

بررسی احتمال ایجاد پدیده تشدید در پره‌های روتور کامپوزیتی یک بالگرد

محمد رضا الهامی*

دانشیار

دانشکده فنی و مهندسی

دانشگاه جامع امام حسین (علیه‌السلام)

mrelhami.63@gmail.com

محمد رضا نجفی

دانشجوی دکتری

دانشکده فنی و مهندسی

دانشگاه جامع امام حسین (علیه‌السلام)

najafi.m@ihu.ac.ir

حسین روستازاده

کارشناسی ارشد

دانشکده فنی و مهندسی

دانشگاه جامع امام حسین (علیه‌السلام)

roostazadeh1399@chmail.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۲۶

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۱/۲۵

چکیده

در این مقاله تحلیل ارتعاشی پره یک روتور^۱ کامپوزیتی یک نمونه بالگرد مورد نیاز صنعت مبتنی بر روش پارامتر متمرکز انجام شده تا احتمال ایجاد پدیده تشدید در آن بررسی شود. ابتدا به معادلات حرکت خارج از صفحه و داخل صفحه گردش پره روتور پرداخته شده و سپس معادلات ارتعاش پره و اعمال شرایط مرزی در مرکز دوران و ریشه با لولا و بدون لولا استخراج می‌شود و تأثیر پارامترهای مختلف بر روی فرکانس‌های طبیعی پره مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای به دست آوردن شکل مودهای پره بالگرد از روش مایکل اشتاد^۲ استفاده شده و با برنامه‌نویسی به زبان متلب و پس از صحت‌سنجی، دیاگرام تشدید بالگرد ترسیم می‌گردد. نتایج نشان می‌دهد که پدیده تشدید در مودهای اول و دوم و در محدوده کاری بالگرد، رخ نخواهد داد. با افزایش دور روتور، فرکانس‌های در جهت خارج از صفحه سریع‌تر از فرکانس‌های داخل صفحه افزایش می‌یابد. همچنین افزایش دور باعث افزایش نیروی گریز از مرکز پره شده و در نتیجه باعث بیشتر شدن نیرویی که در جهت اثرات مثبت توزیع سفتی طول پره است، می‌گردد. بنابراین موقعیت حداکثر تغییر مکان‌ها به سمت نوک پره حرکت نموده و همان رفتار افزایش توزیع سفتی در پره را از خود نشان می‌دهد.

واژگان کلیدی: پره بالگرد، فرکانس طبیعی، مودهای ارتعاشی، روش مایکل اشتاد، سفتی پره، دیاگرام تشدید.

۱. مقدمه

بررسی و تحلیل ارتعاشات قطعات چرخنده، همواره یکی از مسائل مهم و اساسی در سازه‌های دینامیکی بوده است. در بالگرد نیز اساسی‌ترین بحث ارتعاشات، مربوط به پره‌های روتور اصلی است که نقش آنها تأمین نیروهای برآ و پیشران است. اگر ارتعاشات پره‌ها با روش‌های مناسب کنترل نشود،

باعث اختلال در عملکرد بالگرد، خستگی زودرس قطعات و در نتیجه کاهش عمر سیستم شده و حتی ممکن است باعث شکست پره و سقوط بالگرد شود. بررسی ارتعاشی پره مسئله‌ای بسیار پیچیده است. علت این است که نه تنها پره دارای درجات آزادی زیادی است بلکه در این حالت حرکات

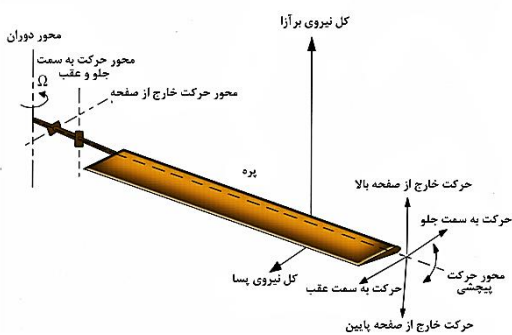
پره به وسیله معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به روش هم‌گیری غیرخطی مدل می‌گردند.

