت اثر انعطاف‌پذیری دندانه‌ها و با تغییر موقعیت خط تماس، به صورت تناوبی تغییر می‌کند. سفتی درگیری به سه روش تحلیلی، تجربی و عددی محاسبه می‌شود. کاربرد روش‌های تجربی محدود و دقت آنها مناسب نیست. اکثر روش‌های تجربی، سفتی درگیری را در حالت استاتیکی اندازه‌گیری می‌کنند. دقت روش‌های تحلیلی و المان محدود به دقت مدل هندسی وابسته است. به دلیل پیچیدگی منحنی اینولوت دندانه، ایجاد یک مدل هندسی دقیق بسیار سخت است. این مقاله تحقیقات مرتبط با تخمین سفتی درگیری را مرور می‌کند و عوامل مؤثر بر آن را معرفی می‌نماید.

واژگان کلیدی: چرخ‌دنده ساده، سفتی درگیری، ارتعاش

۱. مقدمه

سرعت ماشین‌آلات، تحلیل دینامیکی چرخ‌دنده‌ها از اهمیت بیشتری برخوردار می‌شود. سیستم چرخ‌دنده با اهداف متفاوتی مانند تخمین عمر، تعیین ظرفیت انتقال بار، تعیین توزیع بار، طراحی، عیب‌یابی و پایش وضعیت، بررسی قابلیت اطمینان و کنترل ارتعاش و نوفه مدل‌سازی می‌شود. ارتعاشات چرخ‌دنده در اثر منابع خارجی مانند نوسانات گشتاور و سرعت ورودی و در اثر منابع داخلی مانند تغییرات تناوبی سفتی درگیری و خطای انتقال^۲ ایجاد می‌شود.

سیستم‌های چرخ‌دنده با هدف انتقال توان، تغییر گشتاور، تغییر سرعت دورانی و در بعضی موارد تغییر جهت دوران در صنایع مختلف مانند صنعت خودرو، روباتیک، هوافضا، تجهیزات و ماشین‌آلات کشاورزی، صنعت باد (توربین‌های بادی) و سیستم‌های کنترلی مورد استفاده قرار می‌گیرند. با توجه به گستردگی کاربرد چرخ‌دنده‌ها در صنایع مختلف، مدل‌سازی سیستم‌های چرخ‌دنده همواره یکی از موضوعات مورد توجه محققان است. با افزایش تقاضا برای افزایش

خطای انتقال به عنوان یکی از مشخصه‌های مهم پاسخ دینامیکی سیستم چرخ‌دنده معرفی می‌گردد که به‌طور مستقیم نشان‌دهنده ارتعاش و نوفه است [۱]. به همین دلیل مطالعه خطای انتقال در اکثر تحقیقات مرتبط با دینامیک چرخ‌دنده، مورد توجه قرار می‌گیرد. خطای انتقال برابر است با اختلاف بین موقعیت واقعی چرخ‌دنده خروجی با موقعیت آن در شرایط درگیری ایده‌آل [۲]. تغییرات سفتی درگیری از عوامل ایجاد خطای انتقال است. اگر خطای انتقال در سرعت‌های پایین محاسبه یا اندازه‌گیری شود، به نام خطای انتقال استاتیکی و اگر در سرعت‌های بالا محاسبه یا اندازه‌گیری شود، به نام خطای انتقال دینامیکی شناخته می‌شود.

با توجه به اینکه خطای انتقال، تحت اثر مستقیم تغییرات سفتی درگیری است، تخمین سفتی درگیری از موضوعات مهم در مطالعه دینامیک و ارتعاش چرخ‌دنده است، زیرا تغییرات آن باعث تحریک پارامتری سیستم چرخ‌دنده می‌شود. لازم به ذکر است فرایند درگیری در چرخ‌دنده‌ها بسیار پیچیده و توضیح آن بسیار سخت است [۳]، به همین دلیل محاسبه سفتی درگیری پیچیده‌ترین موضوع در دینامیک چرخ‌دنده است [۴].

مطالعه مسائل مرتبط با دینامیک چرخ‌دنده‌ها از صد سال پیش آغاز شده و اولین بار توسط لویز و باکینگهام در دو مقاله مجزا مطرح شد [۵]. در این مدل‌ها سفتی درگیری را ثابت در نظر گرفتند. در سال ۱۹۵۰ تاپلین سفتی درگیری متغیر را معرفی کرد [۱]. کرنل در سال ۱۹۸۳، از فرمول‌های مقاومت مصالح برای محاسبه تغییر شکل دندانه استفاده کرد. او اثر خمش و برش دندانه، تماس هر تاز و انعطاف‌پذیری محل اتصال دندانه به بدنه را در تغییر شکل در نظر گرفت [۱].

در مدل‌های اولیه، سفتی درگیری را ثابت یا قطعه قطعه خطی در نظر می‌گرفتند. در این مدل‌ها سفتی درگیری را با استفاده از روابط مقاومت مصالح و به‌صورت تحلیلی محاسبه

می‌کردند. در مطالعات بعدی روش‌هایی مانند المان محدود و انجام تست برای تخمین سفتی درگیری پیشنهاد گردید. در این مقاله ابتدا سفتی درگیری تعریف و روش‌های تخمین سفتی درگیری معرفی می‌شود. سپس کارهای تحقیقاتی که با استفاده از روش تحلیلی، المان محدود و تجربی سفتی درگیری را تخمین زده‌اند، بررسی می‌گردند.

۲. سفتی درگیری

سفتی درگیری، ناشی از انعطاف‌پذیری دندانه‌های درگیر دو چرخ‌دنده است. استفاده از سفتی درگیری ثابت، از نقطه نظر مطالعه رفتار کلی دینامیکی ارزشمند است و تخمین خوبی از فرکانس‌های تشدید و اثرات آنها بر عملکرد انتقال گشتاور می‌دهد. ولی زمانی که موضوع اصلی تحقیق، بررسی نویز و ارتعاش سیستم چرخ‌دنده است، لازم است تغییرات سفتی درگیری در نظر گرفته شود. سفتی درگیری با دوران چرخ‌دنده‌ها و تغییر موقعیت خط تماس تغییر می‌کند.

جابه‌جایی و تغییر شکل دندانه در اثر تغییر شکل خمشی، برشی، محوری، تغییر شکل تماسی (محلی) و جابه‌جایی محل اتصال دندانه به بدنه ایجاد می‌شود. جابه‌جایی دندانه به مقدار گشتاور انتقالی و موقعیت خط تماس وابسته است.

