

افت انتقال صوت در پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی هوشمند پیزوالکتریک

تحت امواج صوتی

محمد رضا الهامی*

دانشیار،

گروه مهندسی مکانیک،

دانشگاه جامع امام حسین (ع) تهران

mrelhami.63@gmail.com

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۳/۲۹

حسین آذریون

دانشجوی دکتری،

گروه مهندسی مکانیک،

دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران

h.azarioun@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۲/۰۵

چکیده

در این پژوهش فرض شده است که پوسته ساندویچی خارجی دارای هسته ساخته شده از مواد مدرج تابعی همراه با وصله‌های پیزوالکتریک و پوسته داخلی از جنس کامپوزیت‌های لایه‌ای باشد. پوسته‌های استوانه‌ای دو جداره دارای سه محیط آکوستیک خارجی، داخلی و میانی هستند و تحت برخورد امواج آکوستیک با زاویه اثر مشخص قرار گرفته‌اند. معادلات دینامیکی سازه با استفاده از فرضیه میدان جابه‌جایی برشی مرتبه اول پوسته‌ها و اصل همپلتون استخراج شده‌اند و همراه با شرایط مرزی سیال/سازه معادلات نهایی را تشکیل می‌دهند. با استفاده از بسط‌های سری فوریه فشارهای صوت ورودی، برگشتی و خروجی و جابه‌جایی‌های پوسته، معادلات دینامیکی گسسته‌سازی شده و به فرم ماتریس حالت درمی‌آیند. بعد از اعتبارسنجی نتایج با مقالات موجود، نهایتاً اثرات، ولتاژ اعمالی از طرف وصله‌های پیزوالکتریک، درصد مواد تابعی، زاویه الیاف به‌کار رفته در کامپوزیت‌ها، انواع مواد کامپوزیتی، تعداد وصله‌های پیزوالکتریک و زاویه برخورد بر رفتار افت انتقال صوت سازه در محدوده فرکانسی مشخصی مورد ارزیابی قرار گرفته است. و در نهایت پارامترهای ولتاژ اعمالی از طرف وصله‌های پیزوالکتریک، درصد مواد تابعی، زاویه الیاف به‌کار رفته در کامپوزیت‌ها، انواع مواد کامپوزیتی، تعداد وصله‌های پیزوالکتریک و زاویه برخورد، افت انتقال صوت را بیشتر کرد.

واژگان کلیدی: افت انتقال صوت، پوسته‌های استوانه‌ای، مواد مدرج تابعی، پیزوالکتریک، تئوری میدان برشی مرتبه

اول

۱. مقدمه

بال و موتور هواپیماها و فضاپیماها، لوله‌های انتقال نفت، گاز و مواد شیمیایی، مخازن ذخیره آب و سوخت، بدنه زیردریایی و بسیاری از کاربردهای مشابه اشاره نمود. گستردگی کاربرد پوسته‌های استوانه‌ای، علت رشد چشمگیر مطالعات انجام

پوسته‌ها یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین اجزای سازه‌ای هستند. پوسته‌ها در شکل‌ها و کاربردهای متنوعی معرفی شده‌اند که به‌عنوان مثال می‌توان به استفاده از آنها در بدنه،

یافته در این حوزه است [۱]. در این سازه‌ها، اندرکنش بین سیال و سازه معمولاً سبب انتقال ناخواسته انرژی به صورت ارتعاشات آکوستیکی و یا سازه‌ای به پوسته استوانه‌ای می‌گردد. این انتقال ناخواسته انرژی، نه تنها باعث آلودگی صوت در سازه می‌شود، بلکه ممکن است منجر به شکست‌های فاجعه بار در سیستم شود. یکی از پدیده‌های مهم در علم آکوستیک، افت انتقال صوت در سازه‌ها است که نشان‌دهنده نسبت توان صوت گذر کرده از سازه به توان صوت برخوردی به سازه است، که در صنایع هوایی مثل بدنه هواپیما و در صنایع دریایی مانند زیردریایی‌ها و بدنه کشتی‌ها کاربرد دارد. شایان ذکر است که به‌طور معمول برهم‌کنش سیال-سازه (FSI) باعث انتقال ناخواسته انرژی از سازه‌ها به صورت ارتعاش صوت می‌گردد. در نتیجه، آلودگی صوت، خستگی سازه‌ای و حتی خرابی‌های ساختاری فاجعه باری به‌بار می‌آیند تاکنون روش‌های تحلیلی، عددی مانند انرژی آماری [۲]، روش اجزای محدود [۳] و روش المان مرزی [۴] و آزمایشگاهی مختلفی جهت پیش‌بینی رفتار آکوستیکی پوسته‌های استوانه‌ای توسط برخی محققان معرفی و توسعه یافته است.

برای مثال، ژو و همکارانش [۵] افت انتقال صوت در پوسته‌های استوانه‌ای دوجداره با هسته مواد متخلخل را بررسی کردند. طالبی توتی و زراستوند [۶] افت انتقال صوت پنل‌های استوانه‌ای دو انحنایی را با استفاده از مواد متخلخل و تئوری برشی پوسته‌ها بررسی کردند. آنها نشان دادند با افزایش ضخامت لایه متخلخل، در دامنه فرکانسی پایین تغییر محسوسی بر افت انتقال صوت مشاهده نمی‌شود در حالی که در محدوده فرکانسی بالا جذب انرژی بیشتر شده و کنترل انتقال صوت بیشتر شده است. ژیا و همکارانش [۷] ارتعاشات و تابش صوت در پوسته‌های استوانه‌ای دوجداره که توسط یک محفظه آکوستیکی به صورت هم مرکز به یکدیگر کوپل شده‌اند، را بررسی کردند. طالبی توتی و خامنه [۸] بررسی انتشار موج در پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی

دوجداره را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی و استفاده از چیدمان‌های متفاوت فیبرهای کامپوزیتی ارزیابی کردند. ژانگ و همکارانش [۹] اثرات سوراخ‌های روی پوسته‌های استوانه‌ای دوجداره را بر روی افت انتقال صوت با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته‌ها، سری فوریه، شرایط مرزی هندسی بی‌نهایت، در نظر گرفتن جریان خارجی بر روی پوسته بیرونی بررسی کردند. ژو و همکارانش [۱۰] به بررسی افت انتقال صوت در دو پوسته استوانه‌ای آلومینیومی هم مرکز پرداختند و از مواد متخلخل در بین دو پوسته استوانه‌ای برای بهبود افت انتقال صوت استفاده کردند. تئوری پوسته لاو، تئوری لی برای مدل‌سازی انتشار موج در ماده متخلخل را در کارشان لحاظ کردند. طالبی توتی و گوهری [۱۱] افت انتقال صوت دو استوانه کامپوزیتی را که توسط محیط متخلخل به یکدیگر کوپل شده‌اند بررسی کردند و نشان دادند که مواد متخلخل در محدوده فرکانسی بالا به خوبی سبب بهبود افت انتقال صوت می‌شود. طالبی و همکارانش [۱۲] افت انتقال صوت در طول پوسته استوانه تک لایه کامپوزیتی را با استفاده از تئوری برشی مرتبه سوم پوسته‌ها انجام دادند.

طالبی توتی و همکارانش [۱۳] افت انتقال صوت را در پوسته‌های استوانه‌ای سانلویچی ساخته شده از مواد مدرج تابعی ارزیابی کردند. احمدی و همکارانش [۱۴] افت انتقال صوت را در پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از فرضیه برشی مرتبه اول و در نظر گرفتن خواص مواد مدرج تابعی ارزیابی کردند. آنها از بسط‌های سری فوریه برای حل معادلات دینامیکی استفاده کردند. هاشمی نژاد و همکارانش [۱۵] با استفاده از نظریه کلاسیک پوسته‌ها، افت انتقال صوت را در پوسته‌های سانلویچی سه لایه با هسته سیال الکترورنولوژیکال با استفاده از بسط‌های سری فوریه انجام دادند. ریاحی و همکارانش [۱۶] یک مدل تحلیل برای محاسبه افت انتقال صوت پوسته استوانه‌ای ساخته شده از فوم‌های پلیمری را با استفاده از نظریه برشی

مرتبه اول ارائه دادند. پارینلو و همکارانش [۱۷] افت انتقال صوت را در یک میدان پخشنده برای پوسته‌های استوانه‌ای چند لایه با استفاده از روش ماتریس حالت انجام دادند. اولیازاده و همکارانش [۱۸] افت انتقال صوت پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد جاذب انرژی را به صورت تحلیلی و آزمایشی تحت برخورد امواج آکوستیکی با زاویه مشخص بررسی کردند. کیم و لی [۱۹] نیز با در نظر گرفتن معادلات کامل پوسته با تئوری لاو، و نیز در نظر گرفتن برهم کنش محیط آکوستیکی، به مقایسه نتایج روش تحلیلی با آزمایش پرداختند و به ویژه در فرکانس‌های بالا به تطابق خوبی دست پیدا کردند و این کار را به پوسته‌های استوانه‌ای دو جداره گسترش دادند. شجاعی فرد و همکاران [۲۰] از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم استفاده نمودند تا اهمیت آن را در افت انتقال صوت که پیش از این برای ضخامت‌های زیاد ضروری نشان داده شده بود، تأیید کنند. به علاوه تئوری سه بعدی نیز در چند پژوهش مورد استفاده قرار گرفته است. برای مثال، طالبی و همکاران و دانشجو و همکاران [۲۱ و ۲۲] به بررسی افت انتقال صوت در پوسته‌های استوانه‌ای ارتوتروپیک و ایزوتروپیک با ضخامت دلخواه پرداخته‌اند. مگنیز و همکاران [۲۳] از تئوری برشی مرتبه اول و تئوری الاستیسیته سه بعدی برای محاسبه افت انتقال صوت در یک پوسته استوانه‌ای نامحدود چند لایه متشکل از لایه ارتوتروپیک و هسته پلیمری ایزوتروپیک استفاده کردند. لیو و همکارانش [۲۴] افت انتقال صوت را در یک میدان پخشنده صوت در پوسته استوانه‌ای ساندویچی با هسته متخلخل در حضور جریان خارجی به صورت تحلیلی بررسی کردند. آنها نشان دادند که مواد متخلخل به خوبی سبب بهبود افت انتقال صوت در بازه فرکانسی بالا می‌شوند. گلزاری و جعفری [۲۵] افت انتقال صوت در یک میدان صوت پخشنده را در پوسته‌های استوانه‌ای سه جداره تشکیل

شده از لایه‌های متخلخل با استفاده از نظریه میدان جابه‌جایی کلاسیک به دست آوردند. شهسواری و همکارانش [۲۶] افت انتقال صوت را در پوسته‌های استوانه‌ای متخلخل تشکیل شده از مواد مدرج تابعی با استفاده از مدل توانی در حضور جریان خارجی ارزیابی کردند. با مرور مقالات ارائه شده در حوزه رفتار ارتعاش - صوت پوسته‌های استوانه‌ای، مشخص شد که تاکنون افت انتقال صوت در پوسته‌های دو جداره کامپوزیتی استوانه‌ای همراه با وصله‌های پیزوالکتریک با استفاده از نظریه میدان برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار نگرفته است. بنابراین در این تحقیق به این مهم پرداخته می‌شود.

۲. معادلات حاکم

همان‌گونه که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، پوسته استوانه‌ای بیرونی تحت برخورد امواج آکوستیک با زاویه برخورد $0 < \alpha < \pi/2$ قرار می‌گیرد. پوسته بیرونی متشکل از هسته مواد تابعی تشکیل شده از دو فاز سرامیک و فلز با ضخامت h و شعاع r است که توسط وصله‌های پیزوالکتریک از جنس PZT-4 با ضخامت h_p در جهت شعاعی احاطه شده است. تعداد وصله‌های پیزوالکتریک در هر طرف از پوسته بیرونی N است. همچنین زاویه انحنای هر وصله بیرونی و داخلی با β_p مشخص شده است. بدین صورت بدیهی است که محیط احاطه شده کل توسط آرایه‌های از وصله‌های پیزوالکتریک در هر سمت پوسته استوانه‌ای بیرونی به صورت $N\beta_p$ است. به علاوه به منظور حفظ پایداری سیستم فرض شده است که زاویه محیطی هر وصله پیزوالکتریک با وصله پیزوالکتریک بعدی $\beta_c = \frac{2\pi}{N} - \beta_p$ باشد. همان‌گونه که از شکل مشخص است ضخامت و شعاع پوسته داخلی با H و R مشخص شده‌اند. طول استوانه بی‌نهایت فرض شده است.

پوسته کوچکتر به صورت زیر است:

$$c^2 \nabla^2 (p_2^T + p_2^R) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p_2^T + p_2^R), \quad (2)$$

$$c^2 \nabla^2 p_3^T = \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_3^T,$$

درحالی که p_2^R و p_2^T بیانگر فشارهای گذر کرده و برگشتی در محیط آکوستیک بین دو پوسته هستند c سرعت صوت است. همچنین نشانگر فشار صوت گذر کرده از پوسته کوچکتر در محیط آکوستیک سوم است. بدین صورت فشار صوت برخوردی، برگشتی و عبوری از سازه براساس مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود [۲۷]:

$$p_1^I(\bar{r}, \theta, x, t) = p_0 e^{i(\omega t - k_x x)} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n J_n(k_{1\bar{r}} \bar{r}) \cos(n\theta),$$

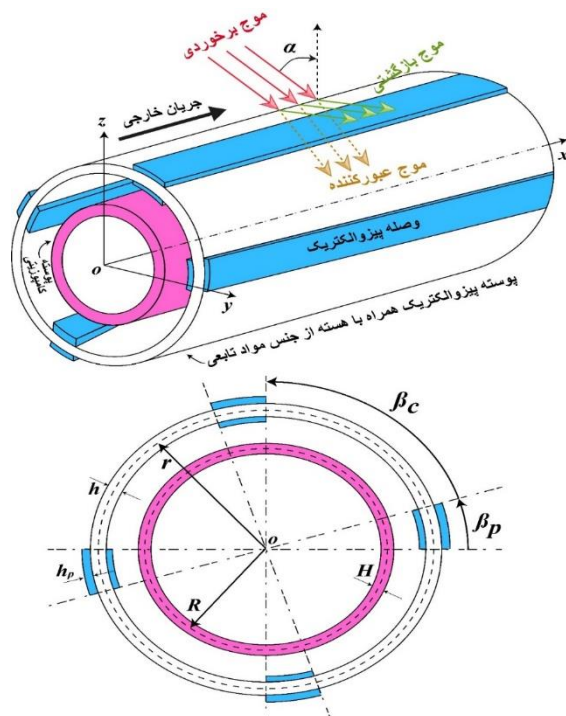
$$p_1^R(\bar{r}, \theta, x, t) = e^{i(\omega t - k_x x)} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_{1n}^R H_n^{(2)}(k_{1\bar{r}} \bar{r}) \cos(n\theta),$$

$$p_2^T(\bar{r}, \theta, x, t) = e^{i(\omega t - k_x x)} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_{2n}^T H_n^{(1)}(k_{2\bar{r}} \bar{r}) \cos(n\theta), \quad (3)$$

$$p_2^R(\bar{r}, \theta, x, t) = e^{i(\omega t - k_x x)} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_{2n}^R H_n^{(2)}(k_{2\bar{r}} \bar{r}) \cos(n\theta),$$

$$p_3^T(\bar{r}, \theta, x, t) = e^{i(\omega t - k_x x)} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_{3n}^T H_n^{(1)}(k_{3\bar{r}} \bar{r}) \cos(n\theta).$$