هوبولت و بروکس^۳ [۱] اولین کسانی بودند که معادلات دیفرانسیل را برای حرکات خمش طولی، خمش عرضی و پیچش به همراه زاویه پیچشی اولیه به‌دست آوردند. روش‌های متعددی برای به‌دست آوردن حل تقریبی این معادلات ارائه گردیده که برای مثال می‌توان از روش‌های ماتریس انتقال و ماتریس انتگرالی که توسط مورسی^۴ [۲،۳] به‌کار برده شده است، نام برد. بررسی ارتعاشات پره‌های بالگرد براساس روش‌های دیگری همچون کامک^۵ [۴]، سین-تریم^۶ [۵]، روش کنترل فعال [۶] نیز انجام شده است. سیمون و نیومن^۷ [۷] به موضوع منابع بار روتور که عامل اصلی ایجاد ارتعاشات در بالگرد است، پرداختند و دپارتمان مهندسی وزارت دفاع آمریکا [۸] براساس آن به ارائه روش مایکل اشتاد جهت محاسبه فرکانس طبیعی برای بالگردها در برنامه جامع دینامیکی روتور به نام C81 پرداخت. رایت و همکاران^۸ [۹] تحلیل دینامیکی تیرهای دوار همگن دارای توزیع جرم و سفتی خطی را با استفاده از سری‌های فریبینوس^۹ انجام دادند. بایلاوا^{۱۰} [۱۰] یک بازنگری کلی بر روش‌های محاسبه ارتعاشات این تیرها از قبیل روش مایکل اشتاد، گالرکین، ریلی ریتز و روش المان محدود انجام داد. سوریس و همکاران^{۱۱} [۱۱] ارتعاشات تیر دارای زاویه پیچش اولیه را به کمک توابع انتگرالی تحلیل کردند. فرانسیس و ایوان^{۱۲} [۱۲] به ارائه روش‌های محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها برای تیرهای دوار پرداختند. لین و همکاران^{۱۳} [۱۳-۱۵] در تحقیقات مجزا ارتعاشات آزاد تیر غیرهمگن دوار با شرایط مرزی الاستیک و جرم متمرکز را همراه با اثر استهلاکی بررسی و تابع گرین را برای این تیر به‌دست آوردند. ساعد و کامل [۱۶] اثر کنترل اشباع جاذب خطی در کاهش ارتعاشات به‌وجود آمده به دلیل حرکات پروانه‌ای پره‌های روتور را بررسی کردند. آنها پاسخ‌های فرکانسی و روش‌های فاز صفحه‌ای را بررسی کردند. جازی و همکاران^{۱۴} [۱۷] اثر جرم متمرکز بر

ارتعاشات جانبی نانو تیر را مورد مطالعه قرار دادند و نیروی برشی با و بدون در نظر گرفتن میزان اثرگذاری کوچک شدن مقیاس را بررسی کردند. قدیری و همکاران [۱۸] اثر سفتی متقارن درون صفحه پره‌ها را بررسی کردند. آنها با ساده‌سازی معادلات حرکت و استفاده از روش جرم متمرکز، اثر تغییرات زیاد سفتی در صفحه بر پایداری پره را نشان دادند. شانون و فورشاو^{۱۵} [۱۹] ارتعاشات پره‌ها در خارج از صفحه دوران و تشدید آنها در کنار تأثیر پیچش پره‌ها مورد بررسی قرار دادند. هو و شین^{۱۶} [۲۰] معادلات حرکت یک تیر دوار را در خمش خارج و داخل صفحه استخراج و فرکانس‌های طبیعی آن را به‌دست آوردند. راثو^{۱۷} [۲۱] روش‌های تقریبی محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها را برای سیستم‌های پیوسته مورد بررسی قرار داد. هولمن^{۱۸} [۲۲] روش ترسیم نمودار کمپل با استفاده از آنالیز مودال را در پژوهشی ارائه نمود. میرزایی و همکاران تغییر شکل حالت پایدار و ترموالاستیک یک تیر ساده تابع متغیر را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بررسی کردند. آنها با در نظر گرفتن کرنش‌های خزشی در ارتباط با کرنش‌های ناشی از تنش، معادلات دیفرانسیل مربوط به کرنش خزشی مؤثر را ارائه کردند [۲۳-۲۶]. تحلیل ارتعاشات تیرهای دوار [۲۷-۲۸] بالاخص در پره‌های بالگرد [۲۹-۳۳] از مسائلی است که بسیار مورد نیاز صنعت بوده و مورد توجه محققان است.