با توجه به نسبت تماس دو چرخ‌دنده، تعداد جفت دندانه درگیر در یک سیکل درگیری تغییر می‌کند. شکل ۱ مناطق مختلف درگیری را در امتداد پروفیل دندانه نشان می‌دهد. تغییر در تعداد جفت دندانه درگیر (در نقاط بالاترین^۳ و پایین‌ترین نقطه تماس^۴) باعث تغییر ناگهانی سفتی درگیری می‌گردد. شکل ۲ تغییرات سفتی درگیری یک جفت چرخ‌دنده ساده را در یک سیکل درگیری نشان می‌دهد. در این شکل سفتی درگیری بر اساس روابط ارائه شده توسط کانگ و یانگ [۶] محاسبه شده است.

تماسی و ... بر حسب هندسه و جنس ارائه می‌شود. به کمک این روابط، سفتی یک دندانه بر حسب موقعیت خط تماس محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{K_{st}} = \frac{1}{K_b} + \frac{1}{K_s} + \frac{1}{K_a} + \frac{1}{K_h} + \frac{1}{K_{rim}} \quad (1)$$

که در آن اندیس‌های a, s, b, h به ترتیب مربوط به جابه‌جایی خمشی، برشی، محوری، تماسی و جابه‌جایی بدنه است.

با فرض اینکه دو دندانه درگیر، مشابه دو فنر سری عمل می‌کنند، سفتی درگیری در منطقه‌ای که یک جفت دندانه درگیر است (شکل ۲)، از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{K_m} = \frac{1}{K_{st1}} + \frac{1}{K_{st2}} \quad (2)$$

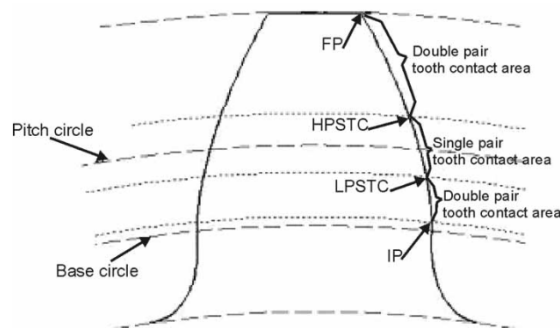
که در آن K_{sti} سفتی دندانه چرخ‌دنده نام در نقطه درگیری است. در منطقه‌ای که دو جفت دندانه درگیر است، سفتی درگیری از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$K_m = K_{m1} + K_{m2} \quad (3)$$

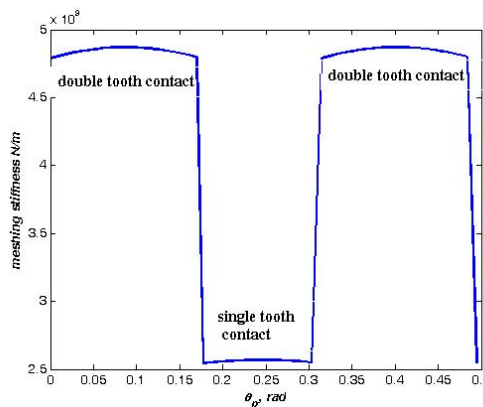
که در آن K_{m1} و K_{m2} به ترتیب سفتی درگیری جفت دندانه اول و دوم است.

در تحقیقات انجام شده به‌منظور محاسبه جابه‌جایی، دندانه به‌صورت تیر مستطیلی، دوزنقه، مثلثی یا شکل‌های هندسی پیچیده‌تر مدل شده است. دقت روش تحلیلی به دقت مدل هندسی تیر وابسته است. در بعضی از تحقیقات ابتدایی از تغییر شکل ریشه دندانه (محل اتصال به بدنه)، انعطاف‌پذیری بدنه و یا سفتی تماسی صرف‌نظر شده است. در حال حاضر مدل تحلیلی کامل که همه فاکتورهای مؤثر را با دقت بالا در نظر بگیرد موجود نیست.

هانگ و همکاران [۸] دندانه چرخ‌دنده ساده را به‌صورت تیر تیموشینکو با مقطع متغیر مدل کردند و با استخراج معادلات حرکت، ماتریس سفتی تماسی را با در نظر گرفتن ارتعاش



شکل ۱. مناطق مختلف درگیری [۷]



شکل ۲. تغییرات سفتی درگیری بر حسب زاویه دوران چرخ‌دنده (مدول ۵ میلی‌متر، تعداد دندانه هر دو چرخ‌دنده ۱۸)

در شرایط واقعی، خطاهای ساخت و نصب مانند خطای پروفیل، خطای گام، خروج از مرکز و نامیزانی باعث می‌شود که سفتی درگیری نسبت به شرایط ایده‌آل متفاوت باشد.

۳. روش‌های تخمین سفتی درگیری

روش‌هایی که برای تخمین سفتی درگیری استفاده می‌شوند را می‌توان به سه دسته تقسیم‌بندی نمود:

۱. روش تحلیلی
۲. روش المان محدود
۳. روش تجربی

۳-۱. روش تحلیلی

در روش‌های تحلیلی، به کمک روابط مقاومت مصالح و یا روش‌های انرژی جابه‌جایی دندانه محاسبه می‌شود. در این روش فرمول‌هایی برای محاسبه جابه‌جایی خمشی، برشی،

در این مقاله فرض می‌شود سفتی تماسی ثابت است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۹]:

$$K_h = \frac{\pi EW}{4(1-u^2)} \quad (5)$$

که در آن E مدول یانگ، u ضریب پواسون و W عرض چرخ‌دنده است. تغییر شکل محل اتصال دندانه به بدنه از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

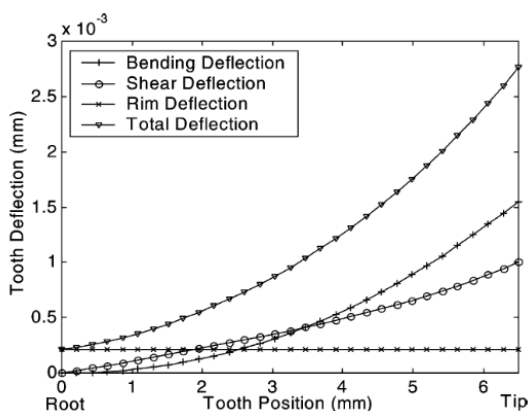
$$\delta_{rim} = \frac{F(\cos \alpha_1)^2}{WE} [c_1 d_1^2 + c_2 d_1 + c_3 (\tan \alpha_1)^2 + c_4] \quad (6)$$

d_1 در شکل ۳ مشخص شده است. روابط لازم برای محاسبه ضرایب c_i در مرجع [۹] آمده است.

