

## تأثیر شرایط مرزی غیرایده‌آل بر ارتعاشات آزاد تیر با تکیه‌گاه ساده

علی داور	رضا آذرافزا*	مهدی همت‌بلند
استادیار، مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ایران davar78@gmail.com	دانشیار، مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ایران azarkntu@yahoo.com	کارشناسی ارشد، مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ایران mehdi_hemmat@yahoo.com

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۸/۱۱

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۵/۲۰

## چکیده

به‌طور معمول در تحلیل دینامیکی سیستم‌های مکانیکی اتصالات به‌صورت ایده‌آل و کامل فرض می‌شوند و اثراتی نظیر لقی، تغییر شکل‌های موضعی، سایش و اثرات روغن‌کاری نادیده گرفته می‌شوند. این نوع از شرایط مرزی، انحرافات کوچکی از شرایط ایده‌آل داشته و به‌عنوان شرایط مرزی غیرایده‌آل تعریف می‌شوند. در این تحقیق اثرات شرایط مرزی غیرایده‌آل در ارتعاشات آزاد تیر اویلر-برنولی با تکیه‌گاه ساده، به‌عنوان یک سیستم غیرخطی ضعیف، با استفاده از روش‌های اغتشاشی لیندشتت-پوانکاره و مقیاس‌های چندگانه مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته و نتایج آنها با هم مقایسه شده است. مشاهده شد که نتایج حاصل از دو روش نتایج حاصل از دو روش با یکدیگر همخوانی دارند. به‌منظور صحت‌سنجی روش‌ها، با صفر فرض کردن پارامتر اغتشاشی، فرکانس خطی به‌دست آمده از دو روش با فرکانس مراجع پیشین مقایسه شده است که نتایج برابر هستند. برای بررسی موضوع یکی از شرایط مرزی به‌صورت غیرایده‌آل در نظر گرفته شد، در این حالت وجود لقی سبب افزایش دامنه شکل مود می‌گردد ولی بسته به شماره‌ی مود می‌تواند منجر به افزایش و یا کاهش فرکانس طبیعی شود. همچنین وجود لقی در یک تکیه‌گاه سبب برهم خوردن تقارن شکل مودها نیز می‌گردد.

**واژگان کلیدی:** لقی، اغتشاش، شرایط مرزی غیرایده‌آل، روش لیندشتت-پوانکاره، روش مقیاس‌های چندگانه

## ۱. مقدمه

در ارتعاشات سیستم‌های پیوسته، انواع شرایط تکیه‌گاهی دارای اهمیت بوده و تأثیر مستقیم روی پاسخ‌ها و فرکانس‌های طبیعی دارد. شرایط مرزی سیستم‌های واقعی معمولاً با استفاده از انواع تکیه‌گاه‌ها مانند تکیه‌گاه ساده، گیردار، لغزشی، آزاد و ... ایده‌آل‌سازی می‌شوند. در واقع سیستم‌های واقعی با انتخاب نزدیک‌ترین شرایط مرزی

ایده‌آل مدل‌سازی می‌شوند و همیشه فرض بر آن است که این شرایط ایده‌آل به‌طور دقیق برقرار هستند. اگرچه در سیستم‌های واقعی، همواره مقداری انحراف از شرایط ایده‌آل وجود دارد. به‌عنوان مثال، یک تیر که در دو انتهای خود توسط پین به تکیه‌گاه صلب متصل شده است با استفاده از شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده مدل‌سازی می‌گردد که در آن ممان‌ها و تغییرشکل‌ها برابر با صفر است. اگرچه، در مجموعه

پین و سوراخ مقداری لقی و اصطکاک وجود دارد که منجر به ایجاد تغییر شکل‌های کوچک یا ممان در انتهای تیر می‌گردد. این نوع از شرایط مرزی، انحرافات کوچکی از شرایط ایده‌آل دارند و به‌عنوان شرایط مرزی غیرایده‌آل تعریف می‌شوند. جهت بررسی تأثیر شرایط مرزی غیرایده‌آل در ارتعاشات سیستم، می‌توان فرض کرد که سیستم مورد بررسی یک سیستم غیرخطی ضعیف<sup>۱</sup> بوده و پاسخ آن با ایجاد اغتشاش در پاسخ سیستم خطی متناظر به‌دست خواهد آمد، با این فرض برای به‌دست آوردن پاسخ می‌توان از روش‌های اغتشاشی<sup>۲</sup> استفاده نمود [۱-۵]. در چهار دهه اخیر تلاش‌های بسیاری جهت مدل‌سازی لقی موجود در اتصالات و تحلیل اثرات ناشی از آن صورت گرفته است که در ادامه به بعضی از آنها اشاره خواهد شد.

پکدمبرلی<sup>۳</sup> و بویاسی<sup>۴</sup> [۱] ارتعاشات یک تیر کشیده شده با شرایط مرزی غیرایده‌آل را تحلیل نمودند. در این مقاله با فرض تکیه‌گاه غیرایده‌آل در هر دو طرف تیر، که دارای جابه‌جایی متغیر با زمان و گشتاور صفر هستند، معادله ارتعاشات تیر با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه حل شده است. نتایج حاکی از آن است که فرکانس‌های طبیعی بسته به شماره نیم موج  $n$  و دامنه تغییرات، ممکن است کاهش و یا افزایش یابد. همچنین همان‌گونه که انتظار می‌رود، کشیدگی تیر در نتیجه شرایط انتهایی غیرمتحرک در تیر سبب افزایش سختی آن می‌گردد.

پکدمبرلی و بویاسی [۲] با استفاده از روش اغتشاشات به بررسی تأثیر شرایط مرزی غیرایده‌آل بر روی ارتعاشات سیستم‌های پیوسته پرداختند. در این مقاله ابتدا تأثیر شرایط مرزی غیرایده‌آل روی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای یک تیر با تکیه‌گاه ساده و یک تیر با تکیه‌گاه لغزشی-گیردار با استفاده از روش لیندشتت-پوانکاره<sup>۵</sup> بررسی گردید سپس یک کابل متحرک طولی با شرایط مرزی غیرایده‌آل و با روش مقیاس‌های چندگانه<sup>۶</sup> مورد بررسی قرار گرفت. با فرض تغییرات کوچک در تغییر شکل‌ها، مشاهده شد که

علاوه‌بر تغییر در فرکانس‌های طبیعی، دامنه‌های ارتعاشات نیز تغییر می‌کنند. دامنه‌ها بسته به مود ارتعاشی و سرعت محوری کابل ممکن است افزایش یا کاهش یابند.