در این پژوهش احتمال ایجاد پدیده تشدید و تحلیل ارتعاشاتی پره‌های روتور یک بالگرد مدل ۴۰۵ با روشی نوین که بتواند شرایط مرزی را به خوبی اعمال کند، بررسی شده است. علاوه بر موضوع مورد بررسی که بسیار مورد نیاز صنعت و کاربردی است، روش به‌کار رفته نیز دارای نوآوری است. پیچیدگی بررسی ارتعاشی پره بدلیل وجود درجات آزادی زیاد و حالت‌های مختلف حرکت پره از یک سو و اهمیت کاهش ارتعاشات روتور به‌منظور کنترل‌پذیری بالگرد و راحتی خدمه و جلوگیری از بروز پدیده تشدید از سوی دیگر، بر اهمیت موضوع می‌افزاید. ابتدا از روش پارامتر متمرکز استفاده شده و

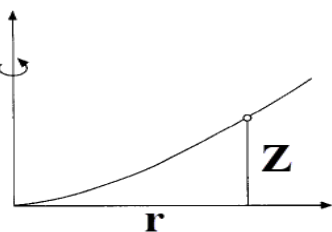
برای این روش مدل سازی‌ها قابل توجیه باشند. در این تحقیق رفتار دینامیکی حرکت پره خارج از صفحه چرخش و در صفحه چرخش و ترکیب آنها مدل سازی شده است. پره مورد تحقیق از نوع NACA 8h12 بوده که دارای یک هسته (اسپار) از جنس آلومینیوم 6106 T-6 و فوم بوده و جنس هاب نیز آلومینیوم ۲۰۲۴ است. در شکل ۱ محورهای دوران، محور حرکت به سمت جلو و عقب، محور حرکت خارج از صفحه، حرکت به سمت جلو، حرکت به سمت عقب، کل نیروی پسا، حرکت خارج از صفحه پایین، کل نیروی برآزا



شکل ۱. نمایش حرکت پره در جهات مختلف

۱-۲. حرکت خارج از صفحه پره

خمش خارج از صفحه به عنوان تغییر مکان پره در صفحه هاب روتور تعریف می‌شود. این حرکت در شکل ۲ نشان داده شده است. در این شکل، Z بیانگر جابه‌جایی خارج از صفحه یا حرکت خارج از صفحه یک المان پره و r مقدار فاصله از محور دوران است [۱۲].



شکل ۲. منحنی خمش خارج از صفحه

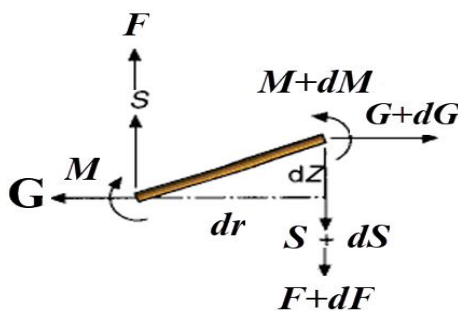
شکل ۳ نیروهای وارده به یک المان پره را نشان می‌دهد. S مقدار نیروی برشی موضعی، M گشتاور خمشی، G مقدار

معادلات دیفرانسیل حرکت پره روتور با روش پارامترهای متمرکز در حالت ارتعاش آزاد پره و تحت میدان نیروی گریز از مرکز استخراج شده و با نوشتن یک کد برنامه‌نویسی به محاسبه فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها و ترسیم دیاگرام تشدید پره بالگرد ۴۰۵ پرداخته می‌شود. این روش علاوه بر این که شرط مرزی اتصال پره با لولا به هاب را با دقت خوب ارضا می‌کند، محاسبه تغییرات فرکانس‌های غیرهمگیر را برحسب دور بر دقیقه نیز ممکن می‌سازد. کد نوشته شده همچنین امکان بررسی دقیق پره را بدون نیاز به مدل سازی‌های پیچیده فراهم می‌سازد و بدین ترتیب استفاده از روش مذکور که منجر به تولید یک کد برنامه‌نویسی شده است، کمک شایانی به صنایع می‌کند تا صرفه‌جویی زیادی در زمان‌بندی طراحی سازه‌ای پره داشته باشد. از آنجا که هندسه و توزیع جرم و توزیع سفتی در طول پره، تنها داده‌های مورد نیاز جهت تحلیل با روش حاضر هستند، با در نظر گرفتن پره به‌عنوان یک تیر دوار، حرکات مختلف آن از قبیل خمش در صفحه دوران و خمش در صفحه عمود بر صفحه دوران، به‌طور مجزا بررسی می‌شود.