که در آن فرکانس زاویه‌ای است، p_0 دامنه موج آغازی است، J_n ، $i = \sqrt{-1}$ ، $\varepsilon_0 = 1$ ، $\varepsilon_n = 2 (n \geq 1)$ تابع بسل استوانه‌ای نوع اول، $H_n^{(1)}$ و $H_n^{(2)}$ توابع هانکل استوانه‌ای نوع اول و دوم هستند. \tilde{P}_{1n}^R ضریب مودال برای ترم فشار برگشتی در محیط آکوستیک اول، \tilde{P}_{2n}^T ضریب مودال برای ترم فشار صوت گذر کرده در محیط آکوستیک دوم یا بین دو پوسته، \tilde{P}_{2n}^R ضریب مودال برای ترم فشار صوت برگشتی در محیط آکوستیک دوم یا بین دو پوسته، \tilde{P}_{3n}^T ضریب مودال برای ترم فشار صوت گذر کرده در محیط آکوستیک سوم یا داخل پوسته کوچکتر است. ترم‌های محوری و شعاعی عدد موج به صورت زیر بیان می‌شود [۲۷]:



شکل ۱. پوسته استوانه دو جداره تشکیل شده از وصله

پیزوالکتریک با هسته مواد تابعی و پوسته کامپوزیتی چندلایه

۱-۲. معادلات موج در محیط آکوستیک

با توجه به ساختار سازه، سه محیط آکوستیکی وجود دارد که عبارت است از محیط آکوستیک خارجی که در آن موج به پوسته بزرگتر برخورد می‌کند، محیط آکوستیک دوم که عبارت است از فضای بین دو پوسته استوانه‌ای و محیط آکوستیک سوم که در داخل پوسته استوانه‌ای کوچکتر قرار دارد. فرض شده است که هر سه محیط دارای سیال هوا باشد. معادله موج در محیط خارجی آکوستیکی به صورت زیر بیان می‌شود [۲۷]:

$$c^2 \nabla^2 (p_1^I + p_1^R) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p_1^I + p_1^R) = 0, \quad (1)$$

درحالی که p_1^R و p_1^I بیانگر فشار صوت برخوردی و برگشتی به پوسته بزرگتر در محیط بیرونی هستند c سرعت صوت است. معادله موج برای محیط آکوستیک بین دو پوسته استوانه‌ای و همچنین معادله موج در محیط آکوستیک داخل

$$\begin{aligned} \gamma_{x\theta 1} &= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \\ &\quad + z \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \psi_{x1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_{\theta 1}}{\partial x} \right), \\ \gamma_{\theta z 1} &= \psi_{\theta 1} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} - \frac{v_1}{\bar{r}}, \\ \gamma_{xz 1} &= \frac{\partial w_1}{\partial x} + \psi_{x1}. \end{aligned}$$

درحالی که ϵ_{xx1} و $\epsilon_{\theta\theta 1}$ بیانگر کرنش نرمال، $\gamma_{x\theta 1}$ و $\gamma_{\theta z 1}$ بیانگر کرنش برشی هستند r شعاع پوسته با وصله‌های پیزوالکتریک است. فرض شده است که هسته پوسته استوانه‌ای خارجی از جنس مواد تابعی متشکل از سرامیک و فلز باشد. در این کار فرض می‌کنیم خواص ماده مانند مدول الاستیسیته $E(z)$ و چگالی جرمی و نسبت پواسون براساس ضخامت متغیر باشد. براساس مدل تابع توانی برای مواد تابعی داریم [۲۹]:

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m + (E_c - E_m) \left(0.5 + \frac{z}{h} \right)^p \\ \rho(z) &= \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(0.5 + \frac{z}{h} \right)^p \\ \vartheta(z) &= \vartheta_m + (\vartheta_c - \vartheta_m) \left(0.5 + \frac{z}{h} \right)^p \end{aligned} \quad (۷)$$

اندیس‌های c و m به ترتیب بیانگر سرامیک و فلز هستند. به علاوه p ایندکس تابع توانی^۱ نام دارد که نحوه توزیع خواص مکانیکی را بیان می‌کند که دارای مقادیر بزرگ‌تر از صفر است. به این صورت که وقتی $p = 0$ جنس پوسته تمام سرامیک (در این پژوهش آلومینا در نظر گرفته شده است) می‌شود و هنگامی که $p = \infty$ است جنس پوسته تمام فلز (در این پژوهش آلومینیوم در نظر گرفته شده است) می‌شود. براساس تئوری الاستیسیته، روابط تنش - کرنش برای هسته تشکیل شده از مواد تابعی در پوسته خارجی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} k_x &= k_1 \sin \alpha, \quad k_{1\bar{r}} = k_1 \cos \alpha \\ &= [k_1^2 - k_x^2]^{1/2}, \\ k_{2\bar{r}} &= \sqrt{k_2^2 - k_x^2}, \\ k_1 &= k_2 = k_3 = \omega/c \\ k_{3\bar{r}} &= \sqrt{k_3^2 - k_x^2} \end{aligned} \quad (۴)$$

همچنین k_1 عدد موج در محیط آکوستیکی خارجی، k_2 عدد موج در محیط آکوستیکی بین دو پوسته و k_3 عدد موج در محیط آکوستیکی داخلی است.

۲-۲. معادلات ساختاری سازه

۲-۲-۱. معادلات ساختاری با آرایش پیزوالکتریک

براساس فرضیه برشی مرتبه اول، میدان جابه‌جایی برشی مرتبه اول برای پوسته استوانه‌ای تشکیل شده از وصله‌های پیزوالکتریک به صورت زیر بیان می‌شود [۲۸]:

$$\begin{aligned} U_1(x, \theta, z, t) &= u_1(x, \theta, t) \\ &\quad + z \psi_{x1}(x, \theta, t) \\ V_1(x, \theta, z, t) &= v_1(x, \theta, t) \\ &\quad + z \psi_{\theta 1}(x, \theta, t) \\ W_1(x, \theta, z, t) &= w_1(x, \theta, t), \end{aligned} \quad (۵)$$

درحالی که دوران‌های پوسته در جهت‌های x و θ با پارامترهای ψ_{x1} و $\psi_{\theta 1}$ نشان داده شده است. u_1, v_1 و w_1 به ترتیب بیانگر میدان جابه‌جایی در جهات x, θ و z هستند. همچنین کرنش‌های نرمال و برشی به صورت زیر ارائه می‌شود [۲۸]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx1} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_{x1}}{\partial x}, \\ \epsilon_{\theta\theta 1} &= \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{z}{\bar{r}} \frac{\partial \psi_{\theta 1}}{\partial \theta} + \frac{w_1}{\bar{r}}, \end{aligned} \quad (۶)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx1e} \\ \sigma_{\theta\theta1e} \\ \tau_{x\theta1e} \\ \tau_{\theta z1e} \\ \tau_{xz1e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(z)}{1-\vartheta(z)^2} & \frac{\vartheta(z)E(z)}{1-\vartheta(z)^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\vartheta(z)E(z)}{1-\vartheta(z)^2} & \frac{E(z)}{1-\vartheta(z)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E(z)}{2(1+\vartheta(z))} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E(z)}{2(1+\vartheta(z))} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E(z)}{2(1+\vartheta(z))} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx1} \\ \varepsilon_{\theta\theta1} \\ \gamma_{x\theta1} \\ \gamma_{\theta z1} \\ \gamma_{xz1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

به علاوه ϑ نسبت پواسون هسته پوسته است. از طرفی براساس فرضیه پیزوالاستیسیته، روابط تنش-کرنش که تابعی از دوفاز الاستیکی و الکتریکی هستند به صورت زیر بیان می‌شوند [۳۰]:

درحالی که σ_{xx1e} و $\sigma_{\theta\theta1e}$ بیانگر تنش‌های نرمال، $\tau_{x\theta1e}$ و $\tau_{\theta z1e}$ و τ_{xz1e} بیانگر تنش برشی هستند قابل توجه است که تنش‌های برشی از طریق مدول برشی با کرنش برشی متناسب هستند همچنین E بیانگر مدول الاستیسیته هسته ماده تابعی پوسته است.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx1i} \\ \sigma_{\theta\theta1i} \\ \tau_{x\theta1i} \\ \tau_{\theta z1i} \\ \tau_{xz1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx1} \\ \varepsilon_{\theta\theta1} \\ \gamma_{x\theta1} \\ \gamma_{\theta z1} \\ \gamma_{xz1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_{xi} \\ \bar{E}_{\theta i} \\ \bar{E}_{zi} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} D_{xi} \\ D_{\theta i} \\ D_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx1} \\ \varepsilon_{\theta\theta1} \\ \gamma_{x\theta1} \\ \gamma_{\theta z1} \\ \gamma_{xz1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_{xi} \\ \bar{E}_{\theta i} \\ \bar{E}_{zi} \end{bmatrix}, \quad i = \text{ex, in}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{ex}}(x, \theta, z, t) &= \left[\left(z - \frac{h+h_p}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_p}{2} \right)^2 \right] \phi_{\text{ex}}(x, \theta, t) \\ &+ 2 \left(z - \frac{h+h_p}{2} \right) V, \quad (10) \\ \Phi_{\text{in}}(x, \theta, z, t) &= \left[\left(z + \frac{h+h_p}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_p}{2} \right)^2 \right] \phi_{\text{in}}(x, \theta, t), \end{aligned}$$

درحالی که D بیانگر میدان جابه‌جایی الکتریکی برای وصله‌های پیزوالکتریک بیرونی (ex) و داخلی (in) پیزوالکتریک است. e ثوابت پیزوالکتریک، k ثوابت دی‌الکتریک و c بیانگر ثوابت الاستیسیته برای وصله‌های پیزوالکتریک هستند. به علاوه برای وصله داخلی و خارجی، \bar{E} بیانگر میدان الکتریکی است که براساس توابع پتانسیل الکتریکی در ادامه به دست می‌آیند. در ابتدا تابع پتانسیل الکتریکی برای وصله‌های پیزوالکتریک بیرونی و داخلی که شرایط مرزی الکتریکی در مرزهای هر وصله پیزوالکتریک را ارضاء می‌کند به صورت زیر بیان می‌شود [۳۱]:

$$\int_0^t \delta(\Pi_s + \Pi_f - \Pi_K) dt = 0, \quad (12)$$

درحالی که $\delta\Pi_s$ بیانگر تغییرات انرژی کرنش، $\delta\Pi_f$ تغییرات کار خارجی و $\delta\Pi_K$ تغییرات انرژی جنبشی سیستم است. تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_K &= \sum_{\gamma=1}^N \int_x \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} \rho_p (\dot{U}_1 \delta U_1 + \dot{V}_1 \delta V_1 + \dot{W}_1 \delta W_1) dzd\theta dx \\ &+ \int_x \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_e (\dot{U}_1 \delta U_1 + \dot{V}_1 \delta V_1 + \dot{W}_1 \delta W_1) dzd\theta dx \\ &+ \sum_{\gamma=1}^N \int_x \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \rho_p (\dot{U}_1 \delta U_1 + \dot{V}_1 \delta V_1 + \dot{W}_1 \delta W_1) dzd\theta dx \\ &= \int_x [I_{01}(\dot{u}_1 \delta u_1 + \dot{v}_1 \delta v_1 + \dot{w}_1 \delta w_1) + I_{11}(\dot{u}_1 \delta \psi_{x1} + \dot{v}_1 \delta \psi_{\theta 1} + \dot{\psi}_{x1} \delta u_1 + \dot{\psi}_{\theta 1} \delta v_1) + I_{21}(\dot{\psi}_{x1} \delta \psi_{x1} + \dot{\psi}_{\theta 1} \delta \psi_{\theta 1})] dx \end{aligned} \quad (13)$$

درحالی که:

$$\begin{aligned} I_{01} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} \rho_p dzd\theta + \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_f dzd\theta + \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \rho_p dzd\theta, \\ I_{11} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} \rho_p z dzd\theta + \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_f z dzd\theta + \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \rho_p z dzd\theta, \end{aligned} \quad (14)$$

درحالی که V بیانگر ولتاژ الکتریکی خارجی اعمال شده بر وصله‌های پیزوالکتریک بیرونی است. ϕ_{in} و ϕ_{ex} به ترتیب توابع پتانسیل الکتریکی دوبعدی برای وصله‌های پیزوالکتریک بیرونی و داخلی هستند قابل توجه است که میدان‌های الکتریکی در جهات x و θ و برای هر وصله پیزوالکتریک بیرونی و داخلی بدون در نظر گرفتن ولتاژ الکتریکی خارجی به صورت زیر بر حسب منفی گرادیان توابع پتانسیل الکتریکی بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{xex} &= -\frac{\partial \Phi_{ex}}{\partial x} = -\left[\left(z - \frac{h+h_p}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_p}{2} \right)^2 \right] \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial x}, \\ \bar{E}_{xin} &= -\frac{\partial \Phi_{in}}{\partial x} = -\left[\left(z + \frac{h+h_p}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_p}{2} \right)^2 \right] \frac{\partial \phi_{in}}{\partial x}, \\ \bar{E}_{\theta ex} &= -\frac{1}{r+z} \frac{\partial \Phi_{ex}}{\partial \theta} = -\frac{1}{r+z} \left[\left(z - \frac{h+h_p}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_p}{2} \right)^2 \right] \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial \theta}, \\ \bar{E}_{\theta in} &= -\frac{1}{r+z} \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial \theta} = -\frac{1}{r+z} \left[\left(z + \frac{h+h_p}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_p}{2} \right)^2 \right] \frac{\partial \phi_{in}}{\partial \theta}, \\ \bar{E}_{zex} &= -\frac{\partial \Phi_{ex}}{\partial z} = -2 \left(z - \frac{h+h_p}{2} \right) \phi_{ex}, \\ \bar{E}_{zin} &= -\frac{\partial \Phi_{in}}{\partial z} = -2 \left(z + \frac{h+h_p}{2} \right) \phi_{in}, \end{aligned} \quad (11)$$

بهمین منظور به دست آوردن معادلات دینامیکی پوسته استوانه‌ای ساخته شده از هسته الاستیک همراه با وصله‌های پیزوالکتریک از اصل همیلتون در فرم زیر استفاده می‌کنیم:

