مقاله پژوهشی

تحلیل دوشاخگی نانولوله‌های کربنی دو جداره حامل سیال تحت اثر نیروهای غیرخطی واندروالس

رضا ابراهیمی*

استادیار گروه مهندسی مکانیک

دانشگاه یاسوج

rebrahimi@yu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۴/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۷/۲۲

چکیده

در سال‌های اخیر، نانولوله‌های کربنی دو جداره برای کاربردهای صنعتی مختلف از جمله فناوری جداسازی و تصفیه به‌کار گرفته شده‌اند. بنابراین هدف اصلی این مقاله، تحلیل رفتار دوشاخگی نانولوله‌های کربنی دو جداره حامل سیال با درنظر گرفتن نیروهای غیرخطی واندروالس است. جریان سیال داخل لوله، به‌صورت نوسانی درنظر گرفته شده است. براساس تئوری فون‌کارمن و مدل تیر اویلر - برنولی معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت با استفاده از اصل همیلتون به‌دست آمده است. معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حرکت، به‌وسیله روش مودهای فرضی گسسته‌سازی و با روش عددی رانگ – کوتا حل شده‌اند. سپس اثرات سرعت جریان و فرکانس نوسانات جریان روی رفتار دینامیکی سیستم، با استفاده از نمودارهای دوشاخگی، دیاگرام‌های فاز، پاسخ زمانی و نقشه‌های پوانکاره بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که سرعت جریان و فرکانس نوسانات جریان اثرات قابل‌ملاحظه‌ای بر پاسخ‌های دینامیکی سیستم دارند. همچنین نتایج تحلیل، رفتارهای غیرخطی متنوعی را از جمله حرکات تناوبی، چندتناوبی و آشوبناک آشکار می‌کنند که می‌تواند راهکارهایی را به محققان در رابطه با طراحی و مطالعه این سیستم‌ها در آینده بدهد.

واژگان کلیدی: نانولوله کربنی دو جداره، دوشاخگی، جریان نوسانی، ارتعاشات غیرخطی، برهم‌کنش سیال- سازه

۱. مقدمه

نانولوله‌های کربنی از صفحات کربن به ضخامت یک اتم و به شکل استوانه توخالی ساخته می‌شوند. اتم‌های کربن در نانولوله‌های کربنی با پیوند کوالانسی به هم متصل شده‌اند لذا استحکام کششی و مدول یانگ بسیار بالایی را از خود نشان می‌دهند.

خواص ویژه و منحصربه‌فرد نانولوله‌های کربنی، منجر به استفاده از آنها در بسیاری از کاربردهای صنعتی شده است.

امروزه نانولوله‌های کربنی برای کاربردهای متنوعی از جمله دستگاه‌های میکروالکترونیک [۱]، دارورسانی [۲]، استحکام‌دهی کامپوزیت‌ها [۳] و تصفیه آب [۴] مورد بررسی قرار می‌گیرند.

نانولوله‌های کربنی به دو دسته تک جداره و چند جداره تقسیم می‌شوند. نانولوله کربنی تک جداره، فقط از کربن با یک ساختار ورقه‌ای از شش ضلعی‌های منتظم تشکیل شده است. تولید نانولوله‌های تک جداره دارای هزینه بالایی است و تولید به همراه پایدار کردن خصوصیات آنها در حین فراوری پلیمر نانولوله، مشکل است. از طرفی به‌خاطر در دسترس بودن و تجاری بودن نانولوله‌های کربنی چند جداره نیز، پیشرفت‌های زیادی در این زمینه صورت گرفته است. استفاده از نانولوله‌های کربنی در کاربردهای متعدد ذکر شده، مستلزم بررسی رفتار ارتعاشی آنها است.

یون و همکاران [۵] اثر انتشار موج را در نانولوله‌های کربنی مورد مطالعه قرار دادند. نتایج نشان می‌دهد هنگامی‌که فرکانس موج کمتر از اولین فرکانس طبیعی سیستم است، انتشار موج می‌تواند با مدل تیر اویلر - برنولی توصیف شود. درصورتی‌که فرکانس موج نزدیک یا بالاتر از اولین فرکانس طبیعی سیستم باشد، پارامترهای اینرسی دورانی و برشی مدل تیموشنکو تأثیر قابل‌ملاحظه‌ای روی سرعت موج دارند.

یون و همکاران [۶] در مطالعه دیگری، ارتعاشات نانولوله‌های کربنی دو جداره کوتاه را مورد مطالعه قرار داده‌اند. در مدل آنها به‌خاطر اینکه اثرات اینرسی دورانی و تغییر شکل‌های برشی برای مودهای مرتبه بالا لحاظ گردد، از مدل تیر تیموشنکو استفاده شده است. نیروی واندروالسی بین دو نانولوله به‌صورت خطی درنظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که تغییر شکل‌های برشی و اینرسی دورانی اثر قابل‌ملاحظه‌ای روی نانولوله‌های کربنی دو جداره با نسبت ابعادی کم دارند. همچنین درصورتی‌که فقط اولین فرکانس طبیعی مدنظر باشد، مدل اویلر — برنولی نیز می‌تواند از دقت لازم برخوردار باشد.

زو و همکاران [۷] ارتعاشات آزاد یک نانولوله کربنی دو جداره را با درنظر گرفتن نیروهای بین لایه‌ای غیرخطی واندروالس مطالعه کرده‌اند. در این مطالعه نانولوله‌های کربنی داخلی و خارجی براساس تئوری مکانیک محیط‌های پیوسته کلاسیک، به‌عنوان دو تیر الاستیک مجزاء مدل شده‌اند. نتایج برای دو نسبت ابعادی (نسبت طول به قطر خارجی) ۱۰ و ۲۰ به‌ازای شرایط تکیه‌گاهی مختلف به‌دست آمده است. روش بالانس هارمونیک به‌کار گرفته شده است تا ارتباط بین دامنه تغییر شکل و فرکانس را تحلیل نماید. نتایج نشان داد که فرکانس‌های طبیعی سیستم هم‌محور در شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده، به‌ترتیب ۶ برابر و ۲/۸ برابر شرایط تکیه‌گاهی کنسولی هستند. همچنین هنگامی‌که دامنه تغییر شکل‌ها بیشتر از ۲۲٪ شعاع نانولوله خارجی است، نیروهای واندروالسی اثر قابل‌ملاحظه‌ای را روی فرکانس‌های سیستم دارند.

لی و کاردومیتس [۸] مشخصات ارتعاشی یک نانولوله کربنی چند جداره قرار گرفته در یک محیط الاستیک را مورد مطالعه قرار داده‌اند. آنها نانولوله کربنی را به‌صورت یک پوسته استوانه‌ای درنظر گرفتند. بنابراین در این مدل سه نوع مود شعاعی، محوری و محیطی می‌تواند برانگیخته شود. معادلات براساس تئوری الاستیسیته غیرمحلی استخراج شدند. نتایج نشان داد که نیروهای واندروالسی اثر قابل‌ملاحظه‌ای روی فرکانس‌های طبیعی مودهای شعاعی دارند. ضمن اینکه با افزایش سختی محیط الاستیک اطراف لوله، فرکانس‌های طبیعی شعاعی افزایش می‌یابد.

وانگ و همکاران [۹] ارتعاشات و ناپایداری کمانشی یک نانولوله کربنی دو جداره حامل سیال را با محیط الاستیک اطراف نانولوله مطالعه نمودند. آنها نشان دادند که فرکانس‌های رزونانس به سرعت جریان سیال وابسته است. علاوه‌بر این گزارش شد که شدت اثر سرعت جریان روی فرکانس‌های سیستم، به ثابت فنری محیط الاستیک اطراف لوله و نسبت لاغری لوله‌ها وابسته است.