۲. مدل سازی مسئله

به‌منظور هرگونه بحث روی دینامیک روتور سیستم بالگرد بایستی این موضوع در نظر گرفته شود که تأثیر متقابل قطعات بر روی یکدیگر باعث پیچیدگی آنالیز دینامیک روتور می‌گردد. زاویه پیچش هندسی پره همراه با تغییر ضخامت و شکل ایرفویل در طول آن ممکن است وجود داشته باشد که تمام این فاکتورها باعث غیریکنواختی و باعث پیچیدگی در رفتار دینامیکی آنها می‌گردد و همچنین تنوع نحوه اتصال این پره‌ها به روتورها به پیچیدگی موضوع می‌افزایند. اتصال پره‌ها به روتورها به دو صورت صلب یا لولایی انجام می‌شود که همیشه امکان مدل سازی دینامیکی به‌طور دقیق از تمامی جهات وجود ندارند [۳۴]. اگر هدف آنالیز دینامیکی طراحی اولیه یا بررسی ساختار کیفیت رفتاری باشد، فرضیات ساده‌سازی می‌توانند

نیروی جانب مرکز و F بیانگر بارهای خارجی وارده بر المان است که شامل نیروهای آیرودینامیکی و اینرسی است.



شکل ۳. نیروهای وارده بر یک المان از پره

چنانچه از روش جداسازی متغیرها استفاده شود، حل این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$z = \gamma(r) \phi(t) \quad (۸)$$

که $S(r)$ فقط تابعی از r و $\phi(t)$ تنها تابعی از t است. با جای‌گذاری معادله ۸ در رابطه ۷ داریم:

$$\frac{d^2 \left(EI \frac{d^2 \gamma}{dr^2} \right)}{dr^2} - \frac{d \left(G \frac{d\gamma}{dr} \right)}{dr} = \frac{-d^2 \phi}{dt^2} \quad (۹)$$

از آنجاکه طرف چپ معادله ۹ تنها تابعی از r و طرف راست این معادله تنها تابعی از t است، پس دو طرف معادله باید برابر با مقداری ثابت باشد. این مقدار ثابت دارای بعد $[T^2]$ است و می‌توان آن را به صورت $\lambda^2 \Omega^2$ نوشت. در نتیجه داریم:

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(EI \frac{d^2 \gamma}{dr^2} \right) - \frac{d}{dr} \left(G \frac{d\gamma}{dr} \right) - m \lambda^2 \Omega^2 \gamma = 0 \quad (۱۰)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \lambda^2 \Omega^2 \phi = 0 \quad (۱۱)$$

چنانچه پارامتر Z به صورت $Z = \frac{z}{R}$ تعریف شود و $x = \frac{r}{R}$ و $\psi = \Omega t$ باشد، آنگاه معادلات ۱۰ و ۱۱ خواهند شد:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 \gamma}{dx^2} \right) - R^2 \frac{d}{dx} \left(G \frac{d\gamma}{dx} \right) - m \lambda^2 \Omega^2 R^4 \gamma = 0 \quad (۱۲)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\psi^2} + \lambda^2 \phi = 0 \quad (۱۳)$$

در این رابطه R شعاع پره است. شرایط مرزی حاکم بر مسئله متناسب با نوع پره است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