[۳۲]:

تغییرات کار خارجی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta \Pi_f = \int_A \Delta P_1 \delta w_1 dA, \quad \Delta P_1 = (p_1^I + p_1^R) - (p_2^T + p_2^R) \quad (16)$$

با جایگزینی معادلات ۱۳، ۱۵، و ۱۶ در اصل همیلتون (معادله ۱۲)، در نهایت معادلات ارتعاشی کلی حرکت برای پوسته استوانه‌ای خارجی با وصله‌های PZT خارجی به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \delta v_1: \frac{\partial N_{x\theta_1}}{\partial x} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial N_{\theta\theta_1}}{\partial \theta} + \frac{Q_{\theta z_1}}{\bar{r}} = \\ I_{01} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + I_{11} \frac{\partial^2 \psi_{\theta_1}}{\partial t^2}, \\ \delta w_1: \frac{\partial Q_{xz_1}}{\partial x} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial Q_{\theta z_1}}{\partial \theta} - \frac{N_{\theta\theta_1}}{\bar{r}} = \\ I_{01} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \Delta P_1, \\ \delta \psi_{x_1}: \frac{\partial M_{xx_1}}{\partial x} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial M_{x\theta_1}}{\partial \theta} - Q_{xz_1} = \\ I_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + I_{21} \frac{\partial^2 \psi_{x_1}}{\partial t^2}, \\ \delta \psi_{\theta_1}: \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial M_{\theta\theta_1}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{x\theta_1}}{\partial x} - Q_{\theta z_1} = \\ I_{11} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + I_{21} \frac{\partial^2 \psi_{\theta_1}}{\partial t^2}, \\ \delta \phi_{in}: \frac{\partial p_{xin}}{\partial x} + \frac{\partial p_{\theta in}}{\partial \theta} - p_{zin} = 0, \\ \delta \phi_{ex}: \frac{\partial p_{xex}}{\partial x} + \frac{\partial p_{\theta ex}}{\partial \theta} - p_{zex} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} I_{21} = \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} \rho_p z^2 dz d\theta \\ + \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_f z^2 dz d\theta \\ + \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \rho_p z^2 dz d\theta \end{aligned}$$

درحالی که ρ_p بیانگر چگالی وصله پیزوالکتریک و ρ_f بیانگر چگالی مواد تابعی است. در مرحله بعد نیاز است که ترم انرژی کرنشی پوسته محاسبه شود. داریم:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_s = \sum_{\gamma=1}^N \int_x \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} (\sigma_{xx1in} \delta \epsilon_{xx1} \\ + \sigma_{\theta\theta1in} \delta \epsilon_{\theta\theta1} + \tau_{x\theta1in} \delta \gamma_{x\theta1} \\ + \tau_{xz1in} \delta \gamma_{xz1} + \tau_{\theta z1in} \delta \gamma_{\theta z1} - D_{xin} \delta E_{xin} \\ - D_{\theta in} \delta E_{\theta in} - D_{zin} \delta E_{zin}) dz d\theta dx \\ + \int_x \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx1e} \delta \epsilon_{xx1} + \sigma_{\theta\theta1e} \delta \epsilon_{\theta\theta1} \\ + \tau_{x\theta1e} \delta \gamma_{x\theta1} + \tau_{xz1e} \delta \gamma_{xz1} \\ + \tau_{\theta z1e} \delta \gamma_{\theta z1}) dz d\theta dx \\ + \sum_{\gamma=1}^N \int_x \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} (\sigma_{xx1ex} \delta \epsilon_{xx1} \\ + \sigma_{\theta\theta1ex} \delta \epsilon_{\theta\theta1} + \tau_{x\theta1ex} \delta \gamma_{x\theta1} \\ + \tau_{xz1ex} \delta \gamma_{xz1} + \tau_{\theta z1ex} \delta \gamma_{\theta z1} - D_{xex} \delta E_{xex} \\ - D_{\theta ex} \delta E_{\theta ex} - D_{zex} \delta E_{zex}) dz d\theta dx \end{aligned} \quad (18)$$

درحالی که:

$$\begin{aligned} [N_{xx1}, M_{xx1}] = \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} \sigma_{xx1in} [1, z] dz d\theta + \\ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx1e} [1, z] dz d\theta + \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \sigma_{xx1ex} [1, z] dz d\theta, \\ [N_{x\theta_1}, M_{x\theta_1}] = \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} \tau_{x\theta1in} [1, z] dz d\theta + \\ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{x\theta1e} [1, z] dz d\theta + \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \tau_{x\theta1ex} [1, z] dz d\theta, \\ [N_{\theta\theta_1}, M_{\theta\theta_1}] = \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta1in} [1, z] dz d\theta + \\ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta1e} [1, z] dz d\theta + \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \sigma_{\theta\theta1ex} [1, z] dz d\theta, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 Q_{xz1} &= k_s \left\{ \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} (\tau_{xz1in} - e_{15} \bar{E}_{xin}) dzd\theta + \right. \\
 &\left. \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz1e} dzd\theta + \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} (\tau_{xz1ex} - e_{15} \bar{E}_{xex}) dzd\theta \right\}, \\
 Q_{\theta z1} &= k_s \left\{ \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} (\tau_{\theta z1in} - e_{24} \bar{E}_{\theta in}) dzd\theta + \right. \\
 &\left. \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\theta z1e} dzd\theta + \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} (\tau_{\theta z1ex} - e_{24} \bar{E}_{\theta ex}) dzd\theta \right\}, \\
 p_{xin} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} D_{xin} \left[\left(z + \frac{h+h_p}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_p}{2} \right)^2 \right] dzd\theta, \\
 p_{xex} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} D_{xex} \left[\left(z - \frac{h+h_p}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_p}{2} \right)^2 \right] dzd\theta, \\
 p_{\theta in} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} D_{\theta in} \left[\left(z + \frac{h+h_p}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_p}{2} \right)^2 \right] dzd\theta, \\
 p_{\theta ex} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} D_{\theta ex} \left[\left(z - \frac{h+h_p}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_p}{2} \right)^2 \right] dzd\theta, \\
 p_{zin} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} 2D_{zin} \left(z + \frac{h+h_p}{2} \right) dzd\theta, \\
 p_{zex} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} 2D_{zex} \left(z - \frac{h+h_p}{2} \right) dzd\theta,
 \end{aligned}$$

درحالی که دوران‌های پوسته در جهت‌های x و θ با پارامترهای ψ_{x2} و $\psi_{\theta 2}$ نشان داده شده است. v_2, u_2 و w_2 به ترتیب بیانگر میدان جابه‌جایی در جهات x, θ و z هستند در مرحله بعدی با استفاده از میدان جابه‌جایی ۱۹، کرنش‌های نرمال و برشی به صورت زیر ارائه می‌شود [۳۳]:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx2} &= \frac{\partial u_2}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_{x2}}{\partial x}, \\
 \varepsilon_{\theta\theta 2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{z}{r} \frac{\partial \psi_{\theta 2}}{\partial \theta} + \frac{w_2}{r}, \\
 \gamma_{x\theta 2} &= \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{x2}}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_{\theta 2}}{\partial x} \right), \quad (20) \\
 \gamma_{\theta z 2} &= \psi_{\theta 2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_2}{\partial \theta} - \frac{v_2}{r}, \\
 \gamma_{xz 2} &= \frac{\partial w_2}{\partial x} + \psi_{x2}.
 \end{aligned}$$

درحالی که ε_{xx2} و $\varepsilon_{\theta\theta 2}$ بیانگر کرنش نرمال، $\gamma_{x\theta 2}$ و $\gamma_{\theta z 2}$ و $\gamma_{xz 2}$ بیانگر کرنش برشی هستند R شعاع پوسته کامپوزیتی چندلایه است. کامپوزیت با لایه‌های ارتوتروپیک با زاویه الیاف گوناگون تشکیل شده است باید هر لایه

در نهایت با جایگزینی معادله ۱۸ (با توجه به معادلات ۸ و ۹ در معادله ۱۷)، معادله تعادل برحسب جابه‌جایی کوپل شده در پیوست الف به تفصیل آمده است.

۲-۲-۲. معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی

بعد از به دست آوردن معادلات دینامیکی پوسته استوانه‌ای با وصله‌های پیزوالکتریک در قسمت قبل، در این مرحله به استنتاج معادلات دینامیکی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه با استفاده از نظریه میدان جابه‌جایی برشی مرتبه اول می‌پردازیم.

بر اساس این فرضیه، میدان جابه‌جایی برشی مرتبه اول برای پوسته استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود [۳۳]:

$$\begin{aligned}
 U_2(x, \theta, z, t) &= u_2(x, \theta, t) + z\psi_{x2}(x, \theta, t), \\
 V_2(x, \theta, z, t) &= v_2(x, \theta, t) + z\psi_{\theta 2}(x, \theta, t), \\
 W_2(x, \theta, z, t) &= w_2(x, \theta, t),
 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_K &= \int_A \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \rho_s (\dot{U}_2 \delta \dot{U}_2 + \dot{V}_2 \delta \dot{V}_2 \\
 &\quad + \dot{W}_2 \delta \dot{W}_2) dz dA \\
 &= \int_A [I_{02} (\dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 \\
 &\quad + \dot{v}_2 \delta \dot{v}_2 + \dot{w}_2 \delta \dot{w}_2) \\
 &\quad + I_{12} (\dot{u}_2 \delta \dot{\psi}_{x2} \\
 &\quad + \dot{v}_2 \delta \dot{\psi}_{\theta 2} + \dot{\psi}_{x2} \delta \dot{u}_2 \\
 &\quad + \dot{\psi}_{\theta 2} \delta \dot{v}_2) \\
 &\quad + I_{22} (\dot{\psi}_{x2} \delta \dot{\psi}_{x2} \\
 &\quad + \dot{\psi}_{\theta 2} \delta \dot{\psi}_{\theta 2})] dA
 \end{aligned} \tag{۲۳}$$

درحالی که ρ_s چگالی s مین لایه کامپوزیتی در پوسته است و A مساحت دامنه پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی است. همچنین روابط زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
 I_{02} &= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \rho_s dz = \sum_{s=1}^N \rho_s (H_s - H_{s-1}), \\
 I_{12} &= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \rho_s z dz = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N \rho_s (H_s^2 - \\
 &\quad H_{s-1}^2), \\
 I_{22} &= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \rho_s z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{s=1}^N \rho_s (H_s^3 \\
 &\quad - H_{s-1}^3),
 \end{aligned} \tag{۲۴}$$

تغییر انرژی کرنشی برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی به صورت بیان شده است:

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_s &= \int_A \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} (\sigma_{xx2} \delta \varepsilon_{xx2} + \sigma_{\theta\theta 2} \delta \varepsilon_{\theta\theta 2} \\
 &\quad + \tau_{x\theta 2} \delta \gamma_{x\theta 2} \\
 &\quad + \tau_{\theta z 2} \delta \gamma_{\theta z 2} \\
 &\quad + \tau_{xz 2} \delta \gamma_{xz 2}) dz dA
 \end{aligned} \tag{۲۵}$$

تغییر کار خارجی اعمال شده بر روی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت را می‌توان به صورت بیان کرد:

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_f &= \int_A \Delta P_2 \delta w_2 dA \\
 &= \int_A (p_2^T + p_2^R \\
 &\quad - p_3^T) \delta w_2 dA
 \end{aligned} \tag{۲۶}$$

به صورت خارج محور به مختصات روی محور انتقال یابد براساس حالت تنش صفحه‌ای، با استفاده از مدل هوک روابط ساختاری تنش- کرنش برای هر لایه با زاویه الیاف مختلف به صورت زیر بیان می‌شود [۳۴]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx2} \\ \sigma_{\theta\theta 2} \\ \tau_{x\theta 2} \\ \tau_{\theta z 2} \\ \tau_{xz 2} \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}_s \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx2} \\ \varepsilon_{\theta\theta 2} \\ \gamma_{x\theta 2} \\ \gamma_{\theta z 2} \\ \gamma_{xz 2} \end{bmatrix}_s \tag{۲۱}$$

درحالی که:

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4(\varphi) + 2(Q_{12} + \\
 &\quad 2Q_{66}) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + Q_{22} \sin^4(\varphi), \\
 \bar{Q}_{12} &= \bar{Q}_{21} = (Q_{11} + Q_{22} - \\
 &\quad 4Q_{66}) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + Q_{12} (\sin^4(\varphi) + \\
 &\quad \cos^4(\varphi)), \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4(\varphi) + 2(Q_{12} + \\
 &\quad 2Q_{66}) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + Q_{22} \cos^4(\varphi), \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - \\
 &\quad Q_{66}) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + Q_{66} (\sin^4(\varphi) + \\
 &\quad \sin^4(\varphi)), \\
 \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2(\varphi) + Q_{55} \sin^2(\varphi), \\
 \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2(\varphi) + Q_{44} \sin^2(\varphi), \\
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \\
 Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, Q_{66} = G_{12}, \\
 Q_{44} &= G_{23}, Q_{55} = G_{13}
 \end{aligned} \tag{۲۲}$$

برای به دست آوردن معادلات دینامیکی برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه مشابه قسمت قبلی از اصل همیلتون معرفی شده در رابطه ۱۲ استفاده می‌کنیم. تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} &\langle v_1, v_2, \psi_{\theta 1}, \psi_{\theta 2} \rangle = \\ &\sum_{n=0}^{\infty} e^{i(\omega t - k_x x)} \langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{\psi}_{\theta 1}, \tilde{\psi}_{\theta 2} \rangle \sin(n\theta), \\ &\langle w_1, w_2, \phi_{in}, \phi_{ex} \rangle = \\ &\sum_{n=0}^{\infty} e^{i(\omega t - k_x x)} \langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{\phi}_{in}, \tilde{\phi}_{ex} \rangle \cos(n\theta), \end{aligned}$$

درحالی که $\langle \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{\psi}_{x1}, \tilde{\psi}_{x2} \rangle$ ، $\langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{\psi}_{\theta 1}, \tilde{\psi}_{\theta 2} \rangle$ و $\langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{\phi}_{in}, \tilde{\phi}_{ex} \rangle$ بیانگر ضرایب مودال برای دو پوسته استوانه‌ای هستند و n شماره مود در جهت محیطی است.

۲-۳. شرایط سازگاری سیال/سازه

در اینجا فرض شده که سه محیط آکوستیک بیرون پوسته استوانه‌ای بزرگ‌تر و بین دو پوسته و درون پوسته کوچک‌تر حاوی هوا باشد.