پکدمبرلی و بویاسی [۳] در مقاله دیگری به بررسی ارتعاشات یک تیر اوپلر-برنولی با تکیه‌گاه ساده و یک تکیه‌گاه غیرایده‌آل در وسط آن پرداختند. در این مقاله حل تقریبی مسئله با استفاده از تئوری اغتشاشات و روش مقیاس‌های چندگانه به‌دست آمد و پاسخ‌های فرکانسی برای تکیه‌گاه‌های ایده‌آل و غیرایده‌آل مقایسه گردید. نتایج نشان داد که بسته به مود ارتعاشی و موقعیت‌ها، در اثر تکیه‌گاه غیرایده‌آل، فرکانس‌های طبیعی می‌توانند افزایش یا کاهش یافته و یا بدون تغییر باقی بمانند. شکل مودها نیز می‌توانند تحت تأثیر تکیه‌گاه غیرایده‌آل قرار بگیرند. برای تعیین این تغییرات، باید محاسبات در مرتبه  $\epsilon^2$  انجام شود.

آیدگدو<sup>۷</sup> و سم اس<sup>۸</sup> [۴] کماتش و ارتعاشات عرضی یک ورق مستطیلی همسان‌گرد<sup>۹</sup> دارای تکیه‌گاه ساده که یکی از آنها غیرایده‌آل است، را بررسی نمودند. در این مقاله معادله ارتعاشی با استفاده از روش لیندشتت-پوانکاره مورد تحلیل قرار گرفت. با توجه به عدم استفاده از شرط حل‌پذیری در این تحقیق و فرض پاسخ صحیح برای شکل مود از ابتدا، امکان توسعه این روش برای تعداد تکیه‌گاه‌های بیشتر وجود ندارد. همچنین در این مقاله اثرات لقی در شکل مود به‌طور واضح مورد بررسی قرار نگرفته است.

بویاسی [۵] ارتعاشات یک تیر با میرایی کششی و دارای شرایط مرزی غیرایده‌آل را بررسی نمود. در این تحقیق برای بررسی اثر ترکیبی میرایی کششی و شرایط مرزی غیرایده‌آل از روش اغتشاشی مقیاس‌های چندگانه استفاده شده است. نتایج حاکی از آن است که درحالی‌که اثرات کششی سبب افزایش فرکانس‌ها می‌شوند، شرایط مرزی غیرایده‌آل می‌توانند سبب افزایش و یا کاهش فرکانس‌ها شوند.

محمدی و قیصری [۶] تأثیر شرایط مرزی غیرایده‌آل در کماتش یک ورق مستطیلی مدرج تابعی<sup>۱۰</sup> را بررسی نمودند.

در این تحقیق تیر روی تکیه‌گاه ساده قرار داشته و یکی از تکیه‌گاه‌ها غیرایده‌آل فرض شده است. برای حل معادله کمادش از روش اغتشاشی لیندشتت-پوانکاره استفاده گردیده است. نتایج این تحقیق حاکی از آن است که بارهای بحرانی کمادش تحت تأثیر جابه‌جایی عرضی در تکیه‌گاه غیرایده‌آل، بسته به شماره نیم موج  $n$ ، ممکن است کاهش و یا افزایش یابد.

کمالی و احمدیان [۷] ارتعاشات غیرخطی تیر میراشده کششی اویلر- برنولی تحت اثر تحریک خارجی را بررسی نمودند. در این تحقیق برای حل معادله دیفرانسیل غیرخطی از روش اغتشاشی تکرار<sup>۱۱</sup> استفاده شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که تغییرات بسیار کوچک در تغییر شکل‌ها و ممان‌ها در تکیه‌گاه‌ها، شرایط مرزی غیرایده‌آل، می‌تواند بر منحنی پاسخ فرکانسی تیر اثر بگذارد. همچنین محققین دریافتند که به ازای مقادیر ترکیبی خاصی از پارامترهای شرایط مرزی غیرایده‌آل فرکانس غیرایده‌آل سیستم با فرکانس ایده‌آل آن برابر است.

لی [۸] ارتعاشات آزاد تیرها با شرایط مرزی گیردار غیرایده‌آل را بررسی نمود. در این تحقیق شرایط مرزی غیرایده‌آل با استفاده از ترکیب خطی شرایط مرزی ایده‌آل گیردار و شرایط مرزی ایده‌آل ساده با ضرایب وزنی مختلف مدل‌سازی شده و مدل شرایط مرزی غیرایده‌آل حاصل در تحلیل ارتعاشات آزاد تیر اویلر برنولی و تیر تیموشنکو به کار رفته است. نتایج تحقیق حاصل از آن است که برای ارتعاشات آزاد تیر با شرایط مرزی غیرایده‌آل در انتهای سمت چپ و شرایط مرزی آزاد در انتهای سمت راست، فرکانس‌های طبیعی تیر با افزایش ضریب وزنی، تشدید شرایط مرزی غیرایده‌آل، کاهش می‌یابند.

یورداش<sup>۱۲</sup> و همکاران [۹] ارتعاشات غیرخطی کابل‌ها با حرکت محوری دارای چند تکیه‌گاه غیرایده‌آل را بررسی نمودند. در این مقاله معادلات حرکت و شرایط مرزی با استفاده از اصل هامیلتون<sup>۱۳</sup> به دست آمد. سپس وابستگی

معادلات حرکت و شرایط مرزی به هندسه و مواد کابل با استفاده از بی بعد نمودن حذف گردید. برای حل معادلات حرکت از تئوری اغتشاشات و روش مقیاس‌های چندگانه استفاده شد و اثرات شرایط تکیه‌گاهی غیرایده‌آل روی مرزهای پایداری و دامنه‌های ارتعاشی مورد بررسی قرار گرفت. در این مسئله حل مرتبه اول اغتشاشات، مسئله خطی را کسب می‌کند، فرکانس‌های طبیعی از حل مسئله خطی برای مقادیر مختلف پارامترها به دست می‌آید. اثرات ترم‌های غیرخطی در مرتبه دوم اغتشاشات ظاهر شده و مورد تحلیل قرار گرفت.

یانگ و همکاران [۱۰]، مودهای ارتعاشی یک تیر یکسر گیردار را که یک قطعه روی آن نصب شده و در محل نصب قطعه لقی وجود دارد بررسی کردند. این قطعه در سه مکان مختلف قرار گرفت و فرض بر این بود که در طول تیر حرکت نمی‌کند. عبارت ریاضی برای سفتی لقی بین قطعه و ریل روی تیر فرموله شد. ماتریس‌های سفتی و جرم برای یک تیر با سطح مقطع متغیر به دست آمد. فرکانس‌های طبیعی و بردارهای ویژه نیز تعیین شد. سپس آزمایش صورت گرفت و نتایج تجربی با نتایج محاسباتی مقایسه شدند. مطابقت خوبی بین فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده و تجربی وجود داشت.

کلابیز<sup>۱۴</sup> و همکاران [۱۱] ارتعاشات غیرخطی یک تیر فولادی دو سر گیردار با تکیه‌گاه غیرایده‌آل را با سه روش تحلیلی، عددی و تجربی بررسی و مقایسه نمودند. حل تحلیلی با استفاده از تئوری اغتشاشات و به دو روش مقیاس‌های چندگانه و بالانس هارمونیک<sup>۱۵</sup> و حل عددی با استفاده از روش انتگرال‌گیری زمانی<sup>۱۶</sup> انجام شده و نتایج با هم مقایسه گردید. سپس روی یک نمونه واقعی تست تجربی انجام شده و هارمونیک‌های مورد نظر با استفاده از روش‌های پردازش سیگنال استخراج و اندازه‌گیری شد. در نهایت نتایج با هم مقایسه گردید.