یشیلیورت و همکاران [۱۰] به منظور صحت‌سنجی نتایج آزمایش مودال، به روش تحلیلی سفتی دندانه را تخمین زدند. در این تحقیق از تغییر شکل محوری و تماسی صرف‌نظر و سفتی دندانه در اثر خمش، برش و تغییر شکل بدنه محاسبه شده است. تغییر شکل بدنه از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۱۰]:

$$\delta_{rim} = \frac{12F_t L_t^2}{EWh_t} \quad (7)$$

که در آن F_t نیروی مماسی، h_t ضخامت دندانه در محل ریشه و L_t طول دندانه است.



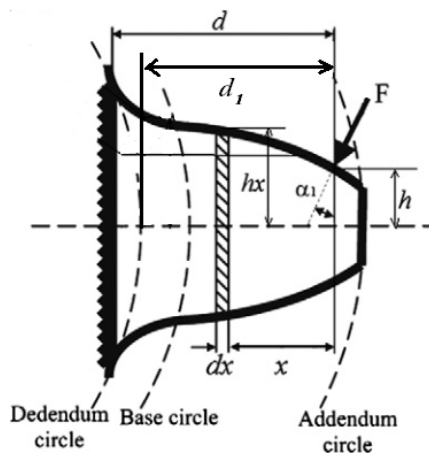
شکل ۴. تغییر شکل دندانه چرخ‌دنده ساده (مدول ۳ میلی‌متر و تعداد دندانه ۳۰) [۱۰]

طولی و خمشی محاسبه نمودند. در این مقاله اثر اتصال دندانه به بدنه، با یک فنر مدل می‌شود. ضریب سفتی این فنر با این فرض محاسبه می‌شود که بدنه یک جسم نیم‌صفحه الاستیک است. همچنین سفتی تماسی که ناشی از تغییر شکل محلی در نقطه درگیری است، از روابط تحلیلی غیرخطی محاسبه می‌شود.

چن و شائو [۹] با هدف مطالعه اثر ترک بر پاسخ دینامیکی سیستم چرخ‌دنده و ردیابی آن، سفتی درگیری را با استفاده از روش انرژی محاسبه کردند. سفتی خمشی، برشی و محوری به ترتیب از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_b} &= \int_0^d \frac{(x \cos \alpha_1 - h \sin \alpha_1)^2}{EI_x} dx \\ \frac{1}{K_s} &= \int_0^d \frac{1.2 \cos \alpha_1}{GA_x} dx \\ \frac{1}{K_a} &= \int_0^d \frac{(\sin \alpha_1)^2}{EA_x} dx \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن A_x و I_x به ترتیب سطح مقطع و ممان اینرسی دندانه است. پارامترهای هندسی d ، h و α_1 در شکل ۳ مشخص شده‌اند.



شکل ۳. مدل دندانه به صورت تیر یک‌سرگردار با مقطع متغیر [۹]

$$\delta_L(P) = \frac{2(1-u^2)}{\pi E} P \left[\ln \left(\frac{h}{L} + \sqrt{1 + \left(\frac{h}{L} \right)^2} \right) - \frac{u}{1-u} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{h}{L} \right)^2} - 1 \right) \right] \quad (8)$$

که در آن P شدت بار است و L از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$L = \sqrt{\frac{4}{\pi} \left(\frac{1-u_1^2}{E_1} + \frac{1-u_2^2}{E_2} \right) P \rho} \quad (9)$$

و

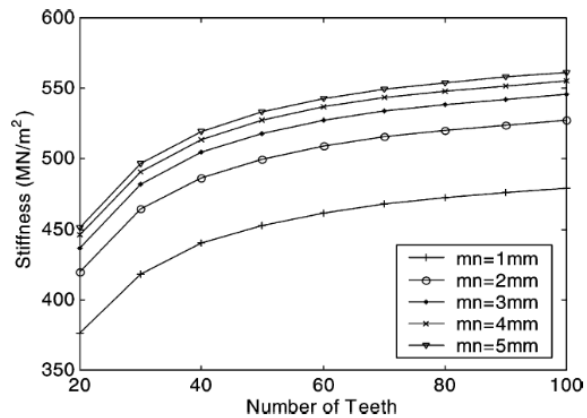
$$\rho = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (10)$$

لازم به ذکر است که تغییر شکل محلی و در نتیجه سفتی تماسی رابطه غیرخطی با هندسه منطقه تماس و گشتاور دارد ولی در بسیاری از مقالات به منظور ساده کردن محاسبات، سفتی درگیری را ثابت فرض می‌کنند.

در روش‌های تحلیلی، جابه‌جایی یک دندانه به کمک روابط ریاضی محاسبه و سپس سفتی یک دندانه محاسبه می‌شود. با ترکیب سفتی دندانه‌های درگیر، سفتی درگیری به دست می‌آید. دقت این روش به دقت روابط ریاضی و فرضیات مربوط به شکل هندسی دندانه وابسته است و سفتی درگیری را به صورت استاتیکی محاسبه می‌کند. مزیت این روش این است که برای تخمین سفتی درگیری، فرمول صریح ریاضی به دست می‌آید و به راحتی می‌توان اثر پارامترهای مختلف را بر سفتی درگیری مطالعه نمود.

۲-۳. روش المان محدود

استفاده از مدل‌های المان محدود برای تخمین سفتی درگیری بسیار رایج است. اولین مرحله در این روش، ایجاد مدل هندسی مناسب است به طوری که پروفیل دندانه و اتصال آن به بدنه چرخ‌دنده به درستی مدل شود. خطا در



شکل ۵. سفتی یک دندانه بر حسب تعداد دندانه چرخ‌دنده ساده به ازای مقادیر مختلف مدول [۱۰]

شکل ۴ تغییر شکل دندانه را بر حسب موقعیت خط تماس در اثر برش، خمش و تغییر شکل بدنه نشان می‌دهد. تغییر شکل بدنه ثابت است و به موقعیت خط تماس وابسته نیست. تغییر شکل خمشی و برشی با تغییر موقعیت خط تماس از ریشه به نوک دندانه افزایش می‌یابد.