کوانگ و همکاران [۱۰] به تحلیل اثر غیرخطی‌های هندسی و غیرخطی‌های ناشی از نیروی واندروالس روی ارتعاشات نانولوله‌های کربنی دو جداره حامل سیال پرداخته‌اند. معادلات حرکت با درنظر گرفتن تئوری مکانیک محیطهای پیوسته کلاسیک استخراج شده است. با به‌کارگیری روش هارمونیک بالانس، هر دو اثر غیرخطی روی رفتار ارتعاشی سیستم بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که با درنظر گرفتن هر دو عامل غیرخطی، کوپلینگ ارتعاشات طولی و عرضی، اثر ناچیزی روی منحنی دامنه – فرکانس دارد. اما درصورتی‌که فقط اثر عامل غیرخطی هندسی درنظر گرفته شود، کوپلینگ ارتعاشات طولی و عرضی اثر قابل‌ملاحظه‌ای را روی منحنی دامنه – فرکانس نشان می‌دهد.

مایوف و هاوا [۱۱] رفتار آشوبناک یک نانولوله کربنی تک جداره منحنی شکل را تحت نیروی هارمونیک عرضی، مطالعه نمودند. نتایج، نشان‌دهنده وجود دوشاخگی‌هایی در پاسخ دینامیکی سیستم بود که به رفتار آشوبناک سیستم منتهی می‌شود.

نانولوله‌های کربنی ممکن به‌عنوان کانال‌های ملکولی برای انتقال نانوذراتی مثل آب یا پروتون به‌کار گرفته شوند. در این کاربردها، نانولوله‌های کربنی ممکن است در معرض بارهای عرضی متحرکی قرار گیرند که منجر به ارتعاشات عرضی در آنها شود [۱۲ و ۱۳]. براین‌اساس سیمسک [۱۴] ارتعاشات اجباری یک نانولوله کربنی تک جداره با تکیه‌گاه ساده را در معرض بار هارمونیک متحرک، مورد مطالعه قرار داده است. در این مطالعه معادله دیفرانسیل حرکت بر مبنای تئوری تیر اویلر – برنولی و الاستیسیته غیرمحلی استخراج شده است. پاسخ‌های حوزه زمانی با استفاده از روش آنالیز مودال و انتگرال‌گیری مستقیم به‌دست آمده‌اند. تأثیر نسبت اندازه، سرعت و فرکانس تحریک بار متحرک روی پاسخ‌های دینامیکی سیستم بحث شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که تغییر شکل‌های دینامیکی به‌دست آمده از حل‌های غیرمحلی، بزرگتر از حل‌های کلاسیک متناظرشان هستند. برای مقادیر زیاد سرعت بار متحرک، تغییر شکل‌های دینامیکی، صرف‌نظر از فرکانس‌های تحریک، به سمت صفر میل می‌کند.

در برخی از سیستم‌های الکترومکانیکی، سرعت جریان داخل لوله ثابت نبوده و به‌صورت هارمونیک تغییر می‌کند. برای این منظور، لیانگ و سو [۱۵] به تحلیل پایداری یک نانولوله تک جداره حامل سیال ویسکوز و جریان پالسی پرداخته‌اند. در این تحلیل، نواحی پایداری در نمودارهای دامنه – فرکانس مشخص شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که افزایش پارامتر ویسکوز، سرعت بحرانی جریان را افزایش می‌دهد و وقوع تشدید اساسی سیستم را به تأخیر می‌اندازد. همچنین نیروی کششی محوری می‌تواند فقط روی فرکانس‌های طبیعی سیستم اثرگذار باشد.

برخی از موارد به‌کارگیری نانولوله‌های کربنی در سنسورها و تحریک‌کننده‌ها، ایجاب می‌کند که فرکانس‌های رزونانس این نانولوله‌ها با اعمال نیروهای الکترواستاتیکی کنترل شده‌ای تغییر نماید [۱۶]. این نیروی الکترواستاتیکی با وارد کردن یک ولتاژ به الکترود قرار گرفته در فاصله مشخصی از نانولوله، ایجاد می‌شود. از طرفی به‌خاطر شکل غیرخطی نیروی الکترواستاتیکی، نانولوله ممکن است رفتار دینامیکی پیچیده‌ای از خود نشان دهد. براین‌اساس سو و یونیس [۱۷] دینامیک غیرخطی یک نانولوله کربنی تحت نیروهای الکترواستاتیکی را بررسی کرده‌اند. در مدل آنها فرم پیچیده نیروی الکترواستاتیکی به کمک جملات محدودی از سری تیلور به فرم ساده‌تر تبدیل شده است. در نهایت با به‌کارگیری مدل تیر اویلر – برنولی و روش گالرکین، پاسخ دینامیکی و استاتیکی سیستم به‌دست آمده است. هو و همکاران [۱۸] یک مدل دینامیکی غیرخطی را برای میکرولوله‌های کنسولی (شرایط تکیه‌گاهی یک سر گیردار یک سر آزاد) حامل سیال، براساس نظریه تنش کوپل ارائه کردند. در این مدل معادله دیفرانسیل پاره‌ای حرکت با استفاده از روش همیلتون استخراج و با به‌کارگیری روش گالرکین گسسته‌سازی گردیده است.

سپس اثر غیرخطی‌های هندسی، وزن، لقی تکیه‌گاه و سرعت سیال روی رفتار دینامیکی سیستم بررسی شده است. نتایج، حاکی از آن است هنگامی‌که مقیاس طول افزایش می‌یابد، سرعت جریان بحرانی نیز بزرگتر می‌شود. ضمن اینکه میکرولوله کنسولی حامل جریان در حالت آویزان، در مقایسه با حالت افقی دارای سرعت جریان بحرانی بالاتری است.

عسکری و اسماعیل‌زاده [۱۹] مدلی را برای ارتعاشات اجباری نانولوله کربنی حامل سیال با درنظر گرفتن اثر حرارتی و بستر غیرخطی ارائه کردند. معادلات حرکت حاکم بر سیستم با فرض تئوری تیر اویلر – برنولی استخراج شده‌اند. روش تحلیلی مقیاس‌های چندگانه برای حل معادلات حرکت به‌کار گرفته شده است. اثر پارامترهای مختلف از جمله سرعت جریان سیال، تغییرات دمایی، شرایط مرزی مختلف و سختی بستر الاستیک روی تشدید اولیه سیستم بررسی شده است. نتایج تأیید می‌کند که پارامترهای فوق، اثر قابل‌ملاحظه‌ای روی رفتار سیستم داشته و می‌توانند به‌عنوان پارامترهای کنترلی برای ارتعاشات نانولوله‌های کربنی حامل سیال، استفاده شوند. ضمن اینکه سرعت بحرانی سیال در لوله با افزایش دما افزایش می‌یابد.

رمضان‌نژاد آذربنی و عدالت‌پناه [۲۰] مدلی از یک نانولوله کربنی را بر روی بستر ویسکوالاستیک، تحت میدان ترمومغناطیسی ارائه نمودند. نتایج نشان داد که فرکانس خطی نانولوله با درنظر گرفتن میدان مغناطیسی افزایش می‌یابد. همچنین رفتار آشوبناک سیستم می‌تواند با افزایش میدان مغناطیسی و کاهش تغییرات دما حذف شود.

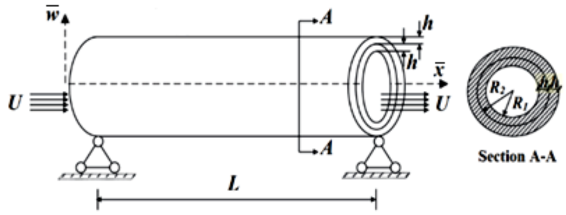
میاندوآب [۲۱] رفتار غیرخطی یک نانولوله کربنی تک جداره تحت نیروی الکترواستاتیک را براساس تئوری گرادیان کرنشی بررسی نموده است. نتایج نشان داد که بسته به مقدار ولتاژ تحریک، اثر اندازه می‌تواند حرکت آشوبناک در پاسخ نانولوله را تغییر دهد.