قدیری و همکاران [۱۲] ارتعاشات آزاد یک تیر کامپوزیتی لایه‌ای با پیش بار محوری و حامل یک سیستم جرم-فنر-میراکننده با تکیه‌گاه غیرایده‌آل را بررسی کردند. معادلات حاکم بر مسئله دستگاه معادلات دیفرانسیلی شامل یک PDE و یک ODE کوپل به هم است. برای حل مسئله روش گلرکین<sup>۱۷</sup> در میدان جابه‌جایی هم‌زمان با روش میانگین شتاب<sup>۱۸</sup> در حوزه زمان به کار گرفته شد. نتایج حاصل نشان دادند با افزایش پارامتر اغتشاشی، فرکانس‌های اساسی (طبیعی) کاهش می‌یابند و این رفتار مستقل از جهت الیاف در تیر است. همچنین تیرهای دارای تکیه‌گاه‌های کاملاً ایده‌آل زودتر از تیرهای دارای تکیه‌گاه‌های شبه‌ایده‌آل دچار کماتش می‌شوند.

بگداتلی<sup>۱۹</sup> و اوزلو<sup>۲۰</sup> [۱۳] ارتعاشات آزاد تیر متحرک محوری با شرایط مرزی غیرایده‌آل را تحلیل نمودند. در این مقاله معادلات حرکت یک تیر اولر-برنولی با یک تکیه‌گاه ساده غیرایده‌آل و یک تکیه‌گاه گیردار غیرایده‌آل با استفاده از اصل هامیلتون به دست آمده و سپس معادلات با استفاده از تئوری اغتشاشات و روش مقیاس‌های چندگانه حل شد. نتایج نشان دادند با انحراف از شرایط مرزی ایده‌آل در تکیه‌گاه ساده فرکانس‌های طبیعی افزایش یافته و در تکیه‌گاه گیردار فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد.

رونسن<sup>۲۱</sup> و همکاران [۱۴] ارتعاشات غیرخطی یک تیر دو سر گیردار با تکیه‌گاه‌های غیرایده‌آل تحت تأثیر تحریک‌های اتفاقی را بررسی کردند. در این مقاله نتایج شبیه‌سازی عددی و آزمایشات تجربی با هم مقایسه گردید. برای حل عددی، سیگنال تصادفی به سیگنال مولتی-هارمونیک متناوب معادل تبدیل شد، روش رها کردن<sup>۲۲</sup> و روش بالانس هارمونیک برای شبیه‌سازی پاسخ غیرخطی تیر دو سر گیردار به تحریک اتفاقی مورد استفاده قرار گرفت.

هربودنو<sup>۲۳</sup> و لی [۱۵] ارتعاشات آزاد تیرهای اولر-برنولی با شرایط مرزی غیرایده‌آل را با استفاده از روش تقریب پاد<sup>۲۴</sup> تحلیل نمودند. در این تحقیق برای مدل‌سازی شرایط مرزی

غیرایده‌آل از روشی مشابه با روش استفاده شده در مرجع [۸]، یعنی ترکیب خطی شرایط مرزی گیردار و ساده با ضرایب وزنی مختلف، استفاده شده است ولی برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی از روش محاسبات عددی استاندارد برای ریشه‌یابی با حدس اولیه مناسب استفاده شده است. به این منظور توابع گویای غیرخطی با استفاده از تقریب‌های پاد تخمین زده شده و با این کار فرمول‌های تحلیلی برای فرکانس‌های طبیعی به صورت توابعی از ضرایب وزنی حاصل گردیده است.

با وجود تلاش‌های فراوانی که در زمینه مدل‌سازی لقی و رفتار دینامیکی سیستم‌های مکانیکی شامل لقی صورت گرفته، پیرامون تأثیر لقی در پارامترهای ارتعاشی سیستم از قبیل فرکانس‌های طبیعی و شکل موده‌های آن تحقیقات قابل توجهی انجام نشده است.

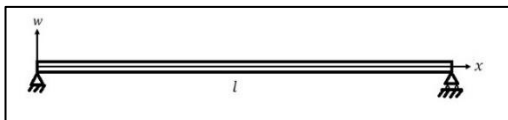
به طور خلاصه تحقیقات انجام شده در این مقاله تحت عنوان نوآوری‌های تحقیق حاضر به صورت زیر بیان می‌گردد:

۱- تحلیل یک تیر با دو سر تکیه‌گاه ساده که یکی از آنها شرایط مرزی غیرایده‌آل دارد با استفاده از دو روش لیندشتت-پوانکاره و مقیاس‌های چندگانه و مقایسه نتایج به دست آمده از دو روش.

۲- بررسی اثر لقی در فرکانس‌های طبیعی و شکل موده‌های یک تیر با دو سر تکیه‌گاه ساده که یکی از آنها شرایط مرزی غیرایده‌آل دارد.

## ۲. الگوسازی نظری

شکل ۱ یک تیر با طول  $l$  و تکیه‌گاه ساده را نشان می‌دهد.



شکل ۱. تیر با تکیه‌گاه ساده و به طول  $l$

معادله ارتعاشات آزاد عرضی تیر اولر-برنولی به صورت زیر است [۱۶]:

دیفرانسیل معمولی تبدیل شده و نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \omega^2 W = 0 \quad (۶)$$

بنابراین شرایط مرزی برای معادله دیفرانسیل ۶ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} W(0) &= \frac{d^2 W}{dx^2} (@x = 0) \\ &= 0, W(1) \\ &= \varepsilon a, \\ \frac{d^2 W}{dx^2} (@x = 1) \\ &= \varepsilon b \end{aligned} \quad (۷)$$

از آنجا که  $f$  و  $g$  در معادله ۴ فقط تابع زمان هستند و  $a$  و  $b$  در معادله ۷ اعداد ثابت.

## ۲-۱. حل با استفاده از روش لیندشتت-پوانکاره

با دنبال کردن تکنیک لیندشتت-پوانکاره، شکل مودها و فرکانسها به صورت سریهای اغتشاشی زیر بیان می شوند [۱۷]:

$$W(x; \varepsilon) = W_0(x) + \varepsilon W_1(x) + \dots \quad (۸)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots \quad (۹)$$

با در نظر گرفتن دو جمله اول از سریهای ۸ و ۹ و جای گذاری در معادله ۶، نتایج زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} W_0^{(4)} + \varepsilon W_1^{(4)} \\ - (\omega_0 \\ + \varepsilon \omega_1)^2 (W_0 \\ + \varepsilon W_1) = 0 \end{aligned} \quad (۱۰)$$

با بسط جمله دارای توان دوم و مرتب سازی جملات، معادله زیر به دست می آید:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (۱)$$

که در آن  $E$  مدول الاستیسیته،  $I$  ممان اینرسی سطح مقطع،  $\rho$  چگالی و  $A$  سطح مقطع تیر هستند.