شکل ۵ تغییرات سفتی یک دندانه را بر حسب تعداد دندانه‌های چرخ‌دنده ساده و به ازای مقادیر مختلف مدول نشان می‌دهد. با افزایش تعداد دندانه، سفتی افزایش می‌یابد زیرا شکل منحنی اینولوت به تیر مخروطی نزدیک می‌شود و تغییر شکل خمشی دندانه کاهش می‌یابد. افزایش مدول نیز باعث کاهش تغییر شکل بدنه و افزایش سفتی دندانه می‌شود.

رینکون و همکاران [۲] تغییر شکل محلی را با استفاده از رابطه *Weber-Banashek* برای مسئله دو بعدی محاسبه کردند. در این مقاله جابه‌جایی یک نقطه روی سطح دندانه نسبت به نقطه‌ای که در عمق h قرار دارد، با فرض کرنش صفحه‌ای از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

شکل هندسی دندان، منجر به خطا در تخمین سفتی درگیری خواهد شد.

مقالات ارائه شده در این زمینه، به دو روش سفتی درگیری را محاسبه کرده‌اند. در روش اول، فقط یک چرخ‌دنده مدل می‌شود و سفتی یک دندان بر حسب زاویه دوران یا موقعیت خط تماس محاسبه می‌گردد و سپس با ترکیب سفتی دو دندان، سفتی درگیری محاسبه می‌شود.

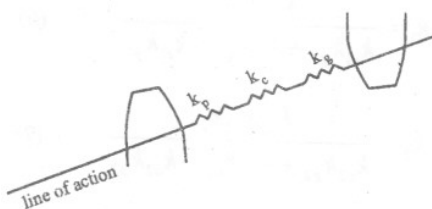
در روش دوم هر دو چرخ‌دنده همزمان و با استفاده از المان‌های تماس^۵ مدل و از روش شبه استاتیک استفاده می‌شود. بعد از محاسبه سفتی درگیری در یک موقعیت، چرخ‌دنده به صورت یک جسم صلب دوران می‌کند و در هر موقعیت جدید دوباره سفتی درگیری محاسبه می‌گردد. در هر موقعیت درگیری، منطقه تماس بین دندانه‌های درگیر مشخص می‌شود. در این منطقه باید از المان‌های ریز استفاده کرد تا نتایج، دقت کافی داشته باشند. به همین دلیل زمان محاسبات با استفاده از مدل المان محدود تماس، نسبت به سایر روش‌ها بیشتر است.

در مدل‌سازی چرخ‌دنده می‌توان از مدل دو بعدی یا سه بعدی استفاده نمود. در مدل دو بعدی از تغییرات نیروی تماس در امتداد عرض چرخ‌دنده صرف‌نظر و سفتی درگیری بر واحد عرض چرخ‌دنده محاسبه می‌شود. تفاوت مدل‌های المان محدود در مقالات مختلف، در مدل کردن کل چرخ‌دنده، بخشی از چرخ‌دنده و یک دندان است.

کارپات و همکاران [۱۱] یک برنامه کامپیوتری برای شبیه‌سازی بار دینامیکی چرخ‌دنده ساده توسعه دادند. این برنامه بار دینامیکی، خطای انتقال استاتیکی و گشتاور انتقالی را محاسبه می‌کند. معادلات حرکت با در نظر گرفتن نیروی تماسی و نیروی اصطکاک استخراج می‌شوند. به منظور محاسبه نیروی تماسی در هر موقعیت درگیری، سفتی درگیری توسط مدل المان محدود محاسبه و به عنوان ورودی استفاده می‌شود. در این مقاله به کمک مدل دو بعدی چرخ‌دنده با سه دندان متوالی، سفتی یک دندان محاسبه

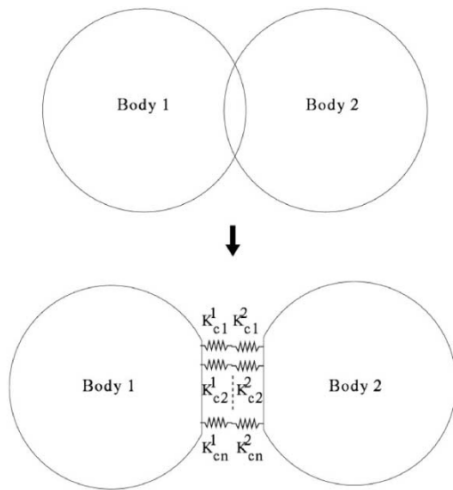
می‌شود. نیرو در امتداد خط تماس به ترتیب در ۵ نقطه وارد و سفتی دندان محاسبه می‌شود. اندازه‌ها مش‌ها طوری در نظر گرفته شده است که تغییر شکل‌های تماس هرگزین هم از تحلیل المان محدود قابل محاسبه باشد. پس از محاسبه سفتی یک دندان با استفاده از روابط ۱ و ۲، سفتی درگیری محاسبه می‌شود.

افوورک [۱۲] سفتی درگیری چرخ‌دنده ساده را با استفاده از مدل دو بعدی المان محدود تخمین زدند. در این مقاله فقط یک چرخ‌دنده مدل و از اثرات سفتی بدنه چرخ‌دنده صرف‌نظر شده است. با اعمال نیرو به دندان در موقعیت‌های مختلف، جابه‌جایی آن در راستای خط تماس محاسبه و در نهایت سفتی یک دندان محاسبه می‌شود. در این مقاله سفتی تماسی از رابطه ۴ محاسبه می‌شود. با در نظر گرفتن سه فنر سری در نقطه تماس دو چرخ‌دنده که به ترتیب معرف سفتی دندان پینیون، سفتی تماسی و سفتی چرخ‌دنده هستند (شکل ۶)، سفتی درگیری از روابط ۱ و ۲ محاسبه می‌شود.