براساس رابطه اندرکنش سیال-سازه، در جهت شعاعی، در دو پوسته استوانه‌ای که با سه محیط آکوستیک در تماس است، شرایط مرزی سیال/سازه باید به صورت زیر برقرار باشد [۳۶]:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (p_1^T + p_1^R) \right|_{\bar{r}=r} &= -\rho \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \\ \left. \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (p_2^T + p_2^R) \right|_{\bar{r}=r} &= -\rho \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \\ \left. \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (p_2^T + p_2^R) \right|_{\bar{r}=R} &= -\rho \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}, \\ \left. \frac{\partial p_3^T}{\partial \bar{r}} \right|_{\bar{r}=R} &= -\rho \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (30)$$

بعد از محاسبات جبری، شانزده معادله دینامیکی کوپل شده جلدسازی شده و به دسته معادلات جبری در فرم یک سیستم ماتریسی 16×16 کوپل شده به دست می‌آید.

با جایگزینی معادلات ۲۹ و ۳۰ در روابط حاکم توسعه یافته شرح داده شده در پیوست الف و ب، نتایج در اینجا به صورت زیر ارائه شده است:

در نهایت، با جایگزینی معادلات ۲۳، ۲۵ و ۲۶ در اصل همیلتون که در معادله ۱۲ آمده است، معادلات ارتعاشی کلی حرکت برای پوسته استوانه‌ای مرکب به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \delta u_2: & \frac{\partial N_{xx2}}{\partial x} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial N_{x\theta 2}}{\partial \theta} = I_{02} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \\ & I_{12} \frac{\partial^2 \psi_{x2}}{\partial t^2}, \\ \delta v_2: & \frac{\partial N_{x\theta 2}}{\partial x} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial N_{\theta\theta 2}}{\partial \theta} + \frac{Q_{\theta z 2}}{\bar{r}} = I_{02} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + \\ & I_{12} \frac{\partial^2 \psi_{\theta 2}}{\partial t^2}, \\ \delta w_1: & \frac{\partial Q_{xz 2}}{\partial x} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial Q_{\theta z 2}}{\partial \theta} - \frac{N_{\theta\theta 2}}{\bar{r}} = \\ & I_{02} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \Delta P_2, \\ \delta \psi_{x1}: & \frac{\partial M_{xx 2}}{\partial x} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial M_{x\theta 2}}{\partial \theta} - Q_{xz 2} = \\ & I_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + I_{22} \frac{\partial^2 \psi_{x2}}{\partial t^2}, \\ \delta \psi_{\theta 1}: & \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial M_{\theta\theta 2}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{x\theta 2}}{\partial x} - Q_{\theta z 2} = \\ & I_{12} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + I_{22} \frac{\partial^2 \psi_{\theta 2}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (27)$$

درحالی که:

$$\begin{aligned} [N_{xx 2}, M_{xx 2}] &= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_{xx 2} [1, z] dz, \\ [N_{x\theta 2}, M_{x\theta 2}] &= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{x\theta 2} [1, z] dz, \\ [N_{\theta\theta 2}, M_{\theta\theta 2}] &= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_{\theta\theta 2} [1, z] dz, \\ Q_{xz 2} &= k_s \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{xz 2} dz, \\ Q_{\theta z 2} &= k_s \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{\theta z 2} dz. \end{aligned} \quad (28)$$

در نهایت، با جایگزینی معادله ۲۸ (با توجه به معادلات ۲۰ و ۲۱) در معادله ۲۷، معادله تعادل برحسب جابه‌جایی در پیوست ب آمده است. همچنین، ترم‌های پتانسیل‌های الکتریکی و اجزای جابه‌جایی ساختار دو جداره می‌توانند به شکل زیر باشد [۳۵]:

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_2, \psi_{x1}, \psi_{x2} \rangle &= \\ \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(\omega t - k_x x)} \langle \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{\psi}_{x1}, \tilde{\psi}_{x2} \rangle \cos(n\theta), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{1,5} & K_{1,6} & K_{1,7} & K_{1,8} & K_{1,9} & K_{1,10} & K_{1,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{2,5} & K_{2,6} & K_{2,7} & K_{2,8} & K_{2,9} & K_{2,10} & K_{2,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} & 0 & K_{3,5} & K_{3,6} & K_{3,7} & K_{3,8} & K_{3,9} & K_{3,10} & K_{3,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{4,5} & K_{4,6} & K_{4,7} & K_{4,8} & K_{4,9} & K_{4,10} & K_{4,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{5,5} & K_{5,6} & K_{5,7} & K_{5,8} & K_{5,9} & K_{5,10} & K_{5,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{6,5} & K_{6,6} & K_{6,7} & K_{6,8} & K_{6,9} & K_{6,10} & K_{6,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{7,5} & K_{7,6} & K_{7,7} & K_{7,8} & K_{7,9} & K_{7,10} & K_{7,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{8,12} & K_{8,13} & K_{8,14} & K_{8,15} & K_{8,16} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{9,12} & K_{9,13} & K_{9,14} & K_{9,15} & K_{9,16} \\
 0 & K_{10,2} & K_{10,3} & K_{10,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{10,12} & K_{10,13} & K_{10,14} & K_{10,15} & K_{10,16} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11,12} & K_{11,13} & K_{11,14} & K_{11,15} & K_{11,16} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{12,12} & K_{12,13} & K_{12,14} & K_{12,15} & K_{12,16} \\
 K_{13,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{13,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & K_{14,2} & K_{14,3} & 0 & 0 & 0 & K_{14,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & K_{15,2} & K_{15,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{15,14} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & K_{16,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{16,14} & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

(۳۱)

$$\begin{pmatrix}
 \bar{P}_{1n}^R \\
 \bar{P}_{2n}^T \\
 \bar{P}_{2n}^R \\
 \bar{P}_{3n}^T \\
 \tilde{u}_1 \\
 \tilde{v}_1 \\
 \tilde{w}_1 \\
 \psi_{x1} \\
 \psi_{\theta1} \\
 \bar{\phi}_{in} \\
 \bar{\phi}_{ex} \\
 \tilde{u}_2 \\
 \tilde{v}_2 \\
 \tilde{w}_2 \\
 \psi_{x2} \\
 \psi_{\theta2}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 f_3 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 f_{13} \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}$$

توان صوت ورودی و توان صوت عبوری از سازه است که به صورت زیر نشان داده می شود [۳۵]:

$$\begin{aligned}
 \Pi^{tr} &= \sum_n^{\infty} \frac{\pi R}{\varepsilon_n} \operatorname{Re} \left[\bar{P}_{3n}^T H_n^{(1)}(k_{3r} R_2) (i\omega \tilde{w}_2)^* \right], \quad (33) \\
 \Pi^{inc} &= \frac{r p_0^2}{\rho c} \cos \alpha \tau = \frac{\Pi^{tr}}{\Pi^{inc}},
 \end{aligned}$$

۴. نتایج عددی

در جدول ۱ خواص مواد به کار برده شده در این پژوهش علاوه بر موارد زیر آورده شده است:

$$\begin{aligned}
 r &= 1.84\text{m}, R = 1.8\text{m}, h = 1\text{mm}, H = 1\text{mm}, h_p \\
 &= 0.2\text{mm},
 \end{aligned}$$

که در آن درایه های ماتریس در پیوست ج بیان شده است.

۳. افت انتقال صوت

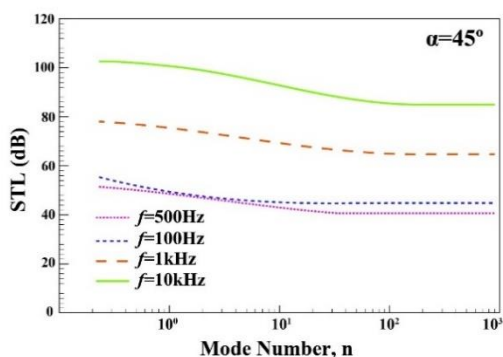
افت انتقال صوت بیانگر نسبت لگاریتمی از شدت توان صوت گذر کرده از پوسته استوانه ای دوجداره به شدت توان صوت برخوردی به آن است. رابطه زیر برای محاسبه افت انتقال صوت در پوسته مورد استفاده قرار می گیرد [۳۵]:

$$\text{STL} = 10 \log \frac{1}{\tau} \quad (32)$$

در حالی که τ فاکتور انتقالی توان صوت است که بیانگر نسب توان صوت گذر کرده از پوسته استوانه ای دوجداره به توان صوت برخوردی به آن است و Π^{tr} و Π^{inc} به ترتیب بیانگر

جدول ۱. خواص مکانیکی مواد

PZT-4		مشخصات (وصله پیزوالکتریک)
$c_{11} = 132, c_{12} = 71, c_{22} = 132,$ $c_{13} = 73, c_{33} = 115, c_{66} = 30.5$		ثوابت الاستیک (GPa)
$e_{31} = -4.1, e_{32} = -4.1,$ $e_{24} = 10.5, e_{15} = 10.5$		ثوابت پیزوالکتریک ($C m^{-2}$)
$\kappa_{11} = 5.841, \kappa_{22} = 5.841, \kappa_{33} = 7.124$		دی الکتریک ($10^{-9} C V^{-1} m^{-1}$)
$\rho_p = 5550$		چگالی جرمی (kg/m^3)
فلز	سرامیک	مشخصات هسته
$E_m = 70$	$E_c = 390$	ثوابت الاستیک (GPa)
$\nu_m = 0.3$	$\nu_c = 0.24$	نسبت پواسون
$\rho_c = 3960$	$\rho_m = 2700$	چگالی جرمی (kg/m^3)
گرافیت / اپوکسی		مشخصات لایه کامپوزیت
$E_1 = 181, E_2 = 103, G_{12} = 7.17, G_{13} = 7.17, G_{23} = 2.87$		ثوابت الاستیک (GPa)
$\nu_{12} = 0.28$		نسبت پواسون
$\rho_s = 1580$		چگالی جرمی (kg/m^3)
هوا		مشخصات محیط آکوستیک
$c_0 = 343$		سرعت صوت (m/s)
$\rho_0 = 1.21$		چگالی جرمی (kg/m^3)



شکل ۲. هم‌گرایی افت انتقال صوت تحت شماره مودها

۴-۱. نتایج هم‌گرایی

در این قسمت هم‌گرایی نتایج ناشی از افت انتقال صوت برای فرکانس‌های تحریک خاص ($f = 100, 500, 1k$) برای $10k Hz$ برای زاویه برخورد ($\alpha = 45^\circ$) نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود با افزایش فرکانس تحریک، شماره مود بیشتری برای هم‌گرایی نتایج نیاز است. براساس شکل ۲، ۲۴۰ مود برای رسیدن به هم‌گرایی در بازه فرکانسی بالا نیاز است.

۴-۲. اعتبارسنجی نتایج

محاسبه $\omega_{dimensionless} = \omega R \sqrt{(1 - \nu^2)} \rho / E$ می‌شود برای یک پوسته استوانه‌ای الاستیکی به دست آورده شده و در جدول ۲ با مراجع [۳۷ و ۳۸] مقایسه شده است. همان‌گونه که مشخص است نتایج از دقت بالایی برخوردار هستند.

قبل از ارائه نتایج نیاز است که صحت و درستی روابط استخراج شده نشان داده شود. در این قسمت در ابتدا با حذف ترم فشار آکوستیک و وصله‌های پیزوالکتریک، ده فرکانس طبیعی بدون بعد ($\omega_{dimensionless}$) که از رابطه

جدول ۲. اعتبارسنجی فرکانس طبیعی بدون بعد یک پوسته استوانه‌ای الاستیک

n	Ref. [۳۷]	Ref. [۳۸]	Present
۱	۰/۰۱۶۸	۰/۰۱۶۱	۰/۰۱۶۱
۲	۰/۰۰۹۷	۰/۰۰۹۳	۰/۰۰۹۴
۳	۰/۰۲۳۰	۰/۰۲۲۱	۰/۰۲۲۱
۴	۰/۰۴۲۹	۰/۰۴۲۱	۰/۰۴۲۱
۵	۰/۰۷۰۹	۰/۰۶۸۱	۰/۰۶۸۰
۶	۰/۱۰۴۱	۰/۰۹۹۷	۰/۰۹۹۷
۷	۰/۱۴۳۳	۰/۱۳۷۲	۰/۱۳۷۱
۸	۰/۱۸۸۵	۰/۱۸۰۵	۰/۱۸۰۳
۹	۰/۲۲۹۷	۰/۲۲۹۶	۰/۲۲۹۳
۱۰	۰/۲۹۶۰	۰/۲۸۴۴	۰/۲۸۳۹

سوم و حالت FSĐT بیانگر نظریه برشی مرتبه اول است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نظریه کلاسیک با توجه به اینکه اثرات برشی را در نظر نمی‌گیرد دارای اختلاف بیشتری با نتایج برشی مرتبه اول و سوم است.

در اعتبارسنجی بعدی، فرکانس طبیعی‌های بدون بعد را برای دو حالت دولایه و سه لایه با زاویه الیاف متعامد را به دست آورده و با مرجع [۳۹] در جدول ۳ مقایسه کرده‌ایم. قابل توجه است که حالت CT بیانگر نتایج ناشی از تئوری کلاسیک پوسته‌ها است، حالت HSĐT بیانگر نظریه برشی مرتبه

جدول ۳. اعتبارسنجی فرکانس طبیعی بدون بعد یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تحت لایه‌چینی مختلف

Lamination	L/R	CT [۳۹]	HSĐT [۳۹]	FSĐT [۳۹]	present
$(0^\circ, 90^\circ)$	۱	۰/۰۸۶۶	۰/۰۸۰۴	۰/۰۷۹۱	۰/۰۷۶۵
	۲	۰/۱۶۳۰	۰/۱۵۶۶	۰/۱۵۵۲	۰/۱۴۰۵
$(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$	۱	۰/۱۴۷۹	۰/۱۰۰۷	۰/۱۰۰۴	۰/۱۰۰۲
	۲	۰/۲۰۷۳	۰/۱۷۷۷	۰/۱۷۷۹	۰/۱۷۲۸

در مرحله بعدی فرکانس طبیعی را برای یک پوسته استوانه‌ای پیزوالکتریک با فرض $\beta_p = 2\pi$ به دست آورده و با نتایج گزارش شده توسط [۴۰] در جدول ۴ برحسب شماره

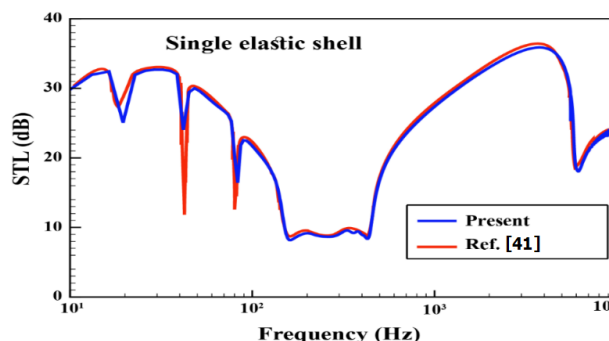
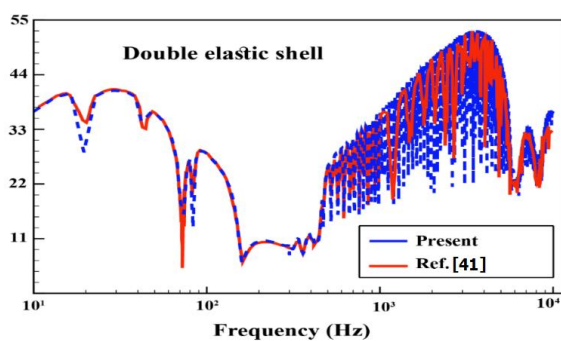
مود مقایسه شده است. قابل توجه است که در این جدول n شماره مود است. همان گونه که مشاهده می‌شود نتایج ارائه شده در این قسمت از دقت قابل قبولی برخوردار هستند.