در این مرحله برای عملیات بی بعدسازی متغیرهای بی بعد، ستاره دار، به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{w}{l}, x^* = \frac{x}{l}, \\ t^* &= \left(\frac{1}{l^2}\right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} t \end{aligned} \quad (۲)$$

که در آن  $l$  طول تیر است.

با جای گذاری متغیرهای بی بعد از معادله ۲ در معادله ارتعاش ۱ و حذف علامت ستاره از متغیرها، معادله ارتعاش به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (۳)$$

با فرض آنکه تیر در ابتدا ( $x = 0$ ) دارای تکیه گاه ایده آل و در انتهای تیر ( $x = l = 1$ ) دارای تکیه گاه غیر ایده آل است، شرایط مرزی برای معادله بی بعد شده ۳ به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} w(0, t) = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0 \\ w(1, t) = \varepsilon f(t), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(1, t) \\ = \varepsilon g(t) \end{aligned} \quad (۴)$$

یعنی در واقع به عنوان انحراف از شرایط ایده آل، تغییر شکل و ممان بسیار کوچکی در تکیه گاه سمت راست در نظر گرفته شده است.  $\varepsilon$  پارامتر اغتشاشی و بسیار کوچک است. با استفاده از روش جداسازی متغیرها، می توان پاسخ ارتعاشات آزاد را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= W(x).T(t) \\ &= (A \cos \omega t + B \sin \omega t) W(x) \end{aligned} \quad (۵)$$

با جای گذاری مقدار تغییر شکل از معادله ۵ در معادله حرکت ۳ و ساده کردن معادله دیفرانسیل پاره ای به معادله

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: \quad W_0^{(4)} - \omega_0^2 W_0 &= 0, W_0(0) \\ &= W_0''(0) \\ &= W_0(1) \\ &= W_0''(1) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: \quad W_1^{(4)} - \omega_0^2 W_1 &= 2\omega_0\omega_1 W_0, W_1(0) \\ &= W_1''(0) = 0, W_1(1) \\ &= a, W_1''(1) = b \end{aligned} \quad (19)$$

پاسخ معادله دیفرانسیل ۱۸ همان پاسخ خطی سیستم بوده و به صورت زیر خواهد بود [۱۶]:

$$\begin{aligned} W_0(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x \\ + C_3 \cosh \beta x \\ + C_4 \sinh \beta x \end{aligned} \quad (20)$$

که  $C_1$  تا  $C_4$  ضرایب ثابت هستند که از شرایط مرزی به دست می‌آیند. اعمال شرایط مرزی ۱۸، منجر به معادلات زیر می‌گردد:

$$C_1 = C_3 = 0 \quad (21)$$

$$C_4 = 0 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \sin \beta = 0 = \sin n\pi \rightarrow \beta_n \\ = n\pi \end{aligned} \quad (23)$$

تابع  $W_0(x)$  پس از نرمالایز شدن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} W_0(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x), \omega_0 \\ = n^2 \pi^2, \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن  $W_0(x)$  به صورت  $\int_0^1 W_0^2(x) dx = 1$  نرمالایز شده است.

پاسخ در هر مرتبه‌ای باید شرایط یکنواختی را فراهم کند، به این مطلب، شرط حل‌پذیری<sup>۲۵</sup> گفته می‌شود [۱۸]. برای تعیین شرط حل‌پذیری از مفهوم الحاق<sup>۲۶</sup> استفاده شده و در نهایت شرط حل‌پذیری به صورت زیر خواهد بود:

$$\omega_1 = \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{2n\pi}} (an^2\pi^2 - b) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} W_0^{(4)} - \omega_0^2 W_0 &+ \varepsilon(W_1^{(4)} \\ &- \omega_0^2 W_1 \\ &- 2\omega_0\omega_1 W_0) \\ &+ O(\varepsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

معادله فوق باید به ازای تمامی مقادیر کوچک  $\varepsilon$  برقرار باشد، بنابراین ضرایب  $\varepsilon^0$  و  $\varepsilon^1$  باید به صورت جداگانه صفر باشند.

$$\varepsilon^0: \quad W_0^{(4)} - \omega_0^2 W_0 = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: \quad W_1^{(4)} - \omega_0^2 W_1 \\ = 2\omega_0\omega_1 W_0 \end{aligned} \quad (13)$$

با در نظر گرفتن دو جمله اول از سری‌های ۸ و ۹ و جای‌گذاری در معادلات شرایط مرزی ۷، نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} W(0) = 0 \rightarrow W_0(0) + \varepsilon W_1(0) \\ = 0 \rightarrow \begin{cases} \varepsilon^0: W_0(0) = 0 \\ \varepsilon^1: W_1(0) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} W(1) = \varepsilon a \\ \rightarrow W_0(1) + \varepsilon W_1(1) = \varepsilon a \\ \rightarrow \begin{cases} \varepsilon^0: W_0(1) = 0 \\ \varepsilon^1: W_1(1) = a \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W}{dx^2} (@x = 0) = 0 \\ \rightarrow W_0''(0) + \varepsilon W_1''(0) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \varepsilon^0: W_0''(0) = 0 \\ \varepsilon^1: W_1''(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W}{dx^2} (@x = 1) = \varepsilon b \\ \rightarrow W_0''(1) + \varepsilon W_1''(1) = \varepsilon b \end{aligned} \quad (17)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \varepsilon^0: W_0''(1) = 0 \\ \varepsilon^1: W_1''(1) = b \end{cases}$$

که در آن منظور از  $W''$  مشتق دوم تابع  $W$  نسبت به متغیر  $x$  است. با جداسازی معادلات ۱۲ تا ۱۷ بر حسب مرتبه‌ها، می‌توان معادلات را به صورت زیر خلاصه نمود:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (30)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (31)$$

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$$

با جای گذاری روابط ۲۹، ۳۰ و ۳۱ در معادله حرکت ۳ معادله زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} w_0^{(4)} + \varepsilon w_1^{(4)} + D_0^2 w_0 \\ + \varepsilon D_0^2 w_1 \\ + 2\varepsilon D_0 D_1 w_0 \\ + O(\varepsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

معادله فوق باید به ازای تمامی مقادیر کوچک  $\varepsilon$  برقرار باشد، بنابراین ضرایب  $\varepsilon^0$  و  $\varepsilon^1$  باید به صورت جداگانه صفر باشند.