با توجه به جمع‌بندی مطالعات صورت گرفته، تحقیقات پیشین با به‌کارگیری روش‌های تحلیلی مثل مقیاس‌های زمانی چندگانه یا هارمونیک بالانس و ارائه منحنی‌های دامنه – فرکانس، می‌توانند راهکارهایی را برای تحلیل پاسخ فرکانسی و سرعت‌های بحرانی نانولوله‌های کربنی ارائه دهند. اما بررسی رفتار دوشاخگی و نامنظم نانولوله‌های کربنی دو جداره حامل سیال با درنظر گرفتن غیرخطی‌های هندسی، غیرخطی ناشی از نیروهای واندروالس و کوپلینگ ارتعاشات طولی – عرضی، مسئله‌ای است که تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. لذا پیش‌بینی رفتار دوشاخگی آنها می‌تواند از اهمیت خاصی برخوردار باشد.

در این تحقیق مدل‌سازی نانولوله کربنی دو جداره حامل سیال با درنظر گرفتن کوپلینگ ارتعاشات طولی – عرضی، اثرات غیرخطی‌های هندسی و غیرخطی ناشی از نیروهای واندروالسی انجام شده است. سپس معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر این مدل استخراج گردیده‌اند. پس از بی‌بعد کردن این معادلات با معرفی پارامترهای مناسب، گسسته‌سازی آنها با روش مودهای فرضی انجام شده است. در ادامه تأثیر فرکانس نوسانات جریان سیال و سرعت جریان سیال روی رفتار سیستم، مورد ارزیابی قرار گرفته است. برای این کار از ابزارهایی مانند نمودارهای دوشاخگی، دیاگرام‌های صفحه فاز و منحنی‌های پاسخ زمانی سیستم استفاده شده است.

۲. فرمول‌بندی و تعریف مسئله

در شکل ۱ مدل نانولوله کربنی دو جداره حامل سیال نشان داده شده است. لوله داخلی دارای شعاع R_1 و لوله خارجی دارای شعاع R_2 است. طول، ضخامت و مدول الاستیسیته هر کدام از لوله‌ها به‌ترتیب L، h و E هستند. در لوله داخلی سیالی با جرم بر واحد طول m_f و سرعت U جریان دارد. برای مدل نانولوله دو جداره، در دو طرف تکیه‌گاه‌های ساده درنظر گرفته شده است. در این مدل‌سازی از ارتعاشات پیچشی لوله‌ها چشم‌پوشی شده است. حرکت دو لوله به‌وسیله نیروهای غیرخطی واندروالسی در راستای عرضی به هم کوپل می‌گردد. همچنین کوپلینگ ارتعاشات طولی و عرضی در هر دو لوله، لحاظ گردیده است.



شکل ۱. مدل نانولوله دو جداره حامل سیال

براساس تئوری تیر اویلر – برنولی و روابط کرنش – جابه‌جایی فون‌کارمن[۱]، میدان جابه‌جایی و روابط کرنش – جابه‌جایی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\hat{u}_i(\bar{x},\bar{z},t) = \bar{u}_i(\bar{x},t) - \bar{z}\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \bar{x}}$$
$$\hat{w}_i(\bar{x},\bar{z},t) = \bar{w}_i(\bar{x},t) \qquad (۱)$$
$$\varepsilon_i = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \bar{x}})^2 - \bar{z}\frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial \bar{x}^2}$$

که x مختصات طولی، t زمان، $\bar{u}_i$ مؤلفه جابه‌جایی طولی لوله iام در امتداد محور $\bar{x}$ روی تار خنثی، $\bar{w}_i$ مؤلفه جابه‌جایی عرضی لوله iام در امتداد محور $\bar{z}$ روی تار خنثی، $\hat{u}_i$ مؤلفه کلی جابه‌جایی طولی لوله iام در امتداد محور x، $\hat{w}_i$ مؤلفه کلی جابه‌جایی عرضی لوله iام در امتداد محور $\bar{z}$ و ε_i کرنش کلی لوله iام هستند. اندیس i=1 و i=2 به‌ترتیب مربوطه به لوله داخلی و خارجی هستند. معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیستم با به‌کارگیری اصل همیلتون به‌دست آورده می‌شوند. برای این کار لازم است که عبارت‌های مربوط به انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی سیستم مشخص گردند. انرژی پتانسیل V و انرژی جنبشی T یک نانولوله کربنی دو جداره حامل سیال را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$V = \frac{E}{2}\int_0^L \left[\int_{A_1}(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{x}})^2 - \bar{z}\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \bar{x}^2})^2\, dA + \int_{A_2}(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \bar{x}})^2 - \bar{z}\frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \bar{x}^2})^2 dA\right] d\bar{x}$$
$$T = \frac{\rho_t}{2}\int_0^L \left\{\int_{A_1}\left[(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} - \bar{z}\frac{\partial \dot{\bar{w}}_1}{\partial \bar{x}})^2 + (\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial t})^2\right] dA + \int_{A_2}\left[(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} - \bar{z}\frac{\partial \dot{\bar{w}}_2}{\partial \bar{x}})^2 + (\frac{\partial \bar{w}_2}{\partial t})^2\right] dA\right\} d\bar{x} \qquad (۲)$$
$$+ \int_0^L \int_{A_f} \frac{\rho_f}{2}\left[(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + U\cos\theta_1)^2 + (\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial t} - U\sin\theta_1)^2 + \bar{z}^2(\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \bar{x}\partial t})^2\right] dA d\bar{x}$$

در معادلات بالا $\theta_1 = \partial \bar{w}_1 / \partial \bar{x}$ است. همچنین I_i نشان‌دهنده ممان اینرسی بر واحد طول لوله iام، m_i جرم بر واحد طول لوله iام، ρ_t چگالی جرمی لوله، ρ_f چگالی جرمی سیال داخل لوله اول، $A_1 = \pi[(R_1 + h)^2 - R_1^2]$ سطح مقطع لوله اول، $A_2 = \pi[(R_2 + h)^2 - R_2^2]$ سطح مقطع لوله دوم و $A_f = \pi R_1^2$ سطح مقطع مسیر سیال در لوله هستند.

اصل همیلتون برای یک سیستم دینامیکی به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۲۲]:

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta V - \delta T - \delta W)dt = 0 \qquad (۳)$$

که در آن δ نماد تغییرات است. لذا:

$$
\begin{aligned}
\delta V = &-EA_1\int_0^L \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x}\delta\bar{u}_1 - EA_2\int_0^L \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x}\delta\bar{u}_2 + EI_1\int_0^L \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \bar{x}^4} d\bar{x}\delta\bar{w}_1 \\
&+EI_2\int_0^L \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \bar{x}^4} d\bar{x}\delta\bar{w}_2 - EA_1\int_0^L \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{x}} d\bar{x}\delta\bar{u}_1 - EA_2\int_0^L \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \bar{x}} d\bar{x}\delta\bar{u}_2 \\
&-\frac{3EA_1}{2}\int_0^L \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \bar{x}^2}(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{x}})^2 d\bar{x}\delta\bar{w}_1 - \frac{3EA_2}{2}\int_0^L \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \bar{x}^2}(\frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \bar{x}})^2 d\bar{x}\delta\bar{w}_2 \\
&-EA_1\int_0^L (\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{x}}) d\bar{x}\delta\bar{w}_1 - EA_2\int_0^L (\frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \bar{x}}) d\bar{x}\delta\bar{w}_2 \\
\delta T = &-(m_1+m_f)\int_0^L \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial t^2} d\bar{x}\delta\bar{u}_1 - m_f\int_0^L \left(U\sin\theta_1 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \bar{x}\partial t}\right) d\bar{x}\delta\bar{u}_1 \\
&-m_2\int_0^L \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial t^2} d\bar{x}\delta\bar{u}_2 - m_2\int_0^L \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial t^2} d\bar{x}\delta\bar{w}_2 - (m_1+m_f)\int_0^L \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial t^2} d\bar{x}\delta\bar{w}_1 \\
&+(\rho_t I_1 + \rho_f I_f)\int_0^L \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \bar{x}^2\partial t^2} d\bar{x}\delta\bar{w}_1 + \rho_t I_2\int_0^L \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \bar{x}^2\partial t^2} d\bar{x}\delta\bar{w}_2 \\
&-m_f\int_0^L \left(U\sin\theta_1 \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}\partial t}\right) d\bar{x}\delta\bar{w}_1 + m_f\int_0^L \left(U\cos\theta_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t}\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \bar{x}^2}\right) d\bar{x}\delta\bar{w}_1 \\
&-2m_f\int_0^L \left(U\cos\theta_1 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \bar{x}\partial t}\right) d\bar{x}\delta\bar{w}_1 - m_f\int_0^L \left(U\sin\theta_1 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial t}\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \bar{x}^2}\right) d\bar{x}\delta\bar{w}_1
\end{aligned}
\qquad (۴)
$$