الف- پره مفصلی که شامل لولای خارج از صفحه با خروج از مرکز e است. در لولای خارج از صفحه مقدار تغییر مکان و گشتاور خمشی صفر است و داریم:

$$\text{At } x = e : S = 0, \frac{d^2 S}{dx^2} = 0$$

و چون مقدار برش و گشتاور خمشی در نوک پره صفر است:

$$\text{At } x = 1 : \frac{d^3 S}{dx^3} = 0, \frac{d^2 S}{dx^2} = 0$$

اگر معادلات تعادل برای این المان پره نوشته شود، خواهیم داشت:

$$dG + m \Omega^2 dr = 0 \quad (۱)$$

$$dS + dF - m dr \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \quad (۲)$$

$$G dz + S dr - dM = 0 \quad (۳)$$

در این روابط، Ω سرعت دورانی و m جرم پره است. از معادله ۲ و ۳ داریم:

$$\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial r} = m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (۴)$$

$$\frac{\partial M}{\partial r} = G \frac{\partial z}{\partial r} + S \quad (۵)$$

با دیفرانسیل‌گیری از معادله ۵ و جای‌گذاری در معادله ۴ و همچنین با استفاده از تئوری مقدماتی خمش تیرها، معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(G \frac{\partial z}{\partial r} \right) + m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial r} \quad (۶)$$

در اینجا EI نشان دهنده سفتی خمشی است. هنگامی که بارگذاری روتور صفر باشد، معادله ۶ بیانگر حرکت آزاد پره روتور در خلاء خواهد بود. بنابراین معادله ارتعاش آزاد پره چنین خواهد شد:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(G \frac{\partial z}{\partial r} \right) + m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \quad (۷)$$

ب- پره فاقد لولا^{۲۱} که شیب تغییر مکان و تغییر مکان در ریشه پره صفر است:

$$At x = 0 : S = 0, \frac{dS}{dx} = 0$$

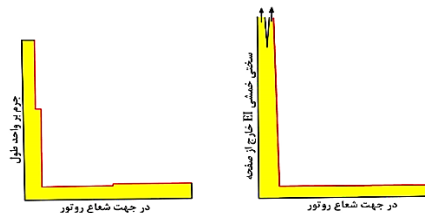
و در نوک پره نیز داریم:

$$At x = 1 : \frac{d^2S}{dx^2} = \frac{d^3S}{dx^3} = 0$$

به دلیل اینکه معادله ۸ حل معادله ۷ است، در نتیجه $\gamma(x)$ و $\emptyset(t)$ باید در معادلات ۱۲ و ۱۳ و شرایط مرزی آن صدق کنند. و از آنجایی که λ بیانگر مقادیر ثابت مختلف است، این مسئله جواب‌های زیادی خواهد داشت. این جواب‌ها معرف تغییر شکل آزاد پره بوده و مودهای نرمال نامیده می‌شوند. بنابراین معادله ۱۳ حرکات هارمونیک ساده‌ای را بیان می‌کند که متناظر با تعداد نامحدودی از مقادیر λ و یا فرکانس‌های طبیعی $\omega_n = \lambda\Omega$ هستند. در نتیجه λ_n نسبت فرکانس طبیعی ω_n پره به فرکانس دورانی شافت Ω برای n امین شکل مود است.

۳. استخراج معادلات

اکنون می‌توان معادله ۱۲ را به منظور به دست آوردن شکل مودهای $\gamma_n(x)$ و فرکانس‌های طبیعی مربوطه آنها $\lambda_n\Omega$ حل نمود. در حالت کلی توزیع سفتی خمشی (EI) و توزیع جرم پره، توابعی پیچیده از راستای شعاعی هستند. نمونه‌ای از این تغییرات شعاعی در شکل ۴ نشان داده شده است [۱۹].



شکل ۴. نمونه‌ای از توزیع جرم و سفتی یک پره [۱۹]

مشاهده می‌شود که در بخش بزرگی از طول پره، جرم و سفتی خمشی تقریباً ثابت است و ناپیوستگی عمده این توزیع‌ها در بخش ریشه پره رخ می‌دهد. در مورد یک پره ثابت غیردوار با توزیع‌های جرم و سفتی یکنواخت حل دقیق تحلیلی برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی وجود دارد. با این وجود در مورد

یک پره دوار، با توزیع‌های جرم و سفتی غیریکنواخت، حل دقیق وجود ندارد. معادله ۱۲ در مورد پره‌ای دوار با توزیع‌های جرم و سفتی یکنواخت به صورت زیر در خواهد آمد:

$$k^2 \frac{d^4z}{dx^4} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dz}{dx} \right] - \lambda_n^2 z = 0 \quad (14)$$

که در آن $k^2 = \frac{EI}{m\Omega^2 R^4}$ یک مقدار ثابت است.