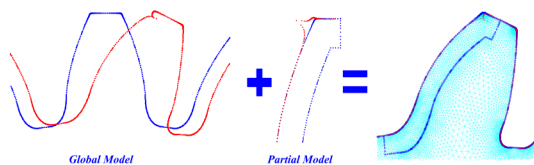
شکل ۶. فنرهای سری در امتداد خط تماس [۱۲]

دورعلی و سربزدی [۱۳] سفتی درگیری چرخ‌دنده ساده را با استفاده از مدل المان محدود سه بعدی تخمین زدند. در این تحقیق هر یک از چرخ‌دنده‌ها به صورت مجزا مدل می‌شوند. دندان به صورت یک میدان کاپاسیتیو^۶ فرض و ماتریس نرمی^۷ آن محاسبه می‌شود. در محاسبه ماتریس نرمی، فنرهای مجازی در نودهای مشخصی روی پروفیل دندان در نظر گرفته و فرض می‌شود که پایه این فنرها به هم متصل هستند و یک میدان کاپاسیتیو را تشکیل می‌دهند. ماتریس نرمی به کمک تحلیل المان محدود برای هر چرخ‌دنده



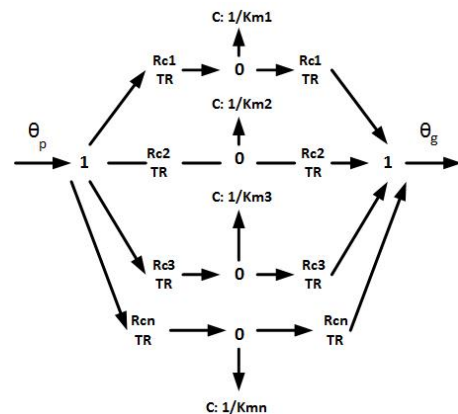
شکل ۸. روش شبه تداخل [۱]

رینکون و همکاران [۲] نیروی تماس و تغییر شکل چرخ‌دنده ساده را محاسبه کردند. در این تحقیق تغییر شکل کلی (جابه‌جایی دندانه در اثر خمش و برش) از تحلیل المان محدود دو بعدی و تغییر شکل محلی نزدیک سطح تماس از روابط تئوری هرتر محاسبه می‌گردد. در تحلیل المان محدود، با اعمال نیروی واحد در یک موقعیت مشخص از یک دندانه، جابه‌جایی تمام نقاط سطح آن دندانه و دندانه مجاور محاسبه و به کمک آن ماتریس نرمی دندانه به دست می‌آید. سپس سفتی دندانه در هر موقعیت خط تماس محاسبه می‌شود. به منظور حذف اثرات بار متمرکز، مدل المان محدود بخشی از سطح دندانه مطابق شکل ۹ تحلیل و با اثر مدل کامل چرخ‌دنده جمع می‌شود.



شکل ۹. ترکیب تغییر شکل مدل کلی و مدل محلی [۲]

محاسبه می‌شود. سپس به کمک روش بانداگراف (شکل ۷) سفتی درگیری و توزیع نیروی تماس برای هر موقعیت تماس محاسبه می‌شود. مزیت این روش این است که تحلیل‌های المان محدود بدون مدل تماس انجام می‌شود و از نظر حجم محاسبات و زمان صرفه‌جویی می‌شود. سریزدی و دورعلی [۷] بر اساس روش ارائه شده در مقاله قبل، اثر اندازه ترک سه بعدی در ریشه دندانه را بر سفتی درگیری و توزیع نیروی تماس برای دو حالت درگیری ایده‌آل و درگیری با وجود نامیزانی بررسی کردند.



شکل ۷. مدل بانداگراف محاسبه سفتی درگیری [۱۳]

پیمسارن [۱] با ارائه روشی جدید سفتی درگیری و نیروی تماس را محاسبه کرده است. این روش ۲۰۰۰ بار سریع‌تر از مدل المان محدود تماس است و به نام روش تخمین سفتی بر مبنای تداخل^۸ معرفی شده است. در این روش ابتدا سطح تداخل دو جسم با فرض صلب بودن محاسبه می‌شود (شکل ۸). سپس با تعریف فنرهای مجزا در نقاط تماس، سفتی درگیری محاسبه می‌شود. ماکزیمم سفتی مربوط به فنری است که در موقعیت آن، ماکزیمم تداخل رخ می‌دهد. فرض می‌شود سفتی سایر فنرها به نسبت میزان تداخل به تداخل ماکزیمم با ماکزیمم سفتی تناسب دارد. ماکزیمم سفتی به صورت نسبت نیرو به جابه‌جایی تعریف و از تحلیل المان محدود محاسبه می‌شود.

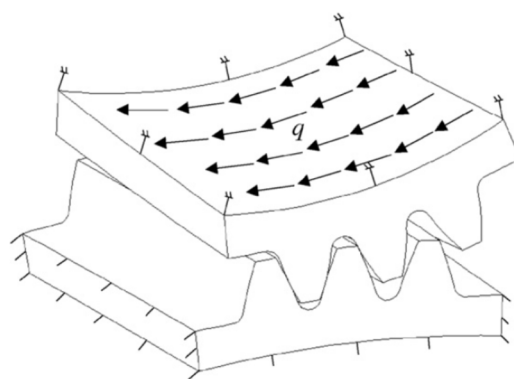
هی و همکاران [۱۴] تغییر شکل زاویه‌ای جفت دندانه درگیر را با استفاده از مدل استاتیکی المان محدود تماس محاسبه کردند و سپس سفتی درگیری را از رابطه زیر تخمین زدند:

$$K_m = \frac{N(t)}{R_b \theta(t)} \quad (11)$$

که در آن N نیروی تماسی (عمود بر دندانه)، R_b شعاع دایره مبنا و θ تغییر شکل زاویه‌ای است.

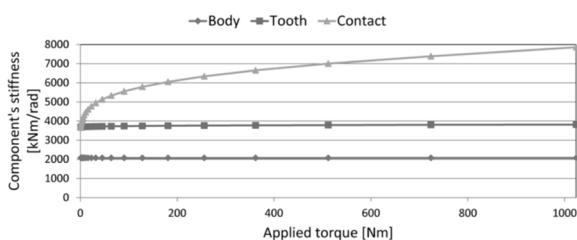
لین و همکاران [۱۵] به منظور تحلیل مسئله تماس و برخورد چرخ‌دنده‌ها از مدل سه بعدی المان محدود استفاده کردند. در این تحقیق با تعریف مختصات مرجع کلی و به کمک روابط هندسی، مدل سه بعدی چرخ‌دنده ایجاد و موقعیت خط تماس تعیین می‌شود. در این تحقیق، مدل المان محدود سه بعدی، شامل سه دندانه متوالی از پینیون و چرخ‌دنده است و فرض شده در مقطع برش، جابه‌جایی و دوران گره‌ها صفر است (شکل ۱۰). سفتی درگیری در حالت استاتیکی تحت اثر بار برشی که به سطح داخلی چرخ‌دنده وارد می‌شود، محاسبه می‌گردد. بعد از محاسبه سفتی درگیری در یک موقعیت درگیری مشخص، با فرض صلب بودن چرخ‌دنده‌ها، موقعیت بعدی خط تماس تعیین می‌شود.