جدول ۴. اعتبارسنجی فرکانس طبیعی با بعد یک پوسته استوانه‌ای پیزوالکتریک

Study	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
Ref. [۴۰]	۰/۴۵۸۳	۰/۲۴۳۳	۰/۵۳۰۱	۱/۰۰۳۹
present	۰/۴۵۸۲	۰/۲۳۹۸	۰/۴۸۰۶	۰/۹۰۸۶

برای صحت‌سنجی نتایج ناشی از افت انتقال صوت، با حذف خواص مواد کامپوزیتی و وصله‌های پیزوالکتریک، افت انتقال صوت را در دو حالت پوسته استوانه‌ای آلومینیوم تک جداره و دوجداره غوطه‌ور شده در محیط سیال هوا هنگامی که زاویه برخورد موج صوت $\alpha = 45^\circ$ است در محدوده

فرکانسی مشخص به دست آورده و با نتایج گزارش شده توسط مرجع [۴۱] در شکل ۳ مقایسه کرده‌ایم. قابل توجه است که مرجع ذکر شده از تئوری میدان جابه‌جایی کلاسیک پوسته‌ها استفاده کرده است. همان‌طور که از این شکل مشخص است نتایج از دقت بالایی برخوردار هستند.



شکل ۳. مقایسه افت انتقال صوت یک و دو پوسته استوانه‌ای در بازه فرکانسی

۳-۴. نتایج اصلی

در شکل ۴ اثرات زاویه موج برخوردی بر تغییرات افت انتقال صوت در پوسته استوانه‌ای دو جداره تشکیل شده از وصله‌های پیزوالکتریک همراه با هسته مواد تابعی به‌عنوان پوسته بیرونی و پوسته کامپوزیتی با دولایه چینی به‌عنوان پوسته داخلی محدوده فرکانسی مشخص $(10 < f < 10000\text{Hz})$ با فرض $p = 1, N = 2, \beta_p = 15^\circ, (0^\circ, 90^\circ), V = 0$ مورد بررسی قرار گرفته است. قابل ذکر است که در رفتار

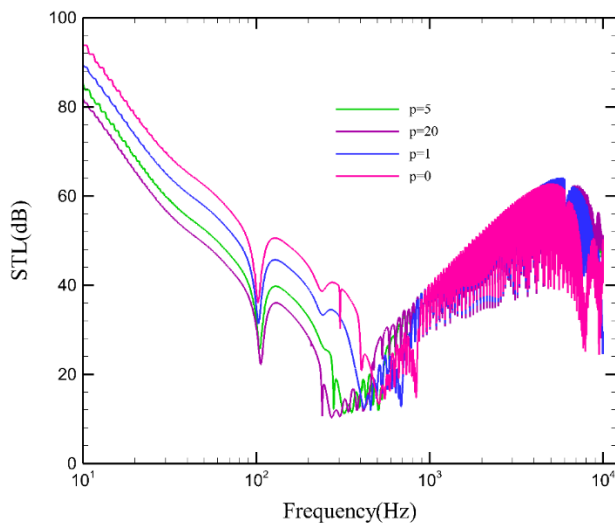
ویبروآکوستیک پوسته‌های استوانه‌ای دو فرکانس بسیار مهم وجود دارد که در این دو نقطه افت انتقال صوت کمینه است و هر کدام از این نقاط ویژگی‌های خاص خود را دارند که عبارت هستند از: فرکانس رینگ (f_r) اولین فرکانس ظاهر شده در محدوده فرکانسی است که در آن محیط پوسته با طول موج طولی آن برابر می‌شود. این فرکانس همیشه مستقل از زاویه برخورد بوده است، فرکانس بعدی فرکانس بحرانی (f_c) است که با یکسان شدن مؤلفه شعاعی عدد موج صوت با عدد موج محیطی پوسته متناظر است. این فرکانس

تشکیل شده از وصله‌های پیزوالکتریک همراه با هسته مواد تابعی به‌عنوان پوسته بیرونی و پوسته کامپوزیتی با دو لایه چینی به‌عنوان پوسته داخلی محدوده فرکانسی مشخص ($10 < f < 10000\text{Hz}$) با فرض

$$N = 2, \beta_p = 15^\circ, (0^\circ, 90^\circ), \alpha = 45^\circ, V = 0$$

پرداخته شده است.

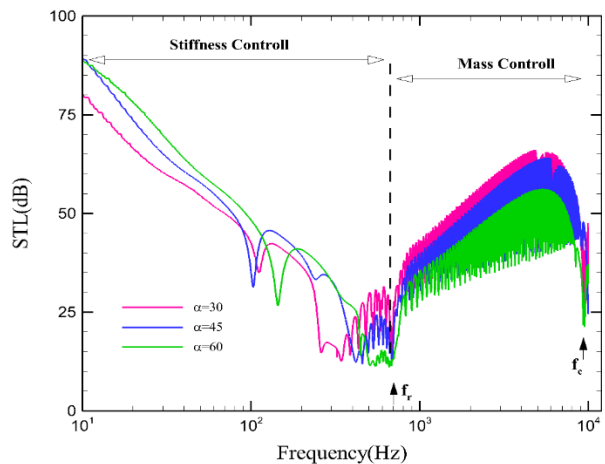
نکات مهم به‌دست آمده از شکل ۵ این است که با افزایش پارامتر ایندکس تابع توانی، از آنجا که خواص مکانیکی سازه به‌تدریج از سرامیک به فلز میل می‌کند و سختی سازه کمتر می‌شود بنابراین در ناحیه ابتدایی فرکانسی که ناحیه کنترل سختی نامیده می‌شود، افت انتقال صوت کمتر می‌شود درحالی‌که در ناحیه بین فرکانس رینگ f_r و فرکانس بحرانی f_c که به آن ناحیه کنترل جرم گفته می‌شود، افت انتقال صوت با افزایش پارامتر ایندکس تابع توانی افزایش پیدا می‌کند به‌علاوه مشخص است که مکان دو فرکانس رینگ و بحرانی به تغییرات ایندکس تابع توانی بستگی دارد.



شکل ۵. اثرات ایندکس تابع توانی بر افت انتقال صوت

در شکل ۶ اثرات ولتاژ الکتریکی اعمال شده از سوی وصله‌های پیزوالکتریک بیرونی در پوسته استوانه‌ای خارجی بر تغییرات افت انتقال صوت در پوسته استوانه‌ای دو جداره

تنها در صورت حضور جریان سیال در خارج از پوسته به زاویه برخورد وابسته است، در شکل ۴، مکان این دو فرکانس مشخص شده است. در پدیده افت انتقال صوت هرچقدر میزان دامنه افت انتقال صوت بیشتر باشد صدا کمتر به درون پوسته نفوذ می‌کند. همچنین دو ناحیه کنترل سختی و کنترل جرم شکل مشخص شده است که در ناحیه کنترل سختی که از فرکانس تحریک آغازی شروع می‌شود و تا فرکانس رینگ ادامه دارد اثرات سختی سازه بر بهبود افت انتقال صوت گذر کرده از سازه مؤثر هستند درحالی‌که در ناحیه کنترل جرم که از فرکانس رینگ شروع و تا فرکانس بحرانی ادامه دارد اثرات جرم سازه بیشتر بر روند ویبروآکوستیک در پوسته‌های استوانه‌ای مؤثر است. از شکل ۴ مشخص است که با افزایش زاویه برخورد تا ناحیه فرکانس رینگ، افت انتقال صوت افزایش پیدا می‌کند درحالی‌که در ناحیه بین دو فرکانس رینگ و بحرانی، افت انتقال صوت با افزایش زاویه برخورد کمتر می‌شود. از طرفی مشاهده می‌شود همان‌گونه که بیان شد مکان فرکانس‌های رینگ و بحرانی مستقل از زاویه برخورد امواج آکوستیک است.

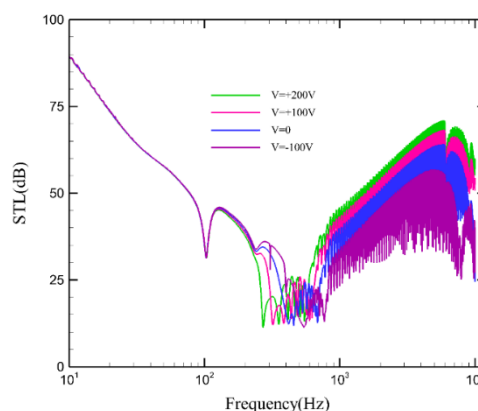


شکل ۴. اثرات زاویه برخورد موج آکوستیک بر افت انتقال صوت

در شکل ۵ به بررسی اثرات ایندکس تابع توانی که نشانگر میزان خواص مکانیکی سازه ترکیبی از فلز و سرامیک است بر تغییرات افت انتقال صوت در پوسته استوانه‌ای دو جداره

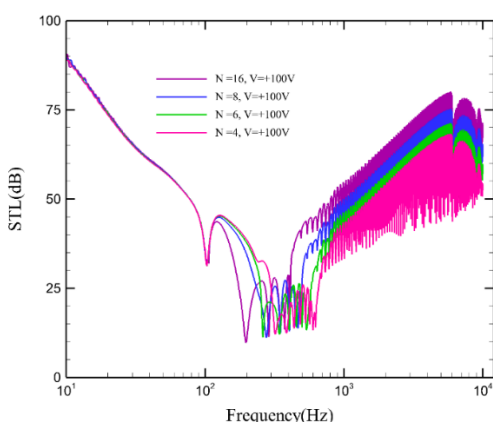
تشکیل شده از وصله‌های پیزوالکتریک همراه با هسته مواد تابعی به‌عنوان پوسته بیرونی و پوسته کامپوزیتی با دو لایه چینی به‌عنوان پوسته داخلی محدوده فرکانسی مشخص ($10 < f < 10000\text{Hz}$) با فرض

$N = 2, \beta_p = 15^\circ, (0^\circ, 90^\circ), \alpha = 45^\circ, p = 1$ پرداخته شده است. همان‌گونه که دیده می‌شود فرکانس رینگ با افزایش ولتاژ الکتریکی به سمت چپ محور افقی میل می‌کند درحالی‌که با افزایش ولتاژ الکتریکی فرکانس بحرانی به سمت راست میل کرده و ناحیه نوسانی بیشتر شده است.

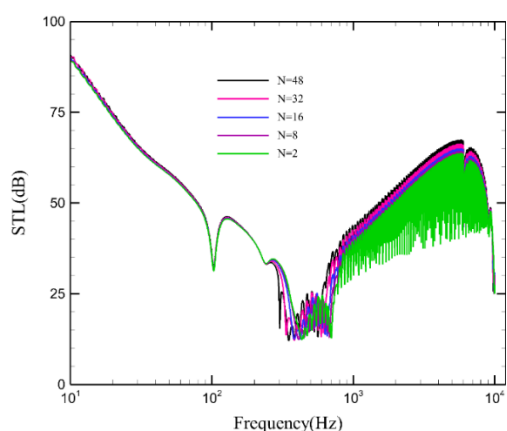


شکل ۶. اثرات ولتاژ الکتریکی اعمالی از طرف وصله‌های پیزوالکتریک بر افت انتقال صوت

در شکل‌های ۷ و ۸ اثرات تعداد وصله‌های پیزوالکتریک به‌کار رفته در پوسته استوانه‌ای بیرونی بر تغییرات افت انتقال صوت سازه با فرض ($10 < f < 10000\text{Hz}$) و $\beta_p = 5^\circ, (0^\circ, 90^\circ), \alpha = 45^\circ, p = 1$ است. قابل‌توجه است که در شکل ۷ ولتاژ الکتریکی اعمال شده از طرف وصله‌های پیزوالکتریک صفر بوده درحالی‌که در شکل ۸ مقدار ولتاژ الکتریکی ۱۰۰ ولت بوده است. در شکل ۷ مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد وصله‌های پیزوالکتریک، افت انتقال صوت مخصوصاً در ناحیه کنترل جرم که ناحیه بین فرکانس رینگ f_r و فرکانس بحرانی f_c بوده است افت بیشتر می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد وصله‌های پیزوالکتریک، فرکانس رینگ f_r به سمت چپ محور افقی میل می‌کند با دقت در شکل ۸ مشاهده می‌شود هنگامی‌که سازه تحت ولتاژ الکتریکی اعمال شده از طرف وصله‌های پیزوالکتریک است، تغییرات تعداد وصله‌های پیزوالکتریک بیشتر بر افت انتقال صوت اثر دارد و افت انتقال صوت را خصوصاً در ناحیه فرکانس بالا بیشتر می‌کند از طرفی اثر تعداد وصله‌های پیزوالکتریک بر جابه‌جایی مکان فرکانس رینگ در حضور میدان الکتریکی بیشتر بوده است.



شکل ۸. اثرات تعداد وصله‌های پیزوالکتریک بر افت انتقال صوت وقتی ولتاژ ۱۰۰ باشد

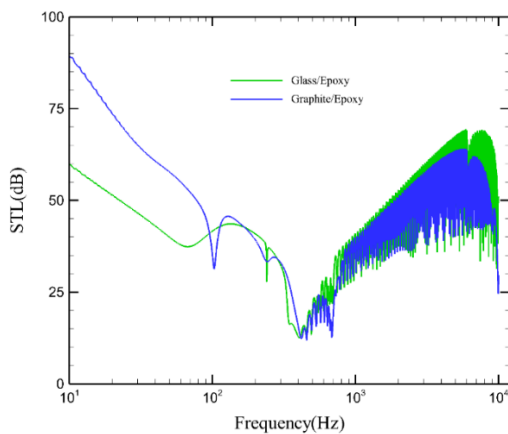


شکل ۷. اثرات تعداد وصله‌های پیزوالکتریک بر افت انتقال صوت وقتی ولتاژ صفر باشد

در شکل ۱۰، اثرات نوع ماده کامپوزیتی استفاده شده در پوسته استوانه‌ای داخلی بر افت انتقال صوت گذر کرده از سازه در محدوده فرکانسی مشخصی با فرض اینکه: $N = 2, \beta_p = 15^\circ, V = 0, (0^\circ, 90^\circ), \alpha = 45^\circ, p = 1$ نشان داده شده است. خواص ماده گلس / اپوکسی به صورت زیر است:

$$E_1 = 38.6GPa, E_2 = 8.2GPa, G_{12} = 4.2GPa, G_{13} = 4.2GPa, G_{23} = 3.45GPa, \rho_s = 1900 \text{ kg/m}^3$$

از آنجا که گرافیت / اپوکسی دارای سختی بیشتری نسبت به گلس / اپوکسی است، بنابراین در ناحیه کنترل سختی که ناحیه قبل از فرکانس رینگ f_r است، افت انتقال صوت بیشتر شده در حالی که در ناحیه کنترل جرم که ناحیه بین دو فرکانس رینگ f_r و فرکانس بحرانی f_c است، افت انتقال صوت کمتر می‌شود. همان‌گونه که از شکل مشخص است، افت انتقال صوت در ناحیه کنترل سختی افزایش پیدا می‌کند.