عبارت δW نیز مربوط به کار مجازی نیروهای خارجی وارد شده به سیستم است. کار مجازی، ناشی از در نظر گرفتن نیروی واندروالس بین دولوله و برهم کنش لوله اول با جریان سیال است که عبارت است از:

$$
\delta W = \int_0^L \left[P - m_f U^2 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \bar{x}^2}\cos\theta_1\right] d\bar{x}\delta\bar{w}_1 - \int_0^L m_f U^2 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \bar{x}^2}\sin\theta_1 \, d\bar{x}\delta\bar{u}_1 + \int_0^L (-P) d\bar{x}\delta\bar{w}_2 \qquad (۵)
$$

که m_f جرم بر واحد طول سیال و P نیروی واندروالس بر واحد طول است. این نیروی غیرخطی، عامل کوپلینگ ارتعاشات عرضی بین دو نانولوله کربنی است و برابر است با:

$$
P = 2R_1(\frac{\partial \Pi}{\partial \delta}) \qquad (۶)
$$

که $\prod(\delta)$ پتانسیل بین لایه‌ای بر واحد سطح در نانولوله‌های دو جداره است و برحسب فضای δ بین دو لوله به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۷]:

$$
\Pi(\delta) = K\left[\left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^4 - 0.4\left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^{10}\right] \qquad (۷)
$$

به‌طوری‌که δ_0=0.34 nm فضای بین لوله در حالت تعادل است و K=-61.665 mev/atom درنظر گرفته می‌شود. باید توجه داشت که نیروی واندروالسی یک تابع فرد از فضای بین لوله δ است و $\delta - \delta_0 = \bar{w}_2 - \bar{w}_1$. لذا بسط تیلور آن تا مرتبه چهارم برابر است با:

$$
P = \left[\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \delta^2}\bigg|_{\delta=\delta_0} (\bar{w}_2 - \bar{w}_1) + \frac{1}{6}\frac{\partial^4 \Pi}{\partial \delta^4}\bigg|_{\delta=\delta_0} (\bar{w}_2 - \bar{w}_1)^3\right] \equiv c_1(\bar{w}_2 - \bar{w}_1) + c_3(\bar{w}_2 - \bar{w}_1)^3 \qquad (۸)
$$

در ادامه کار با تعریف دو ضریب ثابت داده شده در معادله ۹ و معرفی پارامترهای بدون بعد ارائه شده در جدول ۱، چهار معادله دیفرانسیل پاره‌ای بدون بعد غیرخطی و کوپل شده حرکت سیستم استخراج می‌شوند.

$$\Omega=\frac{1}{L^2}\sqrt{\frac{EI_1}{m_1+m_f}} \qquad \omega_1=\frac{1}{L}\sqrt{\frac{EA_2}{m_2}} \tag{۹}$$

جدول ۱. پارامترهای بدون بعد

$w_1=\frac{\bar{w}_1}{R_2}$	$u_2=\frac{\bar{u}_2}{R_2}$	$u_1=\frac{\bar{u}_1}{R_2}$
$\frac{d}{d\bar{x}}=\frac{1}{L}\frac{d}{dx}$	$x=\frac{\bar{x}}{L}$	$w_2=\frac{\bar{w}_2}{R_2}$
$\lambda_1=\frac{U_0}{L\Omega}$	$\frac{d}{dt}=\Omega\frac{d}{d\tau}$	$\tau=\Omega t$
$\lambda_4=L\sqrt{\frac{A_2}{I_2}}$	$\lambda_3=L\sqrt{\frac{A_1}{I_1}}$	$\lambda_2=\frac{m_f}{m_1+m_f}$
$\alpha_2=\frac{\omega_1}{\Omega}$	$\alpha_1=\frac{R_2}{L}$	$\lambda_5=\frac{m_2}{m_1+m_f}$
$\alpha_5=\frac{c_1L^4}{EI_1}$	$\alpha_4=\frac{c_3L^4R_2^2}{EI_1}$	$\alpha_3=\frac{\rho_tI_1+\rho_fI_f}{(m_1+m_f)L^2}$
		$\alpha_6=\frac{\rho_tI_2}{m_2L^2}$

معادلات دیفرانسیل بدون بعد حرکت سیستم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2u_1}{\partial\tau^2}-\lambda_3^2\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}&-\lambda_1\lambda_2\alpha_1\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial^2w_1}{\partial x\partial\tau}(1+\mu\cos(\omega_2\tau))\\&-\lambda_1^2\lambda_2\alpha_1\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}\frac{\partial w_1}{\partial x}(1+\mu\cos(\omega_2\tau))^2\\&-\alpha_1\lambda_3^2\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}\frac{\partial w_1}{\partial x}=0\end{aligned}\tag{۱۰}$$

$$\frac{\partial^2u_2}{\partial\tau^2}-\alpha_2^2\frac{\partial^2u_2}{\partial x^2}-\alpha_1\alpha_2^2\frac{\partial^2w_2}{\partial x^2}\frac{\partial w_2}{\partial x}=0\tag{۱۱}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2w_1}{\partial\tau^2}+\lambda_1^2\lambda_2\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}(1+\mu\cos(\omega_2\tau))^2+\frac{\partial^4w_1}{\partial x^4}-\frac{3}{2}\alpha_1^2\lambda_3^2\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}(\frac{\partial w_1}{\partial x})^2\\&-\lambda_1\lambda_2\alpha_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial^2u_1}{\partial x\partial\tau}\right)(1+\mu\cos(\omega_2\tau))-\lambda_1\lambda_2\alpha_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\tau}\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}\right)(1+\mu\cos(\omega_2\tau))\\&+2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2w_1}{\partial x\partial\tau}(1+\mu\cos(\omega_2\tau))-\alpha_3\frac{\partial^4w_1}{\partial x^2\partial\tau^2}\\&-\alpha_1^2\lambda_1\lambda_2\left(\frac{\partial w_1}{\partial\tau}\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}\right)(1+\mu\cos(\omega_2\tau))\\&-\alpha_1\lambda_3^2(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2})-\alpha_4(w_2-w_1)^3-\alpha_5(w_2-w_1)=0\end{aligned}\tag{۱۲}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2w_2}{\partial\tau^2}+\frac{\alpha_2^2}{\lambda_4^2}\frac{\partial^4w_2}{\partial x^4}-\frac{3\alpha_1^2\alpha_2^2}{2}\frac{\partial^2w_2}{\partial x^2}(\frac{\partial w_2}{\partial x})^2-\alpha_1\alpha_2^2(\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial^2u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial^2w_2}{\partial x^2})\\&-\alpha_6\frac{\partial^4w_2}{\partial x^2\partial\tau^2}+\frac{\alpha_4}{\lambda_5}(w_2-w_1)^3+\frac{\alpha_5}{\lambda_5}(w_2-w_1)=0\end{aligned}\tag{۱۳}$$

در این مطالعه، سرعت U سیال ثابت نبوده و به‌صورت پالسی مطابق رابطه ۱۴ مدل شده است [۱۵]:

$$U=U_0(1+\mu\cos(\omega_2\tau))\tag{۱۴}$$

به‌طوری‌که U_0 مقدار میانگین سرعت جریان در داخل لوله، μ دامنه و ω_2 فرکانس نوسانات سرعت جریان در داخل لوله است. برای گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حرکت و تبدیل