در این مقاله یک برنامه مدل‌سازی توسعه داده شده است که تمام مراحل را به صورت اتوماتیک انجام می‌دهد.



شکل ۱۰. شرایط مرزی و بارگذاری مدل چرخ‌دنده با سه دندانه [۱۵]

یک‌بوش و همکارانش [۱۶] سفتی درگیری پیش‌پیشی چرخ‌دنده ساده را به کمک مدل پارامتری دو و سه بعدی المان محدود محاسبه کردند. مدل سه بعدی با هدف تحقیق در مورد بهبودهای سطح دندانه^۹ توسعه داده شده است. در این تحقیق دو چرخ‌دنده به‌طور کامل مدل و محل تماس دندانه‌ها با دقت مش‌بندی می‌شود. تحلیل‌ها به روش شبه استاتیک انجام می‌گردد. برای هر موقعیت تماس سفتی درگیری محاسبه و با فرض صلب بودن دو چرخ‌دنده، موقعیت بعدی خط تماس تعیین و تحلیل‌ها تکرار می‌شود. سفتی درگیری پیش‌پیشی به‌صورت نسبت گشتاور به خطای انتقال تعریف می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که سفتی درگیری با تغییر گشتاور تغییر می‌کند. گرچه سفتی دندانه و بدنه ثابت است ولی سفتی تماسی به‌صورت غیرخطی با گشتاور تغییر می‌کند (شکل ۱۱). با توجه به نتایج تحلیل‌های المان محدود، در این مقاله روابط ریاضی برای محاسبه سفتی دندانه، سفتی بدنه و سفتی تماسی پیشنهاد شده است که به کمک آنها می‌توان سفتی درگیری را با دقت خوبی محاسبه نمود. نتایج حالت خاص نشان می‌دهد که روابط ریاضی پیشنهاد شده و مدل المان محدود، ماکزیمم ۱۰ درصد اختلاف دارند.

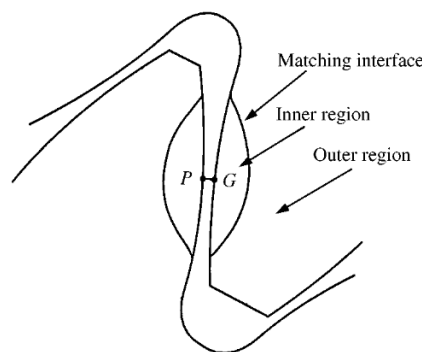


شکل ۱۱. تأثیر گشتاور بر سفتی دندانه، بدنه و سفتی تماسی

(نسبت تبدیل: ۱، تعداد دندانه: ۲۳ و مدول: ۶، جنس: فولاد) [۱۶]

پارکر [۱۷] پاسخ دینامیکی غیرخطی یک جفت چرخ‌دنده ساده را با استفاده از مدل المان محدود به ازای محدوده وسیعی از تغییرات دور و گشتاور محاسبه نمود. در این تحقیق از مدل دو بعدی چرخ‌دنده استفاده شده است. مشخصه اصلی مدل این است که به کمک تحلیل منطقه تماس در هر گام

زمانی، نیروی درگیری محاسبه می‌شود. در نزدیکی سطح تماس از یک مدل نیمه تحلیلی و دور از آن از مدل المان محدود استفاده و سپس نتایج این دو مدل در سطح اشتراک، بر هم منطبق می‌شوند (شکل ۱۲). به این ترتیب تحلیل‌ها از نظر محاسباتی مقرون به صرفه خواهد شد.



شکل ۱۲. منطقه تماس متناظر با دو نقطه P و G ، حل نیمه تحلیلی در منطقه داخلی و حل المان محدود در منطقه خارجی [۱۷]

در روش مدل المان محدود، دقت نتایج به مدل هندسی و اندازه المان‌ها وابسته است. در این روش می‌توان چرخ‌دنده را به صورت کامل مدل نمود یا برای صرفه‌جویی در زمان، فقط سه دندان متوالی را مدل کرد. گرچه مدل کردن همزمان دو چرخ‌دنده، نتایج دقیق‌تری می‌دهد ولی هزینه آن زیاد است.

در صورتی که مدل المان محدود کامل باشد، نتایج به دست آمده دربرگیرنده تمام عوامل موثر بر سفتی درگیری است ولی اثر پارامترهای مختلف بر سفتی درگیری قابل تشخیص نیست. علاوه بر این با تغییر مشخصات چرخ‌دنده‌های درگیر، مدل‌سازی و تحلیل‌ها باید تکرار شود.

۳-۳. روش‌های تجربی

تحقیقات انجام شده به منظور تخمین سفتی درگیری به روش تجربی، محدود هستند زیرا تأیید نتایج تجربی بسیار سخت است. به دلیل سفتی بالای دندان‌ها (حدوداً از مرتبه 10^7 N/m)، نیروی بسیار بزرگی باید به چرخ‌دنده وارد شود

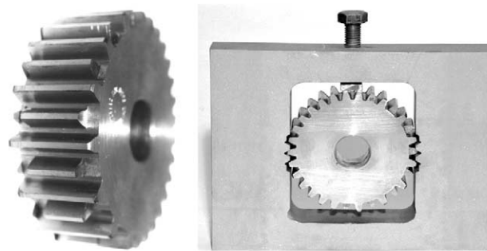
تا تغییر شکل دندان قابل اندازه‌گیری باشد. در این شرایط، سایر تجهیزات آزمون نیز تغییر شکل می‌دهند و مبنایی برای اندازه‌گیری تغییر شکل وجود نخواهد داشت.

با توجه به رابطه مستقیم خطای انتقال و سفتی درگیری، اندازه‌گیری خطای انتقال یکی از روش‌های تجربی برای تخمین سفتی درگیری است. مانرو [۱۸] با انجام آزمون استاندارد پشت به پشت چرخ‌دنده^{۱۰}، خطای انتقال را به ازای مقادیر مختلف بار وارد به چرخ‌دنده، اندازه‌گیری و دامنه و متوسط خطای انتقال را محاسبه نمود. سپس با مقایسه داده‌های تجربی و روابط تئوری، سفتی درگیری را تخمین زده است.

به کمک آزمون مودال می‌توان سفتی دندان را تخمین زد. توجه به این نکته ضروری است که به دلیل بالا بودن فرکانس طبیعی، اندازه‌گیری سفتی به سادگی امکان‌پذیر نیست. تحقیقات انجام شده با این روش، اثر سایش را بر کاهش سفتی درگیری بررسی کرده‌اند. یشیلیورت [۱۰] کاهش سفتی درگیری را در اثر سایش با انجام آزمایش مودال تخمین زد.