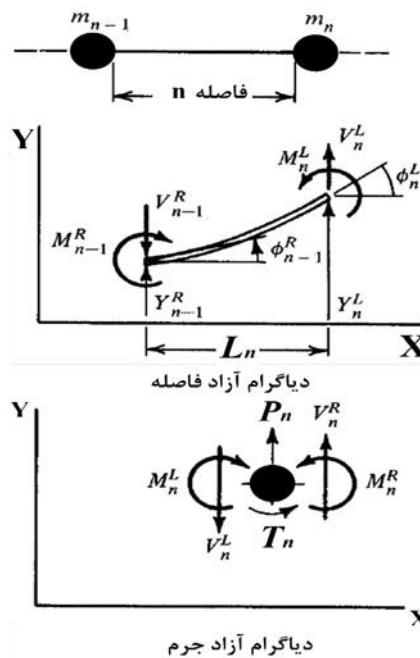
حل تحلیلی دقیق در مورد معادله ۱۴ وجود ندارد. اما ملاحظه می‌شود که اثر دوران بر روی شکل مودها بسیار کم بوده و در نتیجه می‌توان از نتایج پره غیردوار به عنوان تقریب خوبی در محاسبه شکل مودهای پره دوار بهره گرفت. روش‌های تقریبی حل معادله ۱۴ که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرند، به دو دسته مودهای فرضی و پارامتر متمرکز تقسیم می‌شوند [۱۲] که در این پژوهش از روش پارامترهای متمرکز استفاده شده است.

۴. روش‌های پارامتر متمرکز

در این تکنیک کل پره به صورت قطعه‌های مجزا از هم در نظر گرفته می‌شوند. در این راستا معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر خمش پره با یک سیستم معادلات جبری جایگزین می‌شود. در ذیل روش‌های پارامتر متمرکز دو روش وجود دارد که عبارت‌اند از روش مایکل اشتاد و روش اجزا محدود دینامیکی که در این مقاله روش مایکل اشتاد مورد بررسی قرار می‌گیرد. در روش مایکل اشتاد پره به چندین قسمت تبدیل شده و خاصیت سفتی هر المان توسط یک تیر بدون جرم با سفتی معادل همان المان مدل شده و جرم آن المان نیز توسط یک جرم متمرکز لحاظ می‌گردد. از مزایای این روش اعمال شرایط مرزی در حالات مختلف پره است که بدون محدودیت مخصوصاً شرط مرزی اتصال پره با لولا به هاب، جواب‌های دقیقی را می‌دهد. از طرفی در تقسیم‌بندی المان‌ها لزومی ندارد که طول آنها یکسان باشد و با توجه به سرعت و دقت در همگرایی جواب‌ها، بسیاری از سازندگان بالگردها از این روش

برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی پره استفاده می‌نمایند چرا که امکان محاسبه تغییرات فرکانس‌های غیرهمگیر را برحسب دور بر دقیقه ممکن می‌سازد.

جهت به دست آوردن معادلات از این روش، دیاگرام آزاد یک قسمت از مدل را، شامل یک تیر بدون جرم و یک جرم متمرکز، به طور جداگانه رسم می‌کنیم. این دیاگرام‌ها در شکل ۵ رسم شده‌اند.



شکل ۵. نمایش المان ماتریس انتقال

ابتدا روابط تعادل نیروها و گشتاورها را روی تیر می‌نویسیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$M_n^L = M_{n-1}^R - L_n V_{n-1}^R, \quad V_n^L = V_{n-1}^R \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^L = \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EI} & -\frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^R \quad (20)$$

اکنون معادلات تعادل را روی جرم متمرکز بررسی می‌کنیم. این معادلات عبارت خواهند بود از:

که V نیروی برشی و M گشتاور روی تیر است. تغییراتی که روی شیب تیر در اثر گشتاور و نیروی برشی ایجاد می‌شود چنین خواهد شد:

$$\Phi_n^L - \Phi_{n-1}^R = \left(\frac{L}{EI}\right)_n M_n^L + \left(\frac{L^2}{2EI}\right)_n V_n^L \quad (16)$$