آنها به معادلات دیفرانسیل معمولی از روش مودهای فرضی به‌صورت زیر استفاده گردیده است:

$$u_1(x,\tau)=\sum_{k=1}^{2}\phi_k(x)\beta_k(\tau)=[\Phi]^T[\beta] \tag{۱۵}$$

$$w_1(x,\tau)=\sum_{k=1}^{2}\phi_k(x)\,\eta_k(\tau)=[\Phi]^T[\eta] \tag{۱۶}$$

$$u_2(x,\tau)=\sum_{k=1}^{2}\phi_k(x)\upsilon_k(\tau)=[\Phi]^T[\upsilon] \tag{۱۷}$$

$$w_2(x,\tau)=\sum_{k=1}^{2}\phi_k(x)\zeta_k(\tau)=[\Phi]^T[\zeta] \tag{۱۸}$$

که $\phi_k(x)=C_k\sin(k\pi x)$ بیانگر توابع ویژه نرمال تیر با تکیه‌گاه‌های ساده است. پارامترهای $\beta_k(\tau)$، $\eta_k(\tau)$، $\nu_k(\tau)$ و $\zeta_k(\tau)$ نیز مختصات تعمیم یافته مربوطه هستند. پس از جای‌گذاری روابط بالا و فرایند گسسته‌سازی، هشت معادله دیفرانسیل غیرخطی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&\ddot{\beta}_1+\pi^2\lambda_3^2\beta_1+\sqrt{2}\pi^3\alpha_1(\lambda_1^2\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))^2+\lambda_3^2)\eta_1\eta_2\\&-\frac{112\sqrt{2}\pi}{15}\alpha_1\lambda_1\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))\eta_2\dot{\eta}_2\\&-\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}\alpha_1\lambda_1\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))\eta_1\dot{\eta}_1=0\end{aligned} \tag{۱۹}$$

$$\begin{aligned}&\ddot{\beta}_2+4\pi^2\lambda_3^2\beta_2+\frac{\sqrt{2}\pi^3}{2}\alpha_1(\lambda_1^2\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))^2+\lambda_3^2)\eta_1^2\\&-\frac{16\sqrt{2}\pi}{15}\alpha_1\lambda_1\lambda_2\eta_2\dot{\eta}_1(1+\mu\cos(\omega_2\tau))-\frac{16\sqrt{2}\pi}{15}\alpha_1\lambda_1\lambda_2\eta_1\dot{\eta}_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))=0\end{aligned} \tag{۲۰}$$

$$\ddot{\upsilon}_1+\pi^2\alpha_2^2\upsilon_1+\sqrt{2}\pi^3\alpha_1\alpha_2^2\zeta_1\zeta_2=0 \tag{۲۱}$$

$$\ddot{\upsilon}_2+4\pi^2\alpha_2^2\upsilon_2+\frac{\sqrt{2}\pi^3}{2}\alpha_1\alpha_2^2\zeta_1^2=0 \tag{۲۲}$$

$$\begin{aligned}&(1+\pi^2\alpha_3)\ddot{\eta}_1+\pi^2(\pi^2-\lambda_1^2\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))^2)\eta_1\\&-\frac{16}{3}\lambda_1\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))\dot{\eta}_2+\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}\alpha_1\lambda_1\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))\eta_1\dot{\beta}_1\\&+\frac{16\sqrt{2}\pi}{15}\alpha_1\lambda_1\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))\eta_2\dot{\beta}_2+\frac{32\pi^2}{15}\alpha_1^2\lambda_1\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))\eta_1\eta_2\dot{\eta}_1\\&+\frac{32\pi^2}{15}\alpha_1^2\lambda_1\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))\eta_1^2\dot{\eta}_2-\frac{512\pi^2}{105}\alpha_1^2\lambda_1\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))\eta_2^2\dot{\eta}_2\\&+\frac{3\pi^4}{4}\alpha_1^2\lambda_3^2(\eta_1^3+8\eta_1\eta_2^2)+\sqrt{2}\pi^3\alpha_1\lambda_3^2(\eta_1\beta_2+\eta_2\beta_1)-\frac{3}{2}\alpha_4(\zeta_1-\eta_1)(\eta_1^2+2\eta_2^2+\zeta_1^2\\&\qquad+2\zeta_2^2)+3\alpha_4(\zeta_1-\eta_1)(\eta_1\zeta_1+2\eta_2\zeta_2)-\alpha_5(\zeta_1-\eta_1)=0\end{aligned} \tag{۲۳}$$

$$
\begin{aligned}
&(1+4\pi^2\alpha_3)\ddot{\eta}_2+4\pi^2(4\pi^2-\lambda_1^2\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))^2)\eta_2\\
&+\frac{16}{3}\lambda_1\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))\dot{\eta}_1+\frac{16\sqrt{2}\pi}{15}\alpha_1\lambda_1\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))7\eta_2\dot{\beta}_1\\
&+\frac{16\sqrt{2}\pi}{15}\alpha_1\lambda_1\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))\eta_1\dot{\beta}_2+\frac{32\pi^2}{15}\alpha_1^2\lambda_1\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))\eta_1^2\dot{\eta}_1\\
&-\frac{512\pi^2}{105}\alpha_1^2\lambda_1\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))\eta_2^2\dot{\eta}_1+\frac{1408\pi^2}{105}\alpha_1^2\lambda_1\lambda_2(1+\mu\cos(\omega_2\tau))\eta_1\eta_2\dot{\eta}_2\\
&+6\pi^4\alpha_1^2\lambda_3^2(\eta_1^2\eta_2+2\eta_2^3)+\sqrt{2}\pi^3\alpha_1\lambda_3^2\eta_1\beta_1-\frac{3}{2}\alpha_4(\zeta_2-\eta_2)(\zeta_2^2+\eta_2^2+2\zeta_1^2+2\eta_1^2)\\
&\qquad+3\alpha_4(\zeta_2-\eta_2)(\zeta_2\eta_2+2\zeta_1\eta_1)-\alpha_5(\zeta_2-\eta_2)=0
\end{aligned}
\qquad (۲۴)
$$

$$
\begin{aligned}
&(1+\pi^2\alpha_6)\ddot{\zeta}_1+\frac{\pi^4\alpha_2^2}{\lambda_4^2}\zeta_1+\frac{3\pi^4\alpha_1^2\alpha_2^2}{4}(\zeta_1^3+8\zeta_1\zeta_2^2)+\sqrt{2}\pi^3\alpha_1\alpha_2^2(\zeta_1\upsilon_2+\zeta_2\upsilon_1)\\
&+\frac{3\alpha_4}{2\lambda_5}(\zeta_1-\eta_1)(\eta_1^2+2\eta_2^2+\zeta_1^2+2\zeta_2^2)-\frac{3\alpha_4}{\lambda_5}(\zeta_1-\eta_1)(\eta_1\zeta_1+2\eta_2\zeta_2)+\frac{\alpha_5}{\lambda_5}(\zeta_1-\eta_1)=0
\end{aligned}
\qquad (۲۵)
$$

$$
\begin{aligned}
&(1+4\pi^2\alpha_6)\ddot{\zeta}_2+\frac{16\pi^4\alpha_2^2}{\lambda_4^2}\zeta_2+6\pi^4\alpha_1^2\alpha_2^2(2\zeta_2^3+\zeta_1^2\zeta_2)+\sqrt{2}\pi^3\alpha_1\alpha_2^2\zeta_1\upsilon_1\\
&+\frac{3\alpha_4}{2\lambda_5}(\zeta_2-\eta_2)(\zeta_2^2+\eta_2^2+2\zeta_1^2+2\eta_1^2)-\frac{3\alpha_4}{\lambda_5}(\zeta_2-\eta_2)(\zeta_2\eta_2+2\zeta_1\eta_1)+\frac{\alpha_5}{\lambda_5}(\zeta_2-\eta_2)=0
\end{aligned}
\qquad (۲۶)
$$

۳. شبیه‌سازی عددی و تحلیل نتایج

در این تحقیق حل عددی معادلات ۱۹ تا ۲۶ با استفاده از روش رانگ – کوتای مرتبه چهار در نرم‌افزار متلب[۲] انجام گرفته و از خروجی آنها برای تحلیل رفتار دینامیکی سیستم استفاده شده است. برای دستیابی به خروجی دقیق از حل معادلات در حالت دائمی، تعدادی از گام‌های محاسباتی اولیه حاصل از حل عددی کنار گذاشته شده و پس از اطمینان از رسیدن به حالت دائمی، فواصل زمانی بعدی برای پردازش و تفسیر نتایج انتخاب گردیده‌اند. مقادیر عددی پارامترهای فیزیکی به‌کار رفته برای مدل‌سازی نانولوله کربنی دو جداره حامل سیال، در جدول ۲ داده شده‌اند. تحلیل رفتار غیرخطی سیستم با استفاده از ابزارهایی مانند نمودارهای دوشاخگی، دیاگرام‌های فاز و منحنی‌های پاسخ زمانی انجام شده است.