شکل ۱۰. اثرات نوع ماده کامپوزیتی بر افت انتقال صوت

نهایتاً در شکل ۱۱، اثرات نوع لایه‌چینی الیاف به کار رفته در پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی داخلی بر افت انتقال صوت گذر کرده از سازه در محدوده فرکانسی مشخصی با فرض $N = 2, \beta_p = 15^\circ, V = 0, \alpha = 45^\circ, p = 1$ نشان داده شده است. بدین صورت که سه حالت لایه‌چینی دو

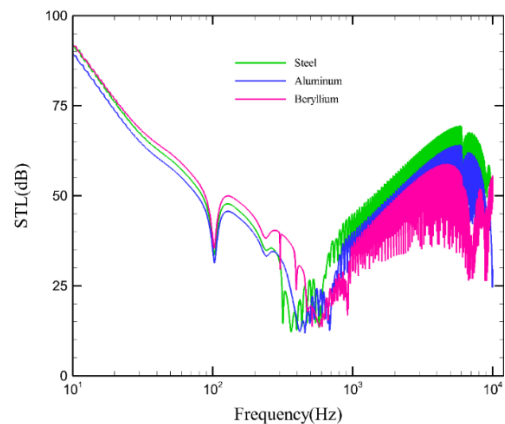
در شکل ۹ به بیان اثرات فلز به کار رفته در مواد تابعی استفاده شده در پوسته بیرونی بر افت انتقال صوت گذر کرده از سازه در محدوده فرکانسی مشخصی با فرض $N = 2, \beta_p = 15^\circ, V = 0, (0^\circ, 90^\circ), \alpha = 45^\circ, p = 1$ پرداخته شده است. در این قسمت اثرات سه فلز آلومینیوم، فولاد و بریلیوم بر تغییرات افت انتقال صوت نشان داده شده است. خصوصیات مکانیکی فولاد به صورت زیر است:

$$E_m = 210GPa, \nu_m = 0.3, \rho_m = 7800 \text{ kg/m}^3$$

در حالی که خصوصیات مکانیکی بریلیوم به صورت زیر است:

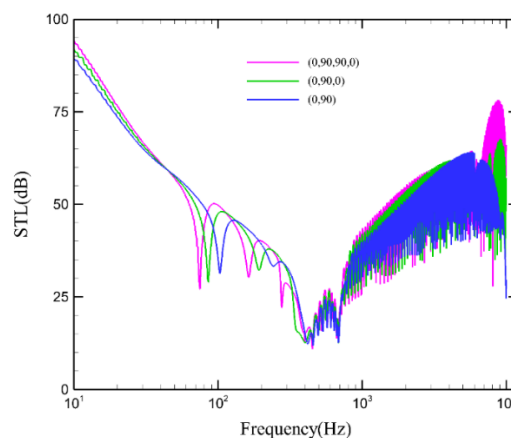
$$E_m = 310GPa, \nu_m = 0.032, \rho_m = 1850 \text{ kg/m}^3$$

همان‌گونه که از این شکل مشخص است هنگامی که فاز فلز استفاده شده در هسته مواد تابعی از جنس بریلیوم باشد به دلیل داشتن مدول الاستیسیته بالا در ناحیه کنترل سختی که ناحیه قبل از فرکانس رینگ f_r است، افت انتقال صوت بیشتر شده در حالی که در ناحیه کنترل جرم که ناحیه بین دو فرکانس رینگ f_r و فرکانس بحرانی f_c است، افت انتقال صوت بیشتر می‌شود. به علاوه فولاد دارای بیشترین چگالی جرمی است که در ناحیه کنترل جرم دارای بیشترین مقدار افت انتقال صوت است. همچنین مشاهده می‌شود که بریلیوم دارای بیشترین مقدار فرکانس رینگ و کمترین فرکانس بحرانی است.



شکل ۹. اثرات فلز به کار رفته در مواد تابعی بر افت انتقال صوت

لایه $(0^\circ, 90^\circ)$ ، سه لایه $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$ و چهار لایه $(0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$ بر تغییرات افت انتقال صوت در سازه در نظر گرفته شده است. مشاهده می‌شود با افزایش لایه‌چینی الیاف، سختی سازه افزایش پیدا کرده و افت انتقال صوت بیشتر شده و صدا کمتر از سازه عبور می‌کند. همچنین دیده می‌شود با افزایش لایه‌چینی الیاف، فرکانس رینگ تغییر محسوسی ندارد در حالی که فرکانس بحرانی بیشتر تغییر پیدا می‌کند.



شکل ۱۱. اثرات لایه‌چینی الیاف به کار رفته در پوسته کامپوزیتی بر افت انتقال صوت

۵. نتیجه گیری

در پژوهش حاضر، به بررسی رفتار ویبروآکوستیک پوسته استوانه‌ای دوجداره که مابین آنها هوا وجود دارد و از دو پوسته هم‌مرکز مواد تابعی همراه با وصله‌های پیزوالکتریک و پوسته کامپوزیتی چندلایه تشکیل شده است، پرداخته شد. با استفاده از نظریه میدان برشی مرتبه اول همراه با روابط ماکسول مربوط به مواد پیزوالکتریک، در ابتدا معادلات ساختاری پوسته استوانه‌ای تشکیل شده از مواد تابعی همراه با وصله‌های پیزوالکتریک به دست آمد و سپس با استفاده از سختی‌های اصلاح شده برای کامپوزیت‌ها و استفاده از روابط تنش کرنش و نهایتاً اصل همپلتون معادلات ساختاری آکوستیکی - دینامیکی برای پوسته استوانه‌ای تشکیل شده از کامپوزیت چندلایه به دست آمد.

برای مدل‌سازی مواد تابعی و به دست آوردن خواص مکانیکی مانند مدول الاستیسیته و چگالی که از ترکیب خواص دو ماده فلز و سرامیک تشکیل شده‌اند از مدل تابع توانی که تغییرات خواص را در جهت ضخامت پوسته مشخص می‌کند استفاده شد. از طرفی دیگر با استفاده از شرایط مرزی سیال/سازه در سه محیط آکوستیک بیرون پوسته اول و بین دو پوسته و داخل پوسته دوم، یک سری معادلات کوپلینگ سیال سازه به دست آمد که جمعاً با معادلات دینامیکی به دست آمده از اصل همپلتون برای دو پوسته، معادلات دینامیکی جزئی کل سیستم را تشکیل دادند.

با استفاده از بسط‌های سری فوریه، معادلات دینامیکی جزئی خطی به دسته معادلات جبری تبدیل می‌شود که با حل معادله جبری و به دست آوردن ترم‌های فشار صوت خروجی از پوسته داخلی و جابه‌جایی عرضی دو پوسته استوانه‌ای، افت انتقال صوت در پوسته دوجداره استوانه‌ای تعیین شد. برخی از مهم‌ترین نتایج حاصل شده از این پژوهش عبارت است از:

- ولتاژ اعمالی قادر به بهبود افت انتقال صوت در سازه خصوصاً در نواحی فرکانس بالا بوده است.
- با افزایش زاویه برخورد تا ناحیه فرکانس رینگ، افت انتقال صوت افزایش پیدا می‌کند در حالی که در ناحیه بین دو فرکانس رینگ و بحرانی، افت انتقال صوت با افزایش زاویه برخورد کمتر می‌شود.
- با افزایش پارامتر ایندکس تابع توانی، از آنجا که خواص مکانیکی سازه به تدریج از سرامیک به فلز میل می‌کند و سختی سازه کمتر می‌شود بنابراین در ناحیه ابتدایی فرکانسی که ناحیه کنترل سختی نامیده می‌شود، افت انتقال صوت کمتر می‌شود در حالی که در ناحیه بین فرکانس رینگ و فرکانس بحرانی که به آن ناحیه کنترل جرم گفته می‌شود، افت انتقال صوت با افزایش پارامتر ایندکس تابع توانی افزایش پیدا می‌کند.

- در ناحیه فرکانس پایین اثرات افزایش زاویه انحنای وصله‌های پیزوالکتریک کم بوده درحالی که اثرات آن بیشتر در ناحیه فرکانس بالا و بعد از فرکانس رینگ بر افت انتقال صوت مشهود می‌شود. بدین صورت که با افزایش زاویه انحناء افت انتقال صوت بیشتر شده و صدا کمتر از سازه عبور می‌کند.
- با افزایش لایه چینی الیاف سختی سازه افزایش پیدا کرده و افت انتقال صوت بیشتر شده و صوت کمتر از سازه عبور می‌کند.
- با افزایش تعداد وصله‌های پیزوالکتریک، افت انتقال صوت مخصوصا در ناحیه کنترل جرم که ناحیه بین فرکانس رینگ f_r و فرکانس بحرانی f_c بیشتر شده است.
- با افزایش لایه چینی الیاف، سختی سازه افزایش پیدا کرده و افت انتقال صوت بیشتر شده و صدا کمتر از سازه عبور می‌کند.

۶. مآخذ

- [1] Bai, Yong, and Wei-Liang Jin, "Ultimate strength of cylindrical shells" *Marine Structural Design*, 2016, pp.353-65.
- [2] Xie, M. X., H. L. Chen, J. H. Wu, and F. G. Sun, "Application of energy finite element method to high-frequency structural-acoustic coupling of an aircraft cabin with truncated conical shape", *Computer Modeling in Engineering & Sciences (CMES)*, 2010, Vol.61, no.1, pp.1-22.
- [3] Yang, Yi, Brian R. Mace, and Michael J. Kingan, "Prediction of sound transmission through, and radiation from, panels using a wave and finite element method", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2017, Vol.141, no.4, pp.2452-2460.
- [4] Li, Chengxi, Bryce K. Campbell, Yuming Liu, and Dick KP Yue, "A fast multi-layer boundary element method for direct numerical simulation of sound propagation in shallow water environments", *Journal of Computational Physics*, 2019, Vol.392 pp.694-712.
- [5] Zhou, Jie, Atul Bhaskar, and Xin Zhang, "Sound transmission through a double-panel construction lined with poroelastic material in the presence of mean flow", *Journal of Sound and Vibration*, 2013, Vol.332, no.16, pp.3724-3734.
- [6] Talebitooti, R., and M. R. Zarastvand, "Vibroacoustic behavior of orthotropic aerospace composite structure in the subsonic flow considering the Third order Shear Deformation Theory", *Aerospace Science and Technology*, 2018, Vol.75, pp.227-236.
- [7] Mei-xia, Chen, Luo Dong-ping, Chen Xiao-ning, and Shen Rui-xi, "Analytical solution of radiation sound pressure of double cylindrical shells in fluid medium", *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, Vol.23, no.4 pp.463-470.
- [8] Talebitooti, R., and AM Choudari Khameneh, "Wave propagation across double-walled laminated composite cylindrical shells along with air-gap using three-dimensional theory", *Composite Structures*, 2017, Vol.165, pp.44-64.
- [9] Zhang, Qunlin, Yijun Mao, and Datong Qi, "Effect of perforation on the sound transmission through a double-walled cylindrical shell", *Journal of Sound and Vibration*, 2017, Vol.410, pp.344-363.
- [10] Zhou, Jie, Atul Bhaskar, and Xin Zhang "The effect of external mean flow on sound transmission through double-walled cylindrical shells lined with poroelastic material", *Journal of Sound and Vibration*, 2014, Vol.333, no.7, pp.1972-1990.
- [11] Talebitooti, R., and H. D. Gohari, "Optimization of Sound transmission through composite cylinder with poroelastic core considering VCM", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2020, Vol.27, no.3, pp.238-249.

- [12] Talebitooti, R., M. R. Zarastvand, and M. R. Gheibi, "Acoustic transmission through laminated composite cylindrical shell employing third order shear deformation theory in the presence of subsonic flow", *Composite Structures*, 2016, Vol.157, pp.95-110.
- [13] Talebitooti, R., K. Daneshjou, and A. Tarkashvand, "Study of imperfect bonding effects on sound transmission loss through functionally graded laminated sandwich cylindrical shells", *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, Vol.133, pp.469-483.
- [14] Ahmadi, Mastaneh, Mostafa Talebitooti, and Roohollah Talebitooti, "Analytical investigation on sound transmission loss of functionally graded nanocomposite cylindrical shells reinforced by carbon nanotubes", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2020, pp.1-18.
- [15] Hasheminejad, Seyyed M., Masoud Cheraghi, and Ali Jamalpoor, "Active damping of sound transmission through an electrorheological fluid-actuated sandwich cylindrical shell", *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 2020, Vol.22, no.3, pp.833-865.
- [16] Reaei, Sh, A. Tarkashvand, and R. Talebitooti "Applying a functionally graded viscoelastic model on acoustic wave transmission through the polymeric foam cylindrical shell", *Composite Structures*, Vol.244, 2020, p.112261.
- [17] Parrinello, A., K. Kesour, G. L. Ghiringhelli, and N. Atalla, "Diffuse field transmission through multilayered cylinders using a Transfer Matrix Method", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, Vol.136, p.106514.
- [18] Oliazadeh, Pouria, Anooshiravan Farshidianfar, and Malcolm J. Crocker, "Experimental and analytical investigation on sound transmission loss of cylindrical shells with absorbing material", *Journal of Sound and Vibration*, 2018, Vol.434, pp.28-43.
- [19] Lee, Joon-Hyun, and J. Kim, "Study on sound transmission characteristics of a cylindrical shell using analytical and experimental models", *Applied acoustics*, 2003, Vol.64, no.6, pp.611-632.
- [20] Shojaeefard, MOHAMMAD HASSAN, R. O. U. H. O. L. L. A. H. Talebitooti, R. E. Z. A. Ahmadi, and MOHAMMAD REZA Gheibi, "Sound transmission across orthotropic cylindrical shells using third-order shear deformation theory", *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2014, Vol.11, pp.2039-2072.
- [21] Daneshjou, K., R. Talebitooti, and A. Tarkashvand, "Analysis of sound transmission loss through thick-walled cylindrical shell using three-dimensional elasticity theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, Vol.106, pp.286-296.
- [22] Talebitooti, R., R. Ahmadi, and M. H. Shojaeefard, "Three-Dimensional wave propagation on orthotropic cylindrical shells with arbitrary thickness considering state space method," *Composite Structures*, 2015, Vol.132, pp.239-254.
- [23] Magniez, Julien, Jean-Daniel Chazot, Mohamed Ali Hamdi, and Bernard Troclet, "A mixed 3D-Shell analytical model for the prediction of sound transmission through sandwich cylinders", *Journal of Sound and Vibration*, 2014, Vol.333, no.19, pp.4750-4770.
- [24] Liu, Yu, and Chuanbo He, "Diffuse field sound transmission through sandwich composite cylindrical shells with poroelastic core and external mean flow", *Composite Structures*, 2016, Vol.135, pp.383-396.
- [25] Golzari, Masoud, and Ali Asghar Jafari, "Sound transmission loss through triple-walled cylindrical shells with porous layers", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2018, Vol.143, no.6, pp.3529-3544.