با جایگزینی معادلات ۱۵ در معادله ۱۶ و ساده‌سازی، تغییرات شیب را برحسب المان $n-1$ می‌نویسیم در این صورت:

$$\Phi_n^L - \Phi_{n-1}^R + \left(\frac{L}{EI}\right)_n M_{n-1}^R - \left(\frac{L^2}{2EI}\right)_n V_{n-1}^R = 0 \quad (17)$$

سپس معادله تغییرات روی جابه‌جایی عرضی تیر را می‌نویسیم که چنین می‌گردد:

$$Y_n^L - Y_{n-1}^R = L_n \Phi_{n-1}^R + \left(\frac{L^2}{2EI}\right)_n M_{n-1}^R + \left(\frac{L^3}{3EI}\right)_n V_{n-1}^R \quad (18)$$

با جایگزینی معادلات ۱۵ در معادله ۱۸ و ساده‌سازی این معادله خواهیم داشت:

$$Y_n^L - Y_{n-1}^R + L_n \Phi_{n-1}^R + \left(\frac{L^2}{2EI}\right)_n M_{n-1}^R - \left(\frac{L^3}{6EI}\right)_n V_{n-1}^R = 0 \quad (19)$$

معادلات ۱۵، ۱۷ و ۱۹ را به صورت ماتریسی می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} M_n^R &= M_n^L - \omega^2 J_n \Phi_n^L \\ V_n^R &= V_n^L - \omega^2 m_n Y_n^L \end{aligned} \quad (21)$$

$$Y_n^L = Y_n^R, \quad \Phi_n^L = \Phi_n^R \quad (22)$$

در این رابطه ω نشان دهنده فرکانس و J_n اینرسی را نشان

می دهد. برای حرکت این جرم صلب داریم:

سپس معادلات جرم متمرکز نیز به صورت ماتریسی نوشته

می شوند. این ماتریس چنین می شود:

$$\begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 J & 1 & 0 \\ -\omega^2 m & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^L \quad (23)$$

تیر و جرم متمرکز به دست می آید. با قرار دادن معادله ۲۳ در

با به دست آوردن ماتریس های انتقال برای تیر بدون جرم و

معادله ۲۰ این ماتریس به دست می آید:

جرم متمرکز، ماتریس انتقال برای یک قسمت از پره شامل

$$\begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 J & 1 & 0 \\ -\omega^2 m & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^L$$

$$\begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EI} & -\frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^R \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^L = \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EI} & -\frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & -\omega^2 J & 1 - \omega^2 J \frac{L}{EI} & -L + \omega^2 J \frac{L^2}{2EI} \\ -\omega^2 m & -\omega^2 mL & -\omega^2 m \frac{L^2}{2EI} & 1 + \omega^2 m \frac{L^3}{6EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^R$$

معادله ۲۴ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\{Z\}_n = [T]_0 [T]_1 [T]_2 \dots [T]_n \{Z\}_0 \quad (25)$$

حالت برای تیر به دست می آید. معادلات فوق برای یک تیر بدون دوران به دست آمده است.

با اعمال شرایط مرزی برای $\{Z\}_0$ در معادله ۲۵ بردار $\{Z\}_n$ به دست می آید. سپس با داشتن $\{Z\}_n$ از معادله ۲۴ بردار $\{Z\}_{n-1}$ محاسبه می شود و به همین روش تمامی بردارهای

تغییرات شیب و جابه‌جایی را نیز از معادلات ۲۸ در معادلات ۱۶ و ۱۸ اعمال می‌کنیم که در این صورت و پس از ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Phi_{n-1}^R &= \left[1 + \left(\frac{L^2}{2EI} \right)_n F_n^L \right] \Phi_n^L \\ &= \left(\frac{L}{EI} \right)_n M_n^L \quad (29) \\ &\quad - \left(\frac{L^2}{2EI} \right)_n V_n^L \end{aligned}$$