جدول ۲. مقادیر پارامترهای به‌کار رفته در مدل‌سازی نانولوله کربنی دو جداره حامل سیال

ردیف	پارامتر	نماد	مقدار
۱	چگالی جرمی سیال	ρ_f	1 gr/cm^3
۲	چگالی جرمی لوله‌ها	ρ_t	2.3 gr/cm^3
۳	ضریب مرتبه اول واندروالس	c_1	7.11×10^9 N/m^2
۴	ضریب مرتبه سوم واندروالس	c_3	2.57×10^{31} N/m^4
۵	مدول الاستیسیته نانولوله‌ها	E	1 TPa
۶	ضخامت نانولوله‌ها	h	0.34 nm
۷	شعاع داخلی	R_1	0.7 nm
۸	شعاع خارجی	R_2	1.04 nm
۹	طول نانولوله‌ها	L	40 nm
۱۰	دامنه نوسانات جریان	μ	0.8

بسیاری از تحلیل‌های ارتعاشی اعم از خطی و غیرخطی با محوریت سرعت جریان سیال در نانولوله‌های کربنی حامل سیال، انجام می‌گیرند. لذا در این قسمت، فرکانس نوسانات سرعت سیال در یک سرعت میانگین خاص افزایش داده می‌شود. شکل ۲ نمودارهای دوشاخگی پاسخ عرضی نقطه میانی نانولوله داخلی (x=0.5) را با تغییر فرکانس سیال ω_2، برای سه پارامتر سرعت میانگین بدون بعد $\lambda_1=8$، $\lambda_1=10$ و $\lambda_1=15$ نشان می‌دهد.

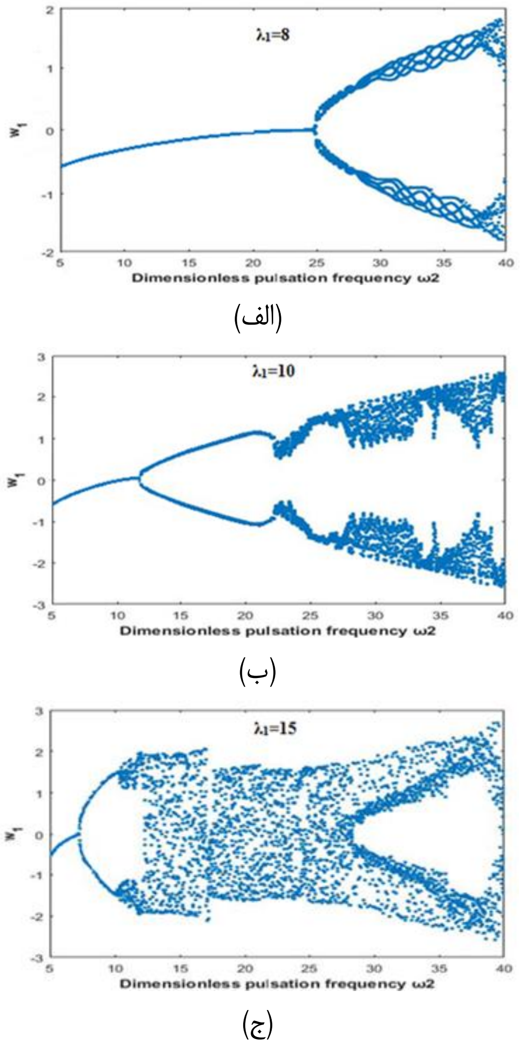
نمودارهای دوشاخگی برای شناسایی مسیر ورود به حرکت نامنظم استفاده می‌شوند. در نمودار دوشاخگی، دامنه دائمی یک سیستم غیرخطی به‌صورت تابعی از پارامتر غیرخطی سیستم ترسیم می‌شود. هنگام تغییر این پارامتر کنترلی، اگر حرکت به‌صورت زیرهارمونیک با دوره تناوب nام باشد، در هر گام مشخص، n نقطه مجزاء روی منحنی دیده خواهد شد. در نهایت اگر حرکت نامنظم باشد، ستونی از نقاط روی منحنی مشاهده می‌شود [۲۳].

به‌ازای پارامتر سرعت میانگین بدون بعد $\lambda_1=8$ حرکت تناوبی در محدوده $\omega_2=[5.0 \sim 24.9]$ قابل دستیابی است. سپس رفتار دینامیکی سیستم در $\omega_2=[25.0 \sim 37.6]$ وارد حرکت زیرهارمونیک با دوره تناوب 10T می‌شود. این حرکت چندتناوبی در $\omega_2=37.7$ وارد یک جاذب نامنظم شده و تا $\omega_2=40.0$ ادامه پیدا می‌کند.

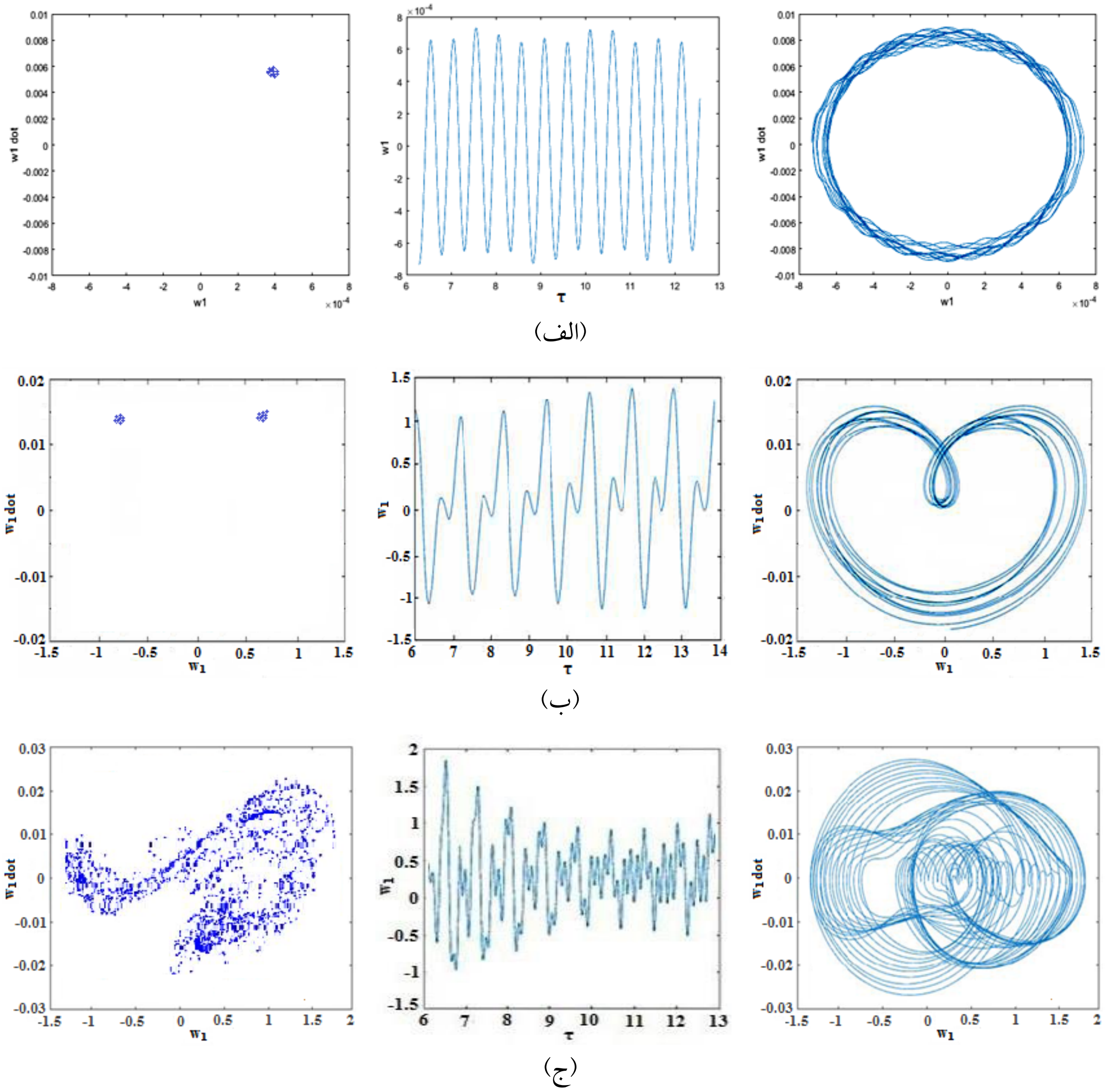
به‌ازای پارامتر سرعت میانگین بدون بعد $\lambda_1=10$ حرکت تناوبی در محدوده $\omega_2=[5.0 \sim 11.6]$ قابل دستیابی است. سپس رفتار دینامیکی سیستم در $\omega_2=[11.7 \sim 22.4]$ وارد حرکت زیرهارمونیک با دوره تناوب 2T می‌شود. این حرکت چند تناوبی در $\omega_2=22.5$ وارد یک جاذب نامنظم شده و تا $\omega_2=40.0$ ادامه پیدا می‌کند.