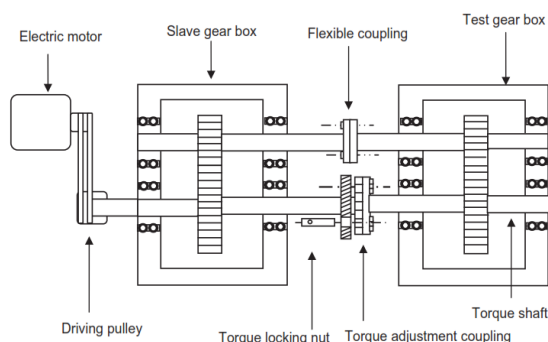
در این مقاله ابتدا سفتی یک دندان با روابط تحلیلی - تقریبی محاسبه می‌شود. همچنین فرکانس اول یک دندان با مدل کردن آن به صورت ترکیبی از تیرهای پله‌ای با استفاده از روش انرژی ریلی محاسبه می‌گردد. برای انجام آزمایش مودال، مطابق شکل ۱۳، چرخ‌دنده در یک قاب ثابت می‌شود و پیچ بالایی به آن پیش بار وارد می‌کند. با تحریک مجموعه توسط چکش، پاسخ فرکانسی اندازه‌گیری می‌شود. استفاده از این مجموعه باعث اضافه شدن جرم به نوک دندان و کاهش فرکانس طبیعی می‌شود، به طوری که در محدوده قابل اندازه‌گیری قرار می‌گیرد. عیب سایش باعث جابه‌جا شدن قله پاسخ فرکانسی می‌شود. پاسخ فرکانسی از آزمایش به ازای مقادیر مختلف سایش اندازه‌گیری و با پاسخ‌های به دست آمده از تئوری مقایسه و اثر سایش بر سفتی درگیری تخمین

زده می‌شود. واضح است که این تست برای چرخ‌دنده دوار قابل استفاده نیست.



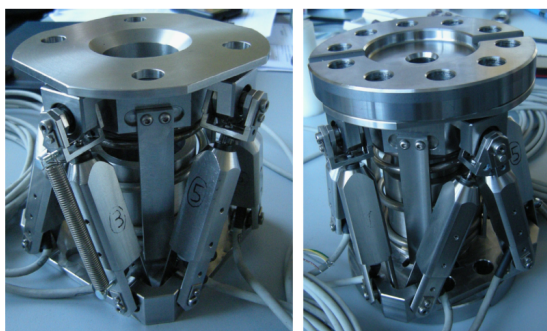
شکل ۱۳. آزمون مودال یک چرخ‌دنده [۱۰]

آمارنات و همکاران [۱۹] نیز برای بررسی اثر سایش بر سفتی درگیری از روش پیشنهادی مرجع [۱۰] استفاده کردند. در این تحقیق همچنین اثر ضخامت فیلم روغن و دمای آن بر سایش چرخ‌دنده بررسی می‌شود. بدین منظور از آزمون استاندارد پشت به پشت چرخ‌دنده استفاده و با تسریع فرایند سایش و اندازه‌گیری پاسخ فرکانسی، اثر شدت سایش بر پاسخ فرکانسی بررسی می‌گردد. شکل ۱۴ اجزای اصلی و چیدمان آنها را در آزمون پشت به پشت نشان می‌دهد. در این تحقیق بعد از هر ۱۸ ساعت، آزمون متوقف و چرخ‌دنده مورد نظر تحت آزمون مودال (شکل ۱۳) قرار می‌گیرد و به کمک روابط تئوری، کاهش سفتی دندانه در اثر سایش محاسبه می‌شود.



شکل ۱۴. آزمون پشت به پشت چرخ‌دنده [۲]

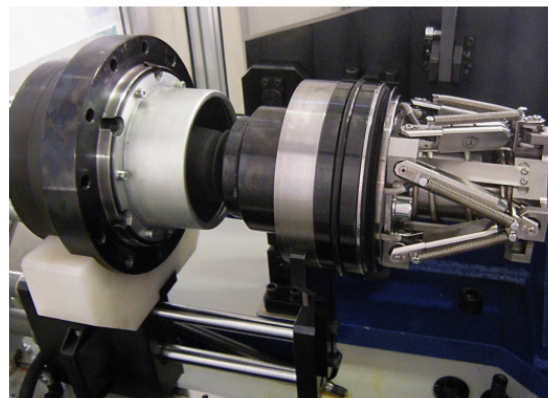
با اندازه‌گیری تغییر شکل دندانه در اثر نیرو، به‌طور مستقیم سفتی دندانه را می‌توان تخمین زد. کورا به کمک یک روبات شش‌پایی، تغییر شکل زاویه‌ای دندانه‌های یک جفت چرخ‌دنده ساده داخلی را که در کولپینگ هزارخاری استفاده می‌شود، اندازه‌گیری کرد. روبات طراحی شده برای انجام آزمایش در شکل ۱۵ نشان داده شده است و شکل ۱۶ بخشی از مجموعه آزمون را نشان می‌دهد. تغییر شکل‌های اندازه‌گیری شده از آزمایش با نتایج المان محدود و روابط تئوری، مقایسه و تأیید شدند. در مدل تئوری از مدل گسسته‌تر و روابط کلاسیک استفاده شده است. در این مقاله اثر نامیزانی زاویه‌ای روی سفتی درگیری نیز با انجام آزمایش بررسی شد [۲۰].



شکل ۱۵. روبات شش‌پایی [۲۰]

در همه تحقیقاتی که به‌منظور تخمین سفتی درگیری از روش تجربی استفاده می‌کنند، علاوه بر داده‌های تجربی، لازم است از روش‌های تحلیلی یا عددی نیز استفاده شود. به‌عبارت دیگر ترکیبی از روش تجربی و تحلیلی یا عددی برای تخمین سفتی درگیری استفاده می‌شود. این روش‌ها به اندازه‌گیری خطای انتقال، تست مودال و اندازه‌گیری تغییر شکل زاویه‌ای خلاصه می‌شوند. دو روش آخر در حالت استاتیکی سفتی درگیری را اندازه‌گیری می‌کنند.