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: w_0^{(4)} + D_0^2 w_0 = 0 \\ w_0(0, T_0, T_1) = w_0''(0, T_0, T_1) \\ = w_0(1, T_0, T_1) \\ = w_0''(1, T_0, T_1) \\ = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: w_1^{(4)} + D_0^2 w_1 \\ = -2\varepsilon D_0 D_1 w_0 \\ w_1(0, T_0, T_1) = 0, w_1''(0, T_0, T_1) \\ = 0, w_1(1, T_0, T_1) \\ = a(T_0, T_1), w_1''(1, T_0, T_1) \\ = b(T_0, T_1) \end{aligned} \quad (34)$$

پاسخ معادله دیفرانسیل همگن ۳۳، به فرم زیر است:

$$w_0 = (A(T_1)e^{i\omega T_0} + cc)X(x) \quad (35)$$

که در آن منظور از  $cc$  مزدوج مختلط<sup>۳۷</sup> جمله‌ی قبل یعنی  $\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}$  است. با قرار دادن معادله ۳۵ در معادله ۳۳، مسئله مقدار مرزی زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} X^{(4)} - \omega^2 X = 0 \\ X(0) = X''(0) = X(1) \\ = X''(1) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

همان‌گونه که در بخش قبل گفته شد، پاسخ این معادله پس از نرمالایز نمودن شکل مود، به صورت زیر خواهد بود. لذا تابع  $X(x)$  به صورت زیر به دست می‌آید:

با قرار دادن مقدار  $\omega_1$  از ۲۵ در معادله ۱۹ و حل معادله، معادله زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} W_1(x) \\ = \frac{(an^2\pi^2 - b)}{2n^2\pi^2 \text{Sinh}n\pi} \text{Sinh}n\pi x \\ + \frac{\text{Cos}n\pi}{\sqrt{2}n\pi} (an^2\pi^2 \\ - b)x \text{Cos}n\pi x \end{aligned} \quad (26)$$

بنابراین پاسخ نهایی برای شکل مود بی بعد به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} W(x) \\ = \sqrt{2} \text{Sinh}n\pi x \\ + \varepsilon \left[ \frac{(an^2\pi^2 - b)}{2n^2\pi^2 \text{Sinh}n\pi} \text{Sinh}n\pi x \right. \\ \left. + \frac{\text{Cos}n\pi}{\sqrt{2}n\pi} (an^2\pi^2 - b)x \text{Cos}n\pi x \right] \end{aligned} \quad (27)$$

همچنین فرکانس بی بعد ناشی از شرایط مرزی غیرایده‌آل، فرکانس غیرخطی، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\omega_n = n^2\pi^2 + \varepsilon \frac{\text{Cos}n\pi}{\sqrt{2}n\pi} (an^2\pi^2 - b) \quad (28)$$

لازم بذکر است که با توجه به معادله ۲ برای زمان بی بعد، برای به دست آوردن فرکانس طبیعی غیرخطی کافی است فرکانس طبیعی بی بعد غیرخطی به دست آمده در عبارت  $\left(\frac{1}{l^2}\right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$  ضرب گردد.

## ۲-۲. حل با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه

بر اساس روش مقیاس‌های چندگانه، پاسخ به صورت بسط معادله ۲۹ در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} w(x, t; \varepsilon) \\ = w_0(x, T_0, T_1) \\ + \varepsilon w_1(x, T_0, T_1) + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

که در آن  $T_0 = t$ ، مقیاس زمانی تند و  $T_1 = \varepsilon t$  مقیاس زمانی کند در روش‌های مقیاس‌های چندگانه هستند. در این حالت مشتق‌های زمانی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\frac{d\beta}{dT_1} = \frac{\alpha_0 \cos(n\pi)}{\sqrt{2n\pi}} (n^2\pi^2 a - b)$$

$$\rightarrow \beta = \frac{\alpha_0 \cos(n\pi)}{\sqrt{2n\pi}} (n^2\pi^2 a - b) T_1 + \beta_0 \quad (44)$$

که در آن  $\beta_0$  عددی ثابت است. با جای گذاری ۴۳ و ۴۴ در معادله ۴۲ و سپس قرار دادن مقدار  $A$  در ۳۵ و با استفاده از معادله ۳۷، مقدار  $W$  به صورت زیر به دست می آید:

$$w(x, t; \varepsilon) \approx w_0 = \sqrt{2}\alpha_0 \cos\{[n^2\pi^2 a - b]t + \varepsilon \left(\frac{\alpha_0 \cos(n\pi)}{\sqrt{2n\pi}} (n^2\pi^2 a - b)\right)t + \beta_0\} \sin(n\pi x) \quad (45)$$

فرکانس سیستم نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\omega_n = n^2\pi^2 + \varepsilon \left(\frac{\alpha_0 \cos(n\pi)}{\sqrt{2n\pi}} (an^2\pi^2 - b)\right) \quad (46)$$

### ۳. نتایج و بحث

در این تحقیق معادله دیفرانسیل بدون بعد ارتعاش تیر با تکیه گاه ساده اوپلر - برنولی، معادله ۳، با فرض آنکه تیر در ابتدا ( $x = 0$ ) دارای تکیه گاه ایده آل و در انتهای تیر ( $x = 1$ ) دارای تکیه گاه غیرایده آل است، با استفاده از دو روش اغتشاشی لیندشتت-پوانکاره و مقیاس های چندگانه مورد تحلیل قرار گرفته و معادلات مربوط به شکل مود بی بعد و نرمالایز شده و فرکانس بی بعد غیرخطی برای آن به دست آمد.

به منظور صحت سنجی تحقیق، چنانچه در معادلات ۲۸ و ۶ مقدار  $\varepsilon$  برابر با صفر قرار داده شود، معادلات فرکانس های طبیعی بدون بعد در حالت ایده آل ( $\omega_n = n^2\pi^2$ ) به دست خواهد آمد. با تبدیل فرکانس طبیعی به حالت دارای بعد (ضرب در عبارت  $(\frac{1}{l^2})\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ ) مشاهده می گردد که معادلات

$$X(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x), \quad \omega = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (37)$$

با جای گذاری معادله ۳۵ در سمت راست معادله ۳۴، معادله زیر حاصل می شود:

$$w_1^{(4)} + D_0^2 w_1 = -2i\omega D_1 A X e^{i\omega T_0} + cc \quad (38)$$

برای معادله ۳۸، پاسخی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$w_1 = \varphi(x, T_1) e^{i\omega T_0} + cc \quad (39)$$

با جای گذاری معادله ۳۹ در سمت چپ معادله ۳۸، با جداسازی عبارت های دیرپای<sup>۲۸</sup> از عبارت های غیردیرپای<sup>۲۹</sup> و در نظر گرفتن عبارت های دیرپای معادله زیر حاصل می شود:

$$\varphi^{(4)} - \omega^2 \varphi = -2i\omega D_1 A X$$

$$\varphi(0, T_1) = 0, \varphi''(0, T_1) = 0, \varphi(1, T_1) = aA(T_1), \varphi''(1, T_1) = bA(T_1) \quad (40)$$

که در آن  $a$  و  $b$  اعداد ثابت هستند.