به‌ازای پارامتر سرعت میانگین بدون بعد $\lambda_1=15$ نمودار دوشاخگی شدن در محدوده $\omega_2=[5.0 \sim 7.2]$ دارای رفتار تناوبی است. رفتار سیستم در یک محدوده کوچک $\omega_2=[7.3 \sim 10.0]$ وارد حرکت زیرهارمونیک با دوره تناوب 2T می‌شود. این حرکت چند تناوبی در $\omega_2=10.1$ وارد یک جاذب نامنظم شده و تا $\omega_2=40.0$ ادامه پیدا می‌کند.

از دیگر روش‌های شناسایی نیز برای بررسی و تأیید دقیق‌تر رفتار دینامیکی سیستم استفاده گردیده است. برای این منظور در شکل ۳ دیاگرام‌های فاز، پاسخ زمانی و نقشه پوانکاره نقطه میانی نانولوله نشان داده شده است.



شکل ۲. نمودارهای دوشاخگی ارتعاشات عرضی بدون بعد نانولوله داخلی با تغییر فرکانس نوسانات جریان بدون بعد ω_2 برای سه سرعت میانگین بدون بعد (الف) $\lambda_1=8$ (ب) $\lambda_1=10$ (ج) $\lambda_1=15$



شکل ۳. دیاگرام فاز، پاسخ زمانی و نقشه پوانکاره سیستم در الف) $\lambda_1=8$ و $\omega_2=24.0$ ب) $\lambda_1=10$ و $\omega_2=21.0$ ج) $\lambda_1=15$ و $\omega_2=25.0$

منحنی‌های صفحه فاز مشخص می‌کنند که حرکت، تناوبی یا غیرتناوبی است. برای یک حرکت تناوبی، منحنی صفحه فاز، یک مسیر بیضوی را به نمایش می‌گذارد.

مقطع پوانکاره، صفحه‌ای در فضای فاز است که نمودار فازی ایجاد شده از حل معادلات حاکم بر حرکت سیستم را قطع می‌کند. برای یک حرکت تناوبی، نقشه پوانکاره حول یک نقطه متمرکز می‌شود که در شکل ۳-الف مشاهده می‌شود. اگر منحنی صفحه فاز چندین بار خودش را قطع کند یا دارای تعداد حلقه‌های محدودی باشد، بیانگر یک حرکت زیرهارمونیک است. در این شرایط، نقشه پوانکاره شامل تعداد محدودی از نقاط منفصل خواهد بود و در شکل ۳-ب مشاهده می‌شود.

در سیستم‌هایی که در آنها رفتار نامنظم مشاهده می‌شود، صفحه فازی شامل خط سیرهایی است که مسیر طی شده را تکرار نمی‌کنند. این خط سیرها، محدوده‌هایی از فضای فاز را بدون هیچ تکرار و نظم و ترتیب خاصی پر خواهند کرد. چنانچه حرکت نامنظم باشد، در نقشه پوانکاره، توده‌ای از نقاط متراکم و نامنظم تشکیل می‌شود که در شکل ۳-ج دیده می‌شود.

۴. اعتبارسنجی

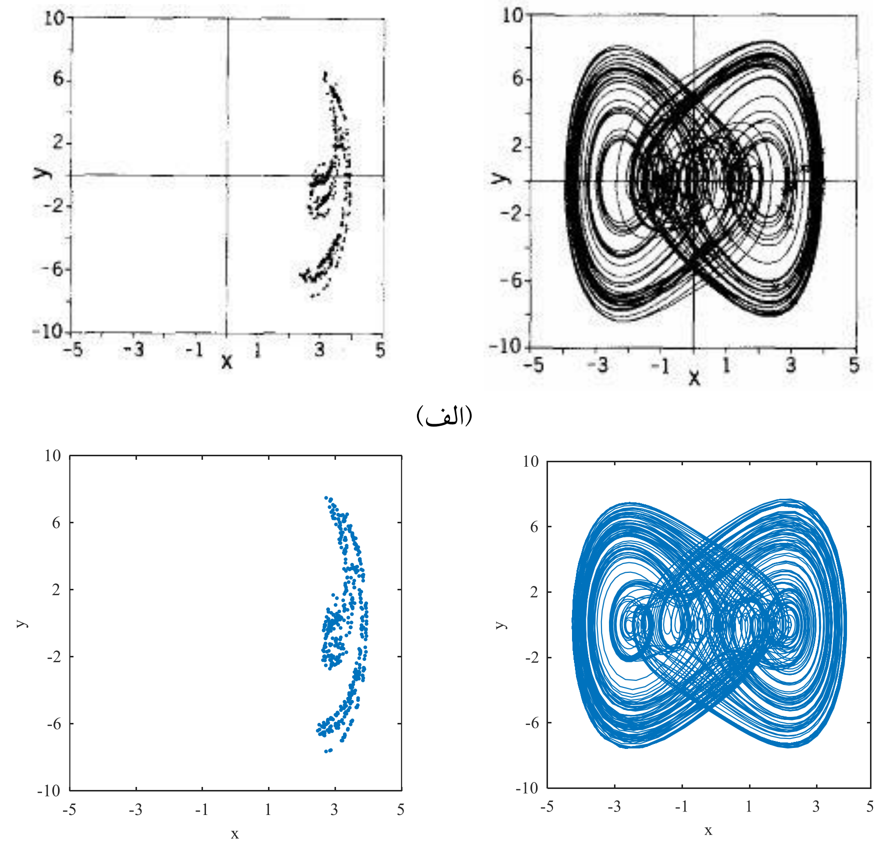
همان‌گونه‌که قبلاً اشاره شد، برای شناسایی رفتار دوشاخگی و آشوبناک سیستم‌های غیرخطی از روش‌ها و ابزارهای خاص آنها استفاده می‌شود. از مهم‌ترین این روش‌ها، نمودار دوشاخگی، دیاگرام فاز و نقشه پوانکاره است. از طرفی، تحلیل رفتار دوشاخگی و آشوبناک نانولوله‌های کربنی دو جداره حامل سیال، در تحقیقات پیشین ارائه نشده است. لذا برای بررسی صحت نتایج و برنامه‌های رایانه‌ای نوشته شده، از معادله دافینگ[۳] که یک معادله شناخته شده است، استفاده و نتایج به‌دست آمده با مرجع [۲۴] مورد مقایسه قرار می‌گیرند. معادله دافینگ به‌صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$\frac{d^2X}{dt^2}+K\frac{\mathrm{d}X}{dt}+X^3=B\cos t \qquad (۲۷)$$

یا:

$$\frac{dX}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-Ky-X^3+B\cos t \qquad (۲۸)$$

که B ضریب نیروی تحریک و K ضریب میرایی هستند. با حل معادله فوق به روش عددی، دیاگرام‌های فاز در شکل ۴ نشان داده شده‌اند. با مقایسه شکل‌ها، همخوانی خیلی خوبی بین نتایج به‌دست آمده از برنامه‌های نوشته شده و مرجع مربوطه مشاهده می‌شود.