[۲۶] الهامی و آذریون، "افت انتقال صوت در یک پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی با وصله‌های بی‌زوالکتریکه" *فصلنامه مکانیک هوافضا*، ۲۰۲۲.

- [27] Liu, Yu, and Chuanbo He, "Diffuse field sound transmission through sandwich composite cylindrical shells with poroelastic core and external mean flow", *Composite Structures*, 2016, Vol.135, pp.383-396.
- [28] Leissa, Arthur W., "Vibration of shells, scientific and technical information office", *National Aeronautics and Space Administration*, 1973, Vol.288.
- [29] Lu, Lu, Li Zhu, Xingming Guo, Jianzhong Zhao, and Guanzhong Liu, "A nonlocal strain gradient shell model incorporating surface effects for vibration analysis of functionally graded cylindrical nanoshells", *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, Vol.40, no.12, pp.1695-1722.
- [30] Zippo, Antonio, Marco Barbieri, Giovanni Iarriccio, and Francesco Pellicano, "Nonlinear vibrations of circular cylindrical shells with thermal effects: an experimental study", *Nonlinear Dynamics*, 2020, Vol.99, no.1, pp.373-391.
- [31] Mohamadi, Arash, Majid Shahgholi, and Faramarz Ashenai Ghasemi, "Nonlinear vibration of axially moving simply-supported circular cylindrical shell", *Thin-Walled Structures*, 2020, Vol.156, p.107026.
- [32] Hussain, Muzamal, Muhammad Nawaz Naeem, and Mohammad Reza Isvandzibaei, "Effect of Winkler and Pasternak elastic foundation on the vibration of rotating functionally graded material cylindrical shell", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2018, Vol.232, no.24, pp.4564-4577.
- [33] Leissa, Arthur W. "Vibration of shells, scientific and technical information office", *National Aeronautics and Space Administration*, 1973, Vol.288.
- [34] Zheng, Dayuan, Jingtao Du, and Yang Liu, "Vibration characteristics analysis of an elastically restrained cylindrical shell with arbitrary thickness variation", *Thin-Walled Structures*, 2021, Vol.165, p.107930.
- [35] Liu, Yu, and Chuanbo He, "Diffuse field sound transmission through sandwich composite cylindrical shells with poroelastic core and external mean flow", *Composite Structures*, 2016, Vol.135, pp.383-396.
- [36] Wang, Xu, "Transient responses of laminated anisotropic piezothermoelastic plates and cylindrical shells with interfacial diffusion and sliding in cylindrical bending", *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2019, Vol.24, no.4, pp.1065-1090.
- [37] Pradhan, S. C., C. T. Loy, K. Y. Lam, and J. N. Reddy, "Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions", *Applied Acoustics*, 2000, Vol.61, no.1, pp.111-129.
- [38] Soldatos, K. P., and V. P. Hadjigeorgiou, "Three-dimensional solution of the free vibration problem of homogeneous isotropic cylindrical shells and panels", *Journal of sound and vibration*, 1990, Vol.137, no.3, pp.369-384.
- [39] Khdeir, A. A., J. N. Reddy, and D. Frederick, "A study of bending, vibration and buckling of cross-ply circular cylindrical shells with various shell theories", *International Journal of Engineering Science*, 1989, Vol.27, no.11, pp.1337-1351.
- [40] Ke, L. L., Y. S. Wang, and J. N. Reddy, "Thermo-electro-mechanical vibration of size-dependent piezoelectric cylindrical nanoshells under various boundary conditions", *Composite Structures*, 2014, Vol.116, pp.626-636.
- [41] Zhou, Jie, Atul Bhaskar, and Xin Zhang, "The effect of external mean flow on sound transmission through double-walled cylindrical shells lined with poroelastic material", *Journal of Sound and Vibration*, 2014, Vol.333, no.7, pp.1972-1990.

$$\begin{aligned} \delta\psi_{x_1}: & b_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + d_{11} \frac{\partial^2 \psi_{x_1}}{\partial x^2} \\ & + b_{12} \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \\ & + \frac{d_{12}}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{\theta_1}}{\partial x \partial \theta} \\ & + g_{31} \frac{\partial \phi_{in}}{\partial x} + \bar{g}_{31} \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial x} \\ & + \frac{b_{66}}{\bar{r}} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} \right) \\ & + \frac{d_{66}}{\bar{r}} \left(\frac{\partial^2 \psi_{\theta_1}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{x_1}}{\partial \theta^2} \right) \\ & - k_s a_{55} \left(\psi_{x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + k_s l_{31} \frac{\partial \phi_{in}}{\partial x} + \\ & k_s \bar{l}_{31} \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial x} = I_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + I_{21} \frac{\partial^2 \psi_{x_1}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (\text{الف ۴})$$

$$\begin{aligned} \delta\psi_{\theta_1}: & b_{66} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial \theta} \right) \\ & + d_{66} \left(\frac{\partial^2 \psi_{\theta_1}}{\partial x^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{x_1}}{\partial x \partial \theta} \right) \\ & + \frac{b_{12}}{\bar{r}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial \theta} + \frac{d_{12}}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{x_1}}{\partial x \partial \theta} \\ & + \frac{b_{22}}{\bar{r}} \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{d_{22}}{\bar{r}} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{\theta_1}}{\partial \theta^2} \\ & + \frac{1}{\bar{r}} g_{32} \frac{\partial \phi_{in}}{\partial \theta} + \frac{1}{\bar{r}} \bar{g}_{32} \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial \theta} \\ & - k_s a_{44} \left(\psi_{\theta_1} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} - \frac{v_1}{\bar{r}} \right) \\ & - k_s l_{32} \frac{\partial \phi_{in}}{\partial \theta} - k_s \bar{l}_{32} \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial \theta} = I_{11} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \\ & I_{21} \frac{\partial^2 \psi_{\theta_1}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (\text{الف ۵})$$

$$\begin{aligned} \delta\phi_{in}: & l_{31} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_{x_1}}{\partial x} \right) \\ & + l_{32} \left(\frac{\partial \psi_{\theta_1}}{\partial \theta} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) \\ & - f_{31} \frac{\partial u_1}{\partial x} - g_{31} \frac{\partial \psi_{x_1}}{\partial x} - f_{32} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{w_1}{\bar{r}} \right) \\ & - \frac{1}{\bar{r}} g_{32} \frac{\partial \psi_{\theta_1}}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta u_1: & a_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_{11} \frac{\partial^2 \psi_{x_1}}{\partial x^2} \\ & + a_{12} \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \\ & + \frac{b_{12}}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{\theta_1}}{\partial x \partial \theta} \\ & + f_{31} \frac{\partial \phi_{in}}{\partial x} + \bar{f}_{31} \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial x} \\ & + \frac{a_{66}}{\bar{r}} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} \right) + \\ & \frac{b_{66}}{\bar{r}} \left(\frac{\partial^2 \psi_{\theta_1}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{x_1}}{\partial \theta^2} \right) = I_{01} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + I_{11} \frac{\partial^2 \psi_{x_1}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (\text{الف ۱})$$

$$\begin{aligned} \delta v_1: & a_{66} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial \theta} \right) \\ & + b_{66} \left(\frac{\partial^2 \psi_{\theta_1}}{\partial x^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{x_1}}{\partial x \partial \theta} \right) \\ & + \frac{a_{12}}{\bar{r}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial \theta} \\ & + \frac{b_{12}}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{x_1}}{\partial x \partial \theta} + \frac{a_{22}}{\bar{r}} \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right) \\ & + f_{32} \frac{\partial \phi_{in}}{\partial \theta} + \bar{f}_{32} \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial \theta} \\ & + \frac{b_{22}}{\bar{r}} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{\theta_1}}{\partial \theta^2} + \\ & \frac{k_s}{\bar{r}} a_{44} \left(\psi_{\theta_1} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} - \frac{v_1}{\bar{r}} \right) + k_s l_{32} \frac{\partial \phi_{in}}{\partial \theta} + \\ & k_s \bar{l}_{32} \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial \theta} = I_{01} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + I_{11} \frac{\partial^2 \psi_{\theta_1}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (\text{الف ۲})$$

$$\begin{aligned} \delta w_1: & k_s a_{55} \left(\frac{\partial \psi_{x_1}}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) + k_s l_{31} \frac{\partial^2 \phi_{in}}{\partial x^2} \\ & + k_s \bar{l}_{31} \frac{\partial^2 \phi_{ex}}{\partial x^2} + \\ & \frac{k_s a_{44}}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \psi_{\theta_1}}{\partial \theta} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) \\ & + k_s l_{32} \frac{\partial^2 \phi_{in}}{\partial \theta^2} + k_s \bar{l}_{32} \frac{\partial^2 \phi_{ex}}{\partial \theta^2} \\ & - \frac{a_{12}}{\bar{r}} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ & - \frac{b_{12}}{\bar{r}} \frac{\partial \psi_{x_1}}{\partial x} - \frac{a_{22}}{\bar{r}} \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + w_1 \right) - \frac{b_{22}}{\bar{r}} \frac{\partial \psi_{\theta_1}}{\partial \theta} - \\ & \frac{1}{\bar{r}} f_{32} \phi_{in} - \frac{1}{\bar{r}} \bar{f}_{32} \phi_{ex} = I_{01} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \Delta P_1, \end{aligned} \quad (\text{الف ۳})$$

$$\begin{aligned}
 a_{55} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} c_{55} dzd\theta + \\
 &\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1+\vartheta(z)^2)} dzd\theta + \\
 &\sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} c_{55} dzd\theta, \\
 [a_{66}, d_{66}] &= \\
 &\sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} c_{66} [1, z^2] dzd\theta + \\
 &\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1+\vartheta(z)^2)} [1, z^2] dzd\theta + \\
 &\sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} c_{66} [1, z^2] dzd\theta, \\
 [f_{31}, g_{31}] &= \\
 &\sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} 2e_{31} \left(z + \right. \\
 &\left. \frac{h+h_p}{2} \right) [1, z] dzd\theta, \\
 [f_{31}, \bar{g}_{31}] &= \\
 &\sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} 2e_{31} \left(z - \right. \\
 &\left. \frac{h+h_p}{2} \right) [1, z] dzd\theta, \\
 [f_{32}, g_{32}] &= \\
 &\sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} 2e_{32} \left(z + \right. \\
 &\left. \frac{h+h_p}{2} \right) [1, z] dzd\theta, \\
 [f_{32}, \bar{g}_{32}] &= \\
 &\sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} 2e_{32} \left(z - \right. \\
 &\left. \frac{h+h_p}{2} \right) [1, z] dzd\theta, \\
 l_{31} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} e_{15} \left[\left(z + \right. \right. \\
 &\left. \left. \frac{h+h_p}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_p}{2} \right)^2 \right] dzd\theta, \\
 \bar{l}_{31} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} e_{15} \left[\left(z - \right. \right. \\
 &\left. \left. \frac{h+h_p}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_p}{2} \right)^2 \right] dzd\theta, \\
 l_{32} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} e_{24} \frac{1}{r+z} \left[\left(z + \right. \right. \\
 &\left. \left. \frac{h+h_p}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_p}{2} \right)^2 \right] dzd\theta, \\
 \bar{l}_{32} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} e_{24} \frac{1}{r+z} \left[\left(z - \right. \right. \\
 &\left. \left. \frac{h+h_p}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_p}{2} \right)^2 \right] dzd\theta,
 \end{aligned}$$

$$-p_{11} \frac{\partial^2 \phi_{in}}{\partial x^2} - p_{22} \frac{\partial^2 \phi_{in}}{\partial \theta^2} + p_{33} \phi_{in} = 0, \quad (\text{الف } 6)$$

$$\begin{aligned}
 \delta \phi_{ex}: \bar{l}_{31} &\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_{x1}}{\partial x} \right) \\
 &+ \bar{l}_{32} \left(\frac{\partial \psi_{\theta 1}}{\partial \theta} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \right. \\
 &\left. - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) \\
 -\bar{f}_{31} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \bar{g}_{31} \frac{\partial \psi_{x1}}{\partial x} - \bar{f}_{32} &\left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{w_1}{\bar{r}} \right) \\
 &- \frac{1}{\bar{r}} \bar{g}_{32} \frac{\partial \psi_{\theta 1}}{\partial \theta} \\
 -\bar{p}_{11} \frac{\partial^2 \phi_{ex}}{\partial x^2} - \bar{p}_{22} \frac{\partial^2 \phi_{ex}}{\partial \theta^2} &+ \bar{p}_{33} \phi_{ex} = 0, \quad (\text{الف } 7)
 \end{aligned}$$

درحالی که:

$$\begin{aligned}
 [a_{11}, b_{11}, d_{11}] &= \\
 &\sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} c_{11} [1, z, z^2] dzd\theta + \\
 &\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1-\vartheta(z)^2)} [1, z, z^2] dzd\theta + \\
 &\sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} c_{11} [1, z, z^2] dzd\theta, \\
 [a_{12}, b_{12}, d_{12}] &= \\
 &\sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} c_{12} [1, z, z^2] dzd\theta + \\
 &\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\vartheta(z)E(z)}{2(1-\vartheta(z)^2)} [1, z, z^2] dzd\theta + \\
 &\sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} c_{12} [1, z, z^2] dzd\theta, \\
 [a_{22}, b_{22}, d_{22}] &= \\
 &\sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} c_{22} [1, z, z^2] dzd\theta + \\
 &\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1-\vartheta(z)^2)} [1, z, z^2] dzd\theta + \\
 &\sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} c_{22} [1, z, z^2] dzd\theta, \\
 a_{44} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} c_{44} dzd\theta + \\
 &\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1+\vartheta(z)^2)} dzd\theta + \\
 &\sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} c_{44} dzd\theta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_{22} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} k_{22} \left(\frac{1}{r+z}\right)^2 \left[\left(z - \frac{h+h_p}{2}\right)^2 - \left(\frac{h_p}{2}\right)^2 \right]^2 dzd\theta, \\ p_{33} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} 4k_{33} \left(z + \frac{h+h_p}{2}\right)^2 dzd\theta, \\ \bar{p}_{33} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} 4k_{33} \left(z - \frac{h+h_p}{2}\right)^2 dzd\theta \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{x2}}{\partial \theta^2} - k_s A_{55} \left(\psi_{x2} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) = I_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + I_{22} \frac{\partial^2 \psi_{x2}}{\partial t^2}, \quad (\text{ف ب})$$

$$\begin{aligned} \delta\psi_{\theta 2}: & B_{66} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial \theta} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \psi_{\theta 2}}{\partial x^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{x2}}{\partial x \partial \theta} \right) + \frac{B_{12}}{\bar{r}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial \theta} + \frac{D_{12}}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{x2}}{\partial x \partial \theta} + \\ & \frac{B_{22}}{\bar{r}} \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \right) + \frac{D_{22}}{\bar{r}} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{\theta 2}}{\partial \theta^2} - k_s A_{44} \left(\psi_{\theta 2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial w_2}{\partial \theta} - \frac{v_2}{\bar{r}} \right) = I_{12} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + \\ & I_{22} \frac{\partial^2 \psi_{\theta 2}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (\text{د ب})$$