در این اینجا نیز مانند بخش قبل برای تعیین شرط حل پذیری از مفهوم الحاق شده و در نهایت شرط حل پذیری به صورت زیر به دست می آید:

$$\cos(n\pi)[n^2\pi^2 a - b]A = \sqrt{2}n\pi i D_1 A \quad (41)$$

با استفاده از فرم قطبی برای  $A$  می توان نوشت:

$$A = \frac{1}{2} \alpha(T_1) e^{i\beta(T_1)} \quad (42)$$

با جای گذاری ۴۲ در ۴۱ و جداسازی بخش های حقیقی و مجازی معادله، معادلات زیر حاصل می گردد:

$$\frac{d\alpha}{dT_1} = 0 \rightarrow \alpha = \alpha_0 = cte \quad (43)$$



به دست آمده با معادله ذکر شده در مرجع [۱۶] مطابقت کامل داشته و به صورت زیر خواهد بود:

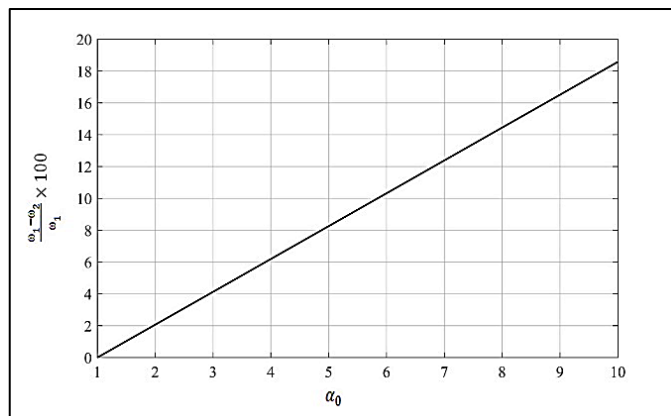
$$\omega_n = n^2 \pi^2 \left( \frac{EI}{\rho A L^4} \right)^{1/2} \quad (47)$$

جدول ۱ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد غیرخطی به دست آمده از دو روش اغتشاشی لیندشتت-پوانکاره و مقیاس‌های چندگانه را به ازای  $\alpha_0 = 3$  نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود خطای بین دو روش تقریباً ناچیز است. با توجه به معادلات ۲۸ و ۴۶ به ازای  $\alpha_0 = 1$  نتایج هر دو روش کاملاً یکسان بوده و با فاصله گرفتن  $\alpha_0$  از یک، تفاوت پاسخ در دو روش افزایش می‌یابد. دلیل این مسئله آن است که در روش لیندشتت-پوانکاره، با توجه به معادله ۸، شکل مود به صورت تابعی از زمان و پارامتر اغتشاشی  $X(x; \varepsilon)$

و نه تابعی از متغیر زمان، در نظر گرفته می‌شود، در حالی که در روش مقیاس‌های چندگانه زمانی شکل مود علاوه بر متغیر مکان و پارامتر اغتشاشی تابعی از متغیر زمان نیز خواهد بود و به صورت  $W(x, t; \varepsilon)$  تعریف می‌گردد. بنابراین در فرکانس غیرخطی به دست آمده از روش لیندشتت-پوانکاره تأثیر دامنه اولیه مشاهده نشده ولی در فرکانس طبیعی منتج از روش مقیاس‌های چندگانه زمانی این اثر به صورت وجود  $\alpha_0$  مشاهده می‌گردد. به ازای  $\alpha_0 = 1$  و با حذف اثر دامنه اولیه، نتایج دو روش یکسان و با بیشتر شدن  $\alpha_0$  درصد اختلاف بیشتر خواهد شد. نمودار شکل ۲ درصد اختلاف میان فرکانس غیرخطی اول با استفاده از دو روش را به ازای مقادیر مختلف  $\alpha_0$  نمایش می‌دهد.

جدول ۱. فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد غیرخطی یک تیر با تکیه‌گاه ساده  $\varepsilon = 0.1$  و  $\alpha_0 = 3$  و  $a = b = 1$

درصد اختلاف $\left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1} \times 100 \right)$	روش مقیاس‌های چندگانه ( $\omega_2$ )	روش لیندشتت- پوانکاره ( $\omega_1$ )	n
۴/۱۲۹	۹/۲۷۱	۹/۶۹۹	۱
-۲/۱۷۰	۴۰/۷۷۸	۳۹/۹۱۱	۲
۱/۴۹۵	۸۶/۸۵۰	۸۸/۱۶۷	۳
-۱/۱۱۲	۱۶۰/۵۶۲	۱۵۸/۷۹۶	۴
۰/۹۰۱	۲۴۳/۴۲۲	۲۴۵/۶۳۳	۵



شکل ۲. درصد اختلاف فرکانس اول طبیعی بی‌بعد غیرخطی برای یک تیر با تکیه‌گاه ساده  $\varepsilon = 0.1$  و  $a = b = 1$  با استفاده از دو روش لیندشتت-پوانکاره ( $\omega_1$ ) و مقیاس‌های زمانی چندگانه ( $\omega_2$ )

جدول ۴ تأثیر اندازه پارامتر اغتشاشی  $\varepsilon$  را بر ۵ فرکانس طبیعی اول سیستم نشان می‌دهد. همان‌گونه که انتظار می‌رود با افزایش پارامتر اغتشاشی فاصله پاسخ غیرخطی از حالت خطی افزایش می‌یابد.

جدول ۴. فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد خطی و غیرخطی یک تیر با تکیه‌گاه ساده در حالت  $a = b = 1$  به ازای مقادیر مختلف  $\varepsilon$

$\varepsilon$	$\varepsilon = 0.2$	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.05$	$\varepsilon = 0$ (فرکانس خطی)	n
۸/۸۷	۹/۴۷	۹/۶۷	۹/۷۷	۹/۸۷	۱
۴۱/۶۴	۴۰/۳۴	۳۹/۹۱	۳۹/۶۹	۳۹/۴۸	۲
۸۵/۵۳	۸۷/۵۱	۸۸/۱۷	۸۸/۵۰	۸۸/۸۳	۳
۱۶۲/۳۳	۱۵۹/۶۸	۱۵۸/۸۰	۱۵۸/۳۶	۱۵۷/۹۱	۴
۲۴۱/۲۱	۲۴۴/۵۳	۲۴۵/۶۳	۲۴۶/۱۹	۲۴۶/۷۴	۵

شکل‌های ۳ و ۴ شکل مود بی‌بعد نرمالایز شده  $W(x)$  را به ترتیب برای مقادیر  $a = b = 1, n = 1$  و  $a = b = 1, n = 3$  در دو حالت تکیه‌گاه ایده‌آل و غیرایده‌آل نمایش می‌دهد. با توجه به شکل‌ها مشاهده می‌شود که لقی سبب افزایش حداکثر مقدار شکل مود بی‌بعد و نرمالایز شده جرمی در ارتعاشات آزاد و برهم خوردن تقارن شکل نسبت به خط  $x/l = 0.5$  شده است. با توجه به نتایج به‌دست آمده در مود اول لقی سبب افزایش ناچیز حداکثر دامنه شکل مود بی‌بعد نرمالایز شده، از مقدار  $1/414$  به  $1/418$  یعنی کمتر از ۱ درصد می‌گردد ولی در شکل مود سوم حداکثر دامنه در حالت غیر ایده‌آل به  $1/542$  رسیده و افزایشی در حدود ۹ درصد خواهد داشت.