(الف)

(ب)

شکل ۴. دیاگرام فاز و نقشه پوانکاره سیستم در B=12 و K=0.1 (الف) مرجع [۲۴] (ب) مطالعه حاضر.

۵. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، تئوری تیر اویلر – برنولی همراه با کرنش غیرخطی فون‌کارمن برای مدل‌سازی ارتعاشات کوپل شده طولی - عرضی نانولوله‌های کربنی دو جداره حامل سیال، به‌کار گرفته شد. در این مدل‌سازی، نیروهای غیرخطی واندروالس بین دو نانولوله درنظر گرفته شدند. نمودارهای دوشاخگی، منحنی‌های فاز، پاسخ زمانی و نقشه‌های پوانکاره سیستم برای تحلیل رفتار غیرخطی سیستم به‌کار گرفته شدند. اثرات سرعت جریان و فرکانس نوسانات جریان سیال روی رفتار غیرخطی سیستم مورد بررسی قرار گرفت. رفتارهای غیرخطی متنوعی نیز از جمله حرکات با دوره تناوب 2T، 10T و نامنظم برای سیستم آشکار شد. با توجه به بررسی‌های انجام گرفته، موارد زیر قابل استنباط هستند:

با کاهش سرعت میانگین جریان سیال می‌توان وقوع رفتار چندتناوبی و نامنظم را به تأخیر انداخت و محدوده وسیع‌تری از پاسخ تناوبی را برای سیستم ایجاد نمود.

افزایش فرکانس نوسانات جریان سیال، منجر به تغییر رفتار دینامیکی سیستم از حالت تناوبی به چندتناوبی و نامنظم خواهد شد. با توجه به مقادیر مختلف سرعت میانگین جریان سیال، می‌توان برای فرکانس نوسانات جریان سیال یک مقدار آستانه‌ای تعریف نمود که به ازای مقادیر کمتر از آن رفتار سیستم تناوبی است.

۶. مآخذ

[1] Rueckes, Thomas, Kyoungha Kim, Ernesto Joselevich, Greg Y. Tseng, Chin-Li Cheung, and Charles M. Lieber, "Carbon nanotube-based nonvolatile random-access memory for molecular computing", *science*, 2000, Vol.289, no.5476, pp.94-97.

[2] Bianco, Alberto, Kostas Kostarelos, and Maurizio Prato, "Applications of carbon nanotubes in drug delivery", *Current opinion in chemical biology*, 2005, Vol.9, no.6, pp.674-679.

[3] Thostenson, Erik T., Zhifeng Ren, and Tsu-Wei Chou, "Advances in the science and technology of carbon nanotubes and their composites: a review", *Composites science and technology*, 2001, Vol.61, no.13, pp.1899-1912.

[4] Thostenson, Erik T., Zhifeng Ren, and Tsu-Wei Chou, "Advances in the science and technology of carbon nanotubes and their composites: a review", *Composites science and technology*, 2018, Vol.61, no.13, pp.1899-1912.

[5] Yoon, J., C. Q. Ru, and A. Mioduchowski, "Timoshenko-beam effects on transverse wave propagation in carbon nanotubes", *Composites Part B: Engineering*, 2004, Vol.35, no.2, pp.87-93.

[6] Yoon, J., C. Q. Ru, and A. Mioduchowski, "Terahertz vibration of short carbon nanotubes modeled as Timoshenko beams", *J. Appl. Mech.*, 2005, Vol.72, no.1, pp.10-17.

[7] Xu, K. Y., X. N. Guo, and C. Q. Ru, "Vibration of a double-walled carbon nanotube aroused by nonlinear intertube van der Waals forces", *Journal of Applied Physics*, 2006, Vol.99, no.6, pp.064303.

[8] Li, Renfu, and George A. Kardomateas, "Vibration characteristics of multiwalled carbon nanotubes embedded in elastic media by a nonlocal elastic shell model", 2007, pp.1087-1094.

[9] Wang, L., Q. Ni, and M. Li, "Buckling instability of double-wall carbon nanotubes conveying fluid", *Computational Materials Science*, Vol.44, no.2, 2008 pp.821-825.

[10] Kuang, Y. D., X. Q. He, C. Y. Chen, and G. Q. Li, "Analysis of nonlinear vibrations of double-walled carbon nanotubes conveying fluid", *Computational Materials Science,* 2009, Vol.45, no.4, pp.875-880.

[11] Mayoof, Fathi N., and Muhammad A. Hawwa, "Chaotic behavior of a curved carbon nanotube under harmonic excitation", *Chaos, Solitons & Fractals,* 2009, Vol.42, no.3 pp.1860-1867.

[12] Chang, T-P, "Stochastic FEM on nonlinear vibration of fluid-loaded double-walled carbon nanotubes subjected to a moving load based on nonlocal elasticity theory", *Composites Part B: Engineering,* 2013, Vol.54, pp.391-399.

[13] Ebrahimi, Reza, "Chaotic vibrations of carbon nanotubes subjected to a traversing force considering nonlocal elasticity theory", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part N: Journal of Nanomaterials, Nanoengineering and Nanosystems*, 2022, Vol.236, no.1-2, pp.31-40.

[14] Şimşek, Mesut, "Vibration analysis of a single-walled carbon nanotube under action of a moving harmonic load based on nonlocal elasticity theory", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* 2010, Vol.43, no.1, pp.182-191.

[15] Liang, Feng, and Yong Su, "Stability analysis of a single-walled carbon nanotube conveying pulsating and viscous fluid with nonlocal effect", *Applied Mathematical Modelling,* 2013, Vol.37, no.10-11, pp.6821-6828.

[16] Ouakad, Hassen M., and Mohammad I. Younis, "Natural frequencies and mode shapes of initially curved carbon nanotube resonators under electric excitation", *Journal of Sound and Vibration,* 2011, Vol.330, no.13, pp.3182-3195.

[17] Xu, Tiantian, and Mohammad I. Younis, "Nonlinear dynamics of carbon nanotubes under large electrostatic force", *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics,* 2016, Vol.11, no.2.

[18] Hu, K., Y. K. Wang, H. L. Dai, L. Wang, and Q. Qian, "Nonlinear and chaotic vibrations of cantilevered micropipes conveying fluid based on modified couple stress theory", *International Journal of Engineering Science,* 2016, Vol.105, pp.93-107.

[19] Askari, Hassan, and Ebrahim Esmailzadeh, "Forced vibration of fluid conveying carbon nanotubes considering thermal effect and nonlinear foundations", *Composites Part B: Engineering,* 2017, Vol.113, pp.31-43.

[20] Ramezannejad Azarboni, H., and S. A. Edalatpanah, "Chaotic vibrations of a harmonically excited carbon nanotube with consideration of thermomagnetic filed and surface effects", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science,* 2019, Vol.233, no.10, pp.3649-3658.

[21] Miandoab, Ehsan Maani, "Onset of chaos in nano-resonators based on strain gradient theory: Numerical analysis", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* 2021, Vol.101, p.105864.

[22] Meirovitch, Leonard, "*Principles and techniques of vibrations",* New Jersey: Prentice Hall, 1997, Vol.1.

[23] Chen, Y., "*Bifurcation and chaos in engineering*", Springer, 1998.

[24] Ueda, Yoshisuke, "Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation", *Journal of Statistical Physics*, 1979, Vol.20, no.2, pp.181-196.

پی‌نوشت:

1. Von Karman's Theory
2. MATLAB
3. Duffings equation