برشی، تماسی و جابه‌جایی محل اتصال دندانه به بدنه ایجاد می‌شود. با تغییر موقعیت خط تماس و تغییر تعداد جفت دندانه درگیر، سفتی درگیری به صورت تناوبی تغییر می‌کند. در روش تحلیلی سفتی یک دندانه بر حسب موقعیت خط تماس محاسبه و سپس سفتی درگیری به کمک روابط ترکیب فنرها، تخمین زده می‌شود. در روش المان محدود، به‌منظور تخمین سفتی درگیری از مدل‌های دو یا سه بعدی و مدل یک چرخ‌دنده یا مدل دو چرخ‌دنده با المان‌های تماس استفاده می‌شود. اندازه‌گیری سفتی درگیری به دلیل بالا بودن مقادیر سفتی دندانه، کار ساده‌ای نیست. در تحقیقات تجربی با اندازه‌گیری خطای انتقال و استفاده از نتایج شبیه‌سازی تئوری، سفتی درگیری تخمین زده می‌شود. همچنین از نتایج آزمون مودال یک چرخ‌دنده، اثر سایش بر کاهش سفتی درگیری قابل بررسی است.



شکل ۱۶. تجهیزات اندازه‌گیری سفتی چرخ‌دنده با روبات شش‌پایی [۲۰]

۴. نتیجه‌گیری

تغییرات سفتی درگیری یکی از منابع اصلی ایجاد ارتعاش و نوفه در سیستم‌های چرخ‌دنده است. سفتی درگیری ناشی از انعطاف‌پذیری دندانه است و در اثر تغییر شکل خمشی،

۵. مأخذ

- [1] Pimsarn, M., K. Kazerounian, "Efficient Evaluation of Spur Gear Tooth Mesh Load Using Pseudo-Interference Stiffness Estimation Method." *Mechanism and Machine Theory*, vol.37, 2000, pp.769-786.
- [2] Rincon, A.F.d., et al., "A Model for the Study of Meshing Stiffness in Spur Gear Transmissions." *Mechanism and Machine Theory*, vol.61, 2013, pp. 30-59.
- [3] Kiekbusch, T., I. Howard, "A Common Formula for the Combined Torsional Mesh Stiffness of Spur Gears." *5th Australasian Congress on Applied Mechanics, ACAM 2007: Australia*.
- [4] Parker, R.G., S.M. Vijayakar, T. Imajo, "Non-Linear Dynamic Response of a Spur Gear Pair: Modelling and Experimental Comparisons." *Journal of Sound and Vibration*, vol.237, no.3, 2000, pp.435-456.
- [5] Hu, W., Z. Chen, "A Multi-Mesh MPM for Simulating the Meshing Process of Spur Gears." *Computers and Structures*, vol.81, 2003, pp.1991-2003.
- [6] Kaung, J.H., Y.T. Yang, "An Estimation of Mesh Stiffness and Load Sharing Ratio of a Spur Gear Pair." *International Power Transmission and Gearing Conference, 1992, ASME*.
- [7] Saryazdi, M.Gh, M. Durali, "The effect of three-dimensional crack growth on the force distribution and meshing stiffness of a spur gear: ideal and misaligned contacts." *Proc. IMechE Part C: J. Mechanical Engineering Science*, vol.223, 2009, pp.1633-1645.
- [8] Huang, K.J., T.S. Liu, "Dynamic Analysis of a Spur Gear by the Dynamic Stiffness Method." *Journal of Sound and vibration*, vol.234, no.2, 2000, pp.311-330.

- [9] Chen, Z., Y. Shao, "Dynamic Simulation of Spur Gear with Tooth Root Crack Propagating Along Tooth Width and Crack Depth." *Engineering Failure Analysis*, vol.18, 2011, pp.2149-2166.
- [10] Yesilyurt, I., F.Gu, A.D. Ball, "Gear Tooth Stiffness Reduction Measurement Using Modal Analysis and its Use in Wear Fault Severity Assessment of Spur Gears." *NDT & E International*, vol.36, 2003, pp.357-372.
- [11] Karpat, F., et al., "A Computer Program for Dynamic Load Simulation of Spur Gears with Asymmetric and Symmetric Teeth." *World Journal of Mechanics*, vol.2, 2012, pp.239-245.
- [12] Afework, Y., T. Tesfaye, "Variable Mesh Stiffness of Spur Gear Teeth Using Finite Element Method." *Journal of EEA*, vol.23, 2006, pp.59-67.
- [13] Durali M, Saryazdi MG. "Three Dimensional Calculation of Meshing Stiffness for Spur Gears." In *ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference 2005 Jan 1* (pp. 869-873). American Society of Mechanical Engineers.
- [14] He, S., T. Rook, R. Singh, "Construction of Semi analytical Solutions to Spur Gear Dynamics Given Periodic Mesh Stiffness and Sliding Friction Functions." *Journal of Mechanical Design*, vol.130, 2008, pp.1-9.
- [15] Lin, T., H. Ou., R. Li, "A Finite Element Method for 3D Static and Dynamic Contact/Impact Analysis of Gear Drives." *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, vol.196, 2007, pp.1716-1728.
- [16] Kiekbusch, T., et al., "Calculation of the Combined Torsional Mesh Stiffness of Spur Gears with Two- and Three-Dimensional Parametrical FE Models." *Journal of Mechanical Engineering*, vol.57, no.11, 2011, pp.810-828.
- [17] Parker, R. G., S.M. Vijayakar., T. Imajo, "Non-Linear Dynamic Response of a Spur Gear Pair: Modelling and Experimental Comparisons." *Journal of Sound and vibration*, vol.237, no.3, 2000, pp.435-455.
- [18] Munro, R.G., D. Palmer, L. Morrish, "An Experimental Method to Measure Gear Tooth Stiffness throughout and Beyond the Path of Contact." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C*, vol.215, 2001, pp.793-804.
- [19] Amarnath, M., C. Sujatha, and S. Swarnamani, "Experimental Studies on the Effects of Reduction in Gear Tooth Stiffness and Lubricant Film Thickness in a Spur Geared System." *Tribology International*, vol.42, 2009, pp.340-352.
- [20] Cura, F., A. Mura, "Experimental Procedure for the Evaluation of Tooth Stiffness in Spline Coupling Including Angular Misalignment." *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol.40, 2013, pp.545-555.

1. Meshing Stiffness
2. Transmission Error
3. Highest Point Single Tooth Contact (HPSTC)
4. Lowest Point Single Tooth Contact (LPSTC)
5. Contact Elements
6. Capacitive Fields
7. Compliance Matrix
8. Pseudo-Interference Stiffness Estimation (PISE)
9. Tooth Face Modification
10. Back to Back Arrangement