در ادامه برای مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ایده‌آل (خطی) و غیرایده‌آل (غیرخطی) یک تیر با تکیه‌گاه ساده از نتایج به‌دست آمده از روش اغتشاشی لیندشتت-پوانکاره، یعنی معادلات ۲۷ و ۲۸ استفاده شده است. جداول ۲ و ۳ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ایده‌آل و غیرایده‌آل یک تیر با تکیه‌گاه ساده را به ترتیب برای مقادیر  $a = b = 1$  و  $a = b = 3$  به ازای مقدار ثابت پارامتر اغتشاشی  $\varepsilon = 0.1$  نشان می‌دهند.

جدول ۲. فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد خطی و غیرخطی یک تیر با

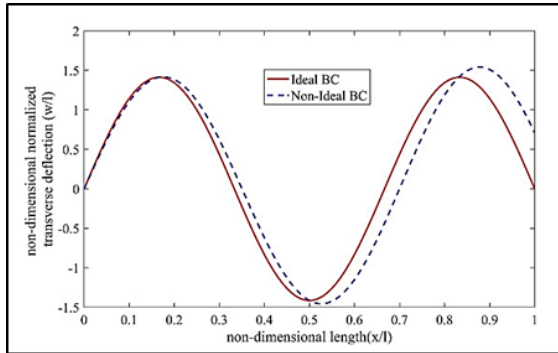
تکیه‌گاه ساده  $\varepsilon = 0.1$  و  $a = b = 1$

n	فرکانس خطی ( $\omega_L$ )	فرکانس غیرخطی ( $\omega_{NL}$ )	درصد اختلاف $\frac{\omega_{NL} - \omega_L}{\omega_L} \times 100$
۱	۹/۸۷۰	۹/۶۶۹	-۲/۰۲۳
۲	۳۹/۴۷۸	۳۹/۹۱۱	۱/۰۹۷
۳	۸۸/۸۲۶	۸۸/۱۶۷	-۰/۷۴۲
۴	۱۵۷/۹۱۴	۱۵۸/۷۹۶	۰/۵۵۹
۵	۲۴۶/۷۴۰	۲۴۵/۶۳۳	-۰/۴۴۸

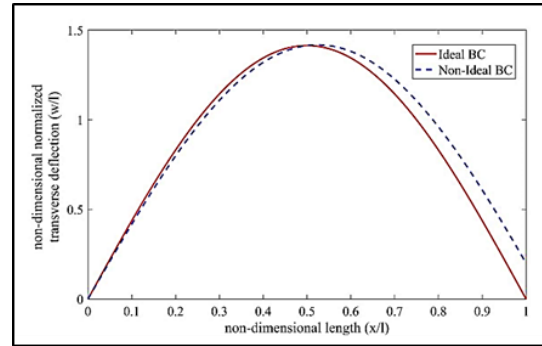
جدول ۳. فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد خطی و غیرخطی یک تیر با

تکیه‌گاه ساده  $\varepsilon = 0.1$  و  $a = b = 3$

n	فرکانس خطی ( $\omega_L$ )	فرکانس غیرخطی ( $\omega_{NL}$ )	درصد اختلاف $\frac{\omega_{NL} - \omega_L}{\omega_L} \times 100$
۱	۹/۸۷۰	۹/۲۷۱	-۶/۰۶۸
۲	۳۹/۴۷۸	۴۰/۷۷۸	۳/۲۹۱
۳	۸۸/۸۲۶	۸۶/۸۵۰	-۲/۲۲۵
۴	۱۵۷/۹۱۴	۱۶۰/۵۶۳	۱/۶۷۷
۵	۲۴۶/۷۴۰	۲۴۳/۴۲۱	-۱/۳۴۵



شکل ۴. شکل مود مود بی بعد و نرمالایز شده سوم تیر با تکیه گاه ساده ایده آل و غیرایده آل ( $\varepsilon = 0.1$ )



شکل ۳. شکل مود بی بعد و نرمالایز شده اول تیر با تکیه گاه ساده ایده آل و غیرایده آل ( $\varepsilon = 0.1$ )

#### ۴. نتیجه گیری

در این مقاله ارتعاشات عرضی یک تیر اویلر برنولی با تکیه گاه ساده با یک شرط مرزی غیرایده آل با استفاده از دو روش لیندشتت-پوانکاره و مقیاس های چندگانه مورد بررسی قرار گرفت. خلاصه نتایج حاصل از تحلیل به صورت زیر است:

۱- هر دو روش اغتشاشی لیندشتت-پوانکاره و مقیاس های چندگانه در خصوص فرکانس غیرخطی به نتایج تقریباً یکسانی رسیده اند. با توجه به معادلات ۲۸ و ۴۶ به ازای  $\alpha_0 = 1$  نتایج هر دو روش کاملاً یکسان بوده و با فاصله گرفتن  $\alpha_0$  از یک، تفاوت پاسخ در دو روش افزایش می یابد. دلیل این مسئله آن است که در روش لیندشتت - پوانکاره، شکل مود به صورت تابعی از مکان و پارامتر اغتشاشی و به صورت  $W(x; \varepsilon)$ ، و نه تابعی از متغیر زمان، در نظر گرفته می شود، در حالی که در روش مقیاس های چندگانه زمانی شکل مود علاوه بر متغیر مکان و پارامتر اغتشاشی تابعی از متغیر زمان نیز خواهد بود و به صورت  $W(x, t; \varepsilon)$  تعریف می گردد. بنابراین در فرکانس غیرخطی به دست آمده از روش لیندشتت-پوانکاره تأثیر دامنه اولیه مشاهده نشده ولی در فرکانس طبیعی منتج از روش مقیاس های چندگانه زمانی این اثر به صورت وجود  $\alpha_0$  در معادله مشاهده می گردد.

۲- با توجه به معادله ۲۷ وجود شرایط مرزی غیرایده آل در تیر سبب افزایش در دامنه شکل مود می گردد. با افزایش شماره مود، درصد افزایش حداکثر دامنه شکل مود نیز افزایش خواهد یافت.

۳- با توجه به معادله ۲۸ بسته به پارامترهای لقی و شماره مود (مثبت یا منفی بودن عبارت ضرب  $\varepsilon$  در معادله)، فرکانس طبیعی می تواند افزایش و یا کاهش یافته و یا در حالت خاص  $an^2\pi^2 = b$  ثابت باقی بماند.