درحالی که:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sum_{s=1}^N \bar{Q}_{11} (H_s - H_{s-1}), & A_{12} &= \\ \sum_{s=1}^N \bar{Q}_{12} (H_s - H_{s-1}), & & & \\ A_{22} &= \sum_{s=1}^N \bar{Q}_{22} (H_s - H_{s-1}), & A_{66} &= \\ \sum_{s=1}^N \bar{Q}_{66} (H_s - H_{s-1}), & & & \\ A_{44} &= \sum_{s=1}^N \bar{Q}_{44} (H_s - H_{s-1}), & A_{55} &= \\ \sum_{s=1}^N \bar{Q}_{55} (H_s - H_{s-1}), & & & \\ B_{11} &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N \bar{Q}_{11} (H_s^2 - H_{s-1}^2), & B_{12} &= \\ \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N \bar{Q}_{12} (H_s^2 - H_{s-1}^2), & & & \\ B_{22} &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N \bar{Q}_{22} (H_s^2 - H_{s-1}^2), & B_{66} &= \\ \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N \bar{Q}_{66} (H_s^2 - H_{s-1}^2), & & & \\ D_{11} &= \frac{1}{3} \sum_{s=1}^N \bar{Q}_{11} (H_s^3 - H_{s-1}^3), & D_{12} &= \\ \frac{1}{3} \sum_{s=1}^N \bar{Q}_{12} (H_s^3 - H_{s-1}^3), & & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{11} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} k_{11} \left[\left(z + \frac{h+h_p}{2}\right)^2 - \left(\frac{h_p}{2}\right)^2 \right]^2 dzd\theta, \\ \bar{p}_{11} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} k_{11} \left[\left(z - \frac{h+h_p}{2}\right)^2 - \left(\frac{h_p}{2}\right)^2 \right]^2 dzd\theta, \\ p_{22} &= \sum_{\gamma=1}^N \int_{(\gamma-1)(\beta_p+\beta_c)}^{\gamma\beta_p+(\gamma-1)\beta_c} \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} k_{22} \left(\frac{1}{r+z}\right)^2 \left[\left(z + \frac{h+h_p}{2}\right)^2 - \left(\frac{h_p}{2}\right)^2 \right]^2 dzd\theta, \end{aligned}$$

پیوست ب:

$$\begin{aligned} \delta u_2: & A_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \psi_{x2}}{\partial x^2} + A_{12} \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + \frac{B_{12}}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{\theta 2}}{\partial x \partial \theta} + \frac{A_{66}}{\bar{r}} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} \right) + \\ & \frac{B_{66}}{\bar{r}} \left(\frac{\partial^2 \psi_{\theta 2}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{x2}}{\partial \theta^2} \right) = I_{02} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \\ & I_{12} \frac{\partial^2 \psi_{x2}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (\text{ا ب})$$

$$\begin{aligned} \delta v_2: & A_{66} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial \theta} \right) + B_{66} \left(\frac{\partial^2 \psi_{\theta 2}}{\partial x^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{x2}}{\partial x \partial \theta} \right) + \frac{A_{12}}{\bar{r}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial \theta} + \frac{B_{12}}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{x2}}{\partial x \partial \theta} + \\ & \frac{A_{22}}{\bar{r}} \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \right) + \frac{B_{22}}{\bar{r}} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{\theta 2}}{\partial \theta^2} + \frac{k_s}{\bar{r}} A_{44} \left(\psi_{\theta 2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial w_2}{\partial \theta} - \frac{v_2}{\bar{r}} \right) = I_{02} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + \\ & I_{12} \frac{\partial^2 \psi_{\theta 2}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (\text{ب ب})$$

$$\begin{aligned} \delta w_2: & k_s A_{55} \left(\frac{\partial \psi_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) + \frac{k_s A_{44}}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \psi_{\theta 2}}{\partial \theta} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \right) - \frac{A_{12}}{\bar{r}} \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{B_{12}}{\bar{r}} \frac{\partial \psi_{x2}}{\partial x} - \\ & \frac{A_{22}}{\bar{r}} \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial v_2}{\partial \theta} + w_2 \right) - \frac{B_{22}}{\bar{r}} \frac{\partial \psi_{\theta 2}}{\partial \theta} = I_{02} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \Delta P_2, \end{aligned} \quad (\text{ج ب})$$

$$\begin{aligned} \delta\psi_{x2}: & B_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \psi_{x2}}{\partial x^2} + \\ & B_{12} \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + \frac{D_{12}}{\bar{r}} \frac{\partial^2 \psi_{\theta 2}}{\partial x \partial \theta} + \\ & \frac{B_{66}}{\bar{r}} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{D_{66}}{\bar{r}} \left(\frac{\partial^2 \psi_{\theta 2}}{\partial x \partial \theta} + \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{6,8} &= ik_x g_{31} - ik_x l_{31}, \quad K_{6,9} = -\frac{g_{32}}{r} n + l_{32} n, \quad K_{6,10} = p_{11} k_x^2 + p_{22} n^2 + p_{33}, \\
 K_{6,11} &= K_{7,10} = 0, \quad K_{6,6} = -\frac{f_{32}}{r} n - \frac{l_{32}}{r} n, \\
 K_{7,6} &= -\frac{\bar{f}_{32}}{r} n - \frac{\bar{l}_{32}}{r} n, \\
 K_{7,7} &= -k_x^2 \bar{l}_{31} - \frac{\bar{l}_{32} n^2}{r} - \frac{\bar{f}_{32}}{r}, \quad K_{7,8} = ik_x \bar{g}_{31} - ik_x \bar{l}_{31}, \quad K_{7,9} = -\frac{\bar{g}_{32}}{r} n + \bar{l}_{32} n, \\
 K_{7,11} &= \bar{p}_{11} k_x^2 + \bar{p}_{22} n^2 + \bar{p}_{33}, \quad K_{8,12} = -A_{11} k_x^2 - \frac{A_{66}}{R^2} n^2 + I_{02} \omega^2, \\
 K_{8,13} &= K_{9,12} = -\frac{i}{R} k_x n (A_{12} + A_{66}), \\
 K_{8,14} &= -K_{10,12} = -\frac{i}{R} k_x A_{12}, \\
 K_{8,15} &= K_{11,12} = -B_{11} k_x^2 - \frac{B_{66}}{R^2} n^2 + I_{12} \omega^2, \quad K_{8,16} = K_{12,12} = -\frac{i}{R} k_x n (B_{12} + B_{66}), \\
 K_{9,13} &= -A_{66} k_x^2 - \frac{A_{22}}{R^2} n^2 - \frac{k_s A_{44}}{R^2} + I_{02} \omega^2, \\
 K_{9,14} &= K_{10,13} = -\frac{A_{22}}{R^2} n - \frac{k_s A_{44}}{R^2} n, \\
 K_{9,15} &= K_{11,13} = -\frac{i}{R} k_x n (B_{12} + B_{66}), \\
 K_{9,16} &= K_{12,13} = -B_{66} k_x^2 - \frac{B_{22}}{R^2} n^2 + \frac{k_s A_{44}}{R} + I_{12} \omega^2, \\
 K_{10,2} &= H_n^{(1)}(k_{2\bar{r}} R), \quad K_{10,3} = H_n^{(2)}(k_{2\bar{r}} R), \\
 K_{10,4} &= -H_n^{(1)}(k_{3\bar{r}} R), \\
 K_{10,14} &= -k_x^2 k_s A_{55} - \frac{k_s A_{44}}{R^2} n^2 - \frac{A_{22}}{R^2} + I_{02} \omega^2, \quad K_{10,15} = -K_{11,14} = -ik_x k_s A_{55} + ik_x \frac{B_{12}}{R}, \\
 K_{10,16} &= K_{12,14} = \frac{k_s A_{44}}{R} n - \frac{B_{22}}{R^2} n, \quad K_{11,15} = -k_x^2 D_{11} - \frac{D_{66}}{R^2} n^2 - k_s A_{55} + I_{22} \omega^2, \\
 K_{11,16} &= K_{12,15} = -ik_x \frac{1}{R} n (D_{12} + D_{66}), \\
 K_{12,16} &= -\frac{D_{22}}{R^2} n^2 - k_x^2 D_{66} - k_s A_{44} + I_{22} \omega^2, \\
 K_{13,1} &= k_{1\bar{r}} H_n^{(2)}(k_{1\bar{r}} r), \quad K_{13,7} = -\rho \omega^2, \\
 f_{13} &= -p_0 \varepsilon_n (-i)^n k_{1\bar{r}} J_n'(k_{1\bar{r}} r),
 \end{aligned}$$

$$D_{22} = \frac{1}{3} \sum_{s=1}^N \bar{Q}_{22} (H_s^3 - H_{s-1}^3), \quad D_{66} = \frac{1}{3} \sum_{s=1}^N \bar{Q}_{66} (H_s^3 - H_{s-1}^3),$$

پیوست ج

$$\begin{aligned}
 K_{1,5} &= -a_{11} k_x^2 - \frac{a_{66}}{r^2} n^2 + I_{01} \omega^2, \quad K_{1,6} = K_{2,5} = -\frac{i}{r} k_x n (a_{12} + a_{66}), \\
 K_{1,7} &= -K_{3,5} = -\frac{i}{r} k_x a_{12}, \quad K_{1,8} = K_{4,5} = -b_{11} k_x^2 - \frac{b_{66}}{r^2} n^2 + I_{11} \omega^2, \\
 K_{1,9} &= K_{5,5} = -\frac{i}{r} k_x n (b_{12} + b_{66}), \\
 K_{1,10} &= -K_{6,5} = -ik_x f_{31}, \\
 K_{1,11} &= -K_{7,5} = -ik_x \bar{f}_{31}, \quad K_{2,6} = -a_{66} k_x^2 - \frac{a_{22}}{r^2} n^2 - \frac{k_s a_{44}}{r^2} + I_{01} \omega^2, \\
 K_{2,7} &= K_{3,6} = -\frac{a_{22}}{r^2} n - \frac{k_s a_{44}}{r^2} n, \quad K_{2,8} = K_{4,6} = -\frac{i}{r} k_x n (b_{12} + b_{66}), \\
 K_{2,9} &= K_{5,6} = -b_{66} k_x^2 - \frac{b_{22}}{r^2} n^2 + \frac{k_s a_{44}}{r} + I_{11} \omega^2, \quad K_{2,10} = -\frac{f_{32}}{r} n - \frac{k_s l_{32}}{r} n, \\
 K_{2,11} &= -\frac{\bar{f}_{32}}{r} n - \frac{k_s \bar{l}_{32}}{r} n, \quad K_{3,1} = H_n^{(2)}(k_{1\bar{r}} r), \quad K_{3,2} = -H_n^{(1)}(k_{2\bar{r}} r), \\
 K_{3,3} &= -H_n^{(2)}(k_{2\bar{r}} r), \quad K_{3,7} = -k_x^2 k_s a_{55} - \frac{k_s a_{44}}{r^2} n^2 - \frac{a_{22}}{r^2} + I_{01} \omega^2, \\
 K_{3,8} &= -K_{4,7} = -ik_x k_s a_{55} + ik_x \frac{b_{12}}{r}, \\
 K_{3,9} &= K_{5,7} = \frac{k_s a_{44}}{r} n - \frac{b_{22}}{r^2} n, \\
 K_{3,10} &= -k_x^2 k_s l_{31} - \frac{k_s l_{32} n^2}{r} - \frac{f_{32}}{r}, \quad K_{3,11} = -k_x^2 k_s \bar{l}_{31} - \frac{k_s \bar{l}_{32} n^2}{r} - \frac{\bar{f}_{32}}{r}, \\
 f_3 &= -p_0 \varepsilon_n (-i)^n J_n(k_{1\bar{r}} r), \quad K_{4,8} = -k_x^2 d_{11} - \frac{d_{66}}{r^2} n^2 - k_s a_{55} + I_{21} \omega^2, \\
 K_{4,9} &= K_{5,8} = -ik_x \frac{1}{r} n (d_{12} + d_{66}), \\
 K_{4,10} &= -ik_x g_{31} + ik_x k_s l_{31}, \\
 K_{4,11} &= -ik_x \bar{g}_{31} + ik_x k_s \bar{l}_{31}, \quad K_{5,9} = -\frac{d_{22}}{r^2} n^2 - k_x^2 d_{66} - k_s a_{44} + I_{21} \omega^2, \\
 K_{5,10} &= -\frac{g_{32}}{r} n + k_s l_{32} n, \quad K_{5,11} = -\frac{\bar{g}_{32}}{r} n + k_s \bar{l}_{32} n, \\
 K_{6,6} &= -\frac{f_{32}}{r} n - \frac{l_{32}}{r} n, \quad K_{6,7} = -k_x^2 l_{31} - \frac{l_{32} n^2}{r} - \frac{f_{32}}{r},
 \end{aligned}$$

$$K_{15,14} = -\rho\omega^2, \quad K_{16,4} = k_{3\bar{r}} H_n^{(1)'}(k_{3\bar{r}}R),$$

$$K_{16,14} = -\rho\omega^2$$

$$K_{14,2} = k_{2\bar{r}} H_n^{(1)'}(k_{2\bar{r}}r), \quad K_{14,3} =$$

$$k_{2\bar{r}} H_n^{(2)'}(k_{2\bar{r}}r), \quad K_{14,7} = -\rho\omega^2,$$

$$K_{15,2} = k_{2\bar{r}} H_n^{(1)'}(k_{2\bar{r}}R), \quad K_{15,3} =$$

$$k_{2\bar{r}} H_n^{(2)'}(k_{2\bar{r}}R),$$

پی نوشت:

1. Fluid-structure interaction (FSI)