۴- با توجه به نتایج جداول ۱ و ۲ به ازای مقادیر ثابت پارامترهای شرایط مرزی ایده آل  $a$ ،  $b$  و  $\varepsilon$ ، با توجه به شماره مود، شرایط مرزی غیرایده آل می تواند سبب افزایش و یا کاهش فرکانس طبیعی بی بعد گردد. به بیان دیگر فرکانس غیرخطی نسبت به فرکانس خطی، در مدهای فرد کمتر و در مدهای زوج بیشتر است. با توجه به معادله ۲۸، علت این مسئله وجود عبارت  $COSn\pi$  به عنوان ضرب پارامتر اغتشاشی  $\varepsilon$  است، چراکه مقدار این عبارت در مقادیر زوج +۱ و در مقادیر فرد -۱ است.

۵- وجود لقی در یک تکیه گاه سبب برهم خوردن تقارن شکل مودها می گردد.

۶- با توجه به جدول ۳ مشاهده می شود که با سه برابر شدن مقدار لقی ( $a$  و  $b$ ) درصد اختلاف فرکانس ایده آل و

غیرایده‌آل نیز سه برابر خواهد شد. با توجه به رابطه ۲۸ و ارتباط خطی  $\omega_1$  با  $a$  و  $b$ ، این مسئله دور از انتظار نیست. ۷- همان‌گونه که انتظار می‌رود و با توجه به نتایج جدول ۴، با افزایش پارامتر اغتشاشی  $\varepsilon$  فاصله پاسخ غیرخطی از حالت خطی افزایش می‌یابد.

### ۵. فهرست علائم

#### علائم انگلیسی

$t$	متغیر زمان
$w$	جابه‌جایی عرضی تیر
$W$	تابع مکانی یا شکل مود
$T$	تابع زمانی
$E$	مدول الاستیسیته
$I$	ممان اینرسی سطح مقطع

$A$  سطح مقطع تیر / تابع دامنه تابع زمانی در پاسخ فرض شده برای روش مقیاس‌های چندگانه

### ۷. مأخذ

- [1] Pakdemirli, M., and H. Boyacı, "Vibrations of a stretched beam with non-ideal boundary conditions", *Mathematical and Computational Applications*, 2001, Vol.6, no.3, pp.217-220.
- [2] Pakdemi, M., and H. Boyaci, "Effect of non-ideal boundary conditions on the vibrations of continuous systems", *Journal of Sound and Vibration*, 2002, Vol.249, no.4, p.815d823.
- [3] Pakdemirli, M., and H. Boyaci, "Vibrations of a Simply Supported Beam with a Non-Ideal Support at an Intermediate Point", *Mathematical and Computational Applications*, 2003, Vol.8, no.2, pp.159-164.
- [4] Aydogdu, Metin, and Mehmet Cem Ece "Buckling and vibration of non-ideal simply supported rectangular isotropic plates", *Mechanics Research Communications*, 2006, Vol.33, no.4, pp.532-540.
- [5] Boyaci, Hakan, "Vibrations of stretched damped beams under non-ideal boundary conditions", *Sadhana*, 2006, Vol.31, no.1, pp.1-8.
- [6] Mohammadi, J., and M. GHEYSARI, "Effect of Non-ideal Boundary Conditions on Buckling of Rectangular Functionally Graded Plates", 2009, pp.91-97.
- [7] Kamali Eigoli, A., and M. T. Ahmadian, "Nonlinear vibration of beams under nonideal boundary conditions", *Acta mechanica*, 2011, Vol.218, no.3, pp.259-267.
- [8] Lee, Jinhee, "Free vibration analysis of beams with non-ideal clamped boundary conditions", *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2013, Vol.27, no.2, pp.297-303.
- [9] Yurddaş, A., E. Özkaya, and H. Boyacı, "Nonlinear vibrations of axially moving multi-supported strings having non-ideal support conditions", *Nonlinear Dynamics*, 2013, Vol.73, no.3, pp.1223-1244.

$l$  طول تیر

$a$  تابع اثر لقی در شرط مرزی جابه‌جایی در  $x = 1$  برای تیر

$b$  تابع اثر لقی در شرط مرزی گشتاور در  $x = 1$  برای تیر

$n$  شماره مود

#### علائم یونانی

$\varepsilon$  پارامتر اغتشاشی

$\omega$  فرکانس طبیعی تیر

$\alpha_0$  ضریب ثابت در دامنه تابع زمانی در پاسخ فرض شده برای روش مقیاس‌های چندگانه

#### بالانویس

\* متغیر بی بعد

- [10] Yang, Guolai, Jingzhou Yang, Chen Qiang, Jianli Ge, and Qiang Chen, "Natural frequencies of a cantilever beam and block system with clearance while block staying on given position", *Journal of Vibration and Control*, 2013, Vol.19, no.2, pp.262-275.
- [11] Claeys, Maxence, J-J. Sinou, J-P. Lambelin and Benoit Alcoverro, "Multi-harmonic measurements and numerical simulations of nonlinear vibrations of a beam with non-ideal boundary conditions", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, Vol.19, no.12, pp.4196-4212.
- [12] Ghadiri, Majid, Keramat Malekzadeh, and Faramarz Ashenai Ghasemi, "Free Vibration of an Axially Preloaded Laminated Composite Beam Carrying a Spring-Mass-Damper System with a Non-Ideal Support", *Jordan Journal of Mechanical & Industrial Engineering*, 2015, Vol.9, no.3.
- [13] Bağdatlı, Süleyman M., and Bilal Uslu, "Free vibration analysis of axially moving beam under non-ideal conditions", *Struct Eng Mech*, 2015, Vol.54, no.3, pp.597-605.
- [14] Roncen, T., J-J. Sinou, and J. P. Lambelin, "Non-linear vibrations of a beam with non-ideal boundary conditions and uncertainties–Modeling, numerical simulations and experiments", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, Vol.110, pp.165-179.
- [15] Heryudono, Alfa RH, and Jinhee Lee, "Free vibration analysis of Euler-Bernoulli beams with non-ideal clamped boundary conditions by using Padé approximation", *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2019, Vol.33, no.3, pp.1169-1175.
- [16] Rao, Singiresu S., "Vibration of continuous systems", John Wiley & Sons, 2019.
- [17] Nayfeh, Ali H., and Dean T. Mook, "Nonlinear oscillations", John Wiley & Sons, 2008.
- [18] Nayfeh, A., "Introduction to perturbation techniques", John Wiley & Sons, New York 1993.

پی نوشت

1. Weakly Nonlinear System
2. Perturbation Methods
3. Packdemirli
4. Boyaci
5. Lindstedt-Poincare technique
6. Method of Multiple Scales
7. Aydogdu
8. Cem Ece
9. Isotropic
10. Functionally Graded
11. Iteration Perturbation Method
12. Yurddas
13. Hamilton's Principle
14. Claeys
15. Harmonic Balance Method
16. Time-integration Method
17. Galerkin Method
18. Average Acceleration Method
19. Bagdatli
20. Uslu
21. Roncen
22. Shooting Method
23. Heryudono
24. Pade
25. Solvability Condition
26. Adjoint
27. Complex Conjugate
28. Secular Terms
29. Non-Secular Terms