معادله جابه‌جایی نیز پس از قرار دادن مقدار Φ_{n-1}^L از معادله ۲۹ و ساده‌سازی چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} \Phi_{n-1}^R &= Y_n^L - \left[L_n \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{L^2}{6EI} \right)_n F_n^L \right] \Phi_n^L \quad (30) \\ &= \left(\frac{L^2}{2EI} \right)_n M_n^L \quad (\\ &\quad + \left(\frac{L^3}{6EI} \right)_n V_n^L \end{aligned}$$

سپس مقدار $Y_n^L - Y_{n-1}^L$ را از معادله ۳۰ در معادله ۲۸ قرار می‌دهیم بنابراین:

$$\begin{aligned} M_{n-1}^R &= - \left[L_n + \left(\frac{L^3}{6EI} \right)_n F_n^L \right] F_n^L \Phi_n^L + \\ &\quad \left[1 + \left(\frac{L^2}{2EI} \right)_n F_n^L \right] M_n^L + \left(\frac{L^3}{6EI} \right)_n V_n^L \quad (31) \end{aligned}$$

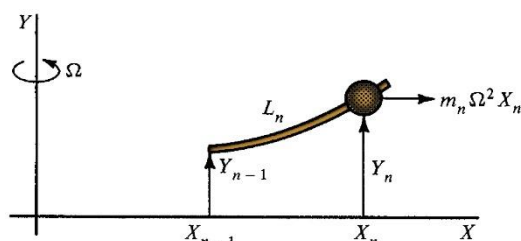
ماتریس انتقال تیر در این حالت از معادلات ۳۰ و ۳۱ به صورت زیر به دست می‌آید:

شکل ۶ اعمال حالت دوران روی تیر را نشان می‌دهد. نحوه به دست آوردن معادلات در این حالت نیز مشابه حالت قبل است. با این تفاوت که در به دست آوردن ماتریس انتقال برای یک قسمت پره، معادلات را بر حسب n مرتب می‌کنیم. نیروی گریز از مرکز روی جرم متمرکز m_n اعمال شده و مقدار آن برابر است با:

$$F_n^L = F_n^R + m_n \Omega^2 X_n \quad (26)$$

که در آن $F_n^L = \sum_{i=n}^N m_i \Omega^2 X_i$ مؤلفه عمودی نیروی F_n^L بر تیر $F_n^L \Phi_n^L$ است که شیب در المان n است. فرض می‌کنیم که تغییرات روی شیب و جابه‌جایی در اثر نیروی $F_n^L \Phi_n^L$ به ترتیب ΔY ، $\Delta \Phi$ باشد. این تغییرات چنین می‌شوند:

$$\begin{aligned} \Delta Y &= \left(\frac{L^3}{3EI} \right)_n F_n^L \Phi_n^L, \Delta \Phi \\ &= \left(\frac{L^2}{2EI} \right)_n F_n^L \Phi_n^L \quad (27) \end{aligned}$$



شکل ۶. نیروی گریز از مرکز بر روی المان

اگر طول تیر را L فرض کنیم گشتاور $-F_n^L (Y_n^L - Y_{n-1}^L)$ به معادله گشتاور در ۲۱ اضافه شده و خواهیم داشت:

$$M_{n-1}^R = M_n^L + L_n V_n^L - F_n^L (Y_n^L - Y_{n-1}^L) \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^R = \begin{bmatrix} 1 & -\left(L + \frac{3L^3}{6EI}\right) & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 + \frac{FL^2}{2EI} & -\frac{L}{EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & -\left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right)F & 1 + \frac{FL^2}{2EI} & \left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^L \quad (32)$$

ماتریس انتقال جرم متمرکز نیز مانند قبل عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega^2 m & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^R \quad (33)$$

یک قسمت از پره به دست می‌آید و داریم:

با جایگزینی معادله ۳۳ در معادله ۳۲ ماتریس انتقال برای

$$\begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^R = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\omega^2 mL^3}{6EI}\right) & -\left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right) & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} \\ -\frac{\omega^2 mL^2}{2EI} & 1 + \frac{FL^2}{2EI} & -\frac{L}{EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ \omega^2 m \left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right) & -\left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right)F & 1 + \frac{FL^2}{2EI} & \left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right) \\ \omega^2 m & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^L \quad (34)$$

۵. نتایج

۵-۱. صحت سنجی

در محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای پره بالگرد مبتنی بر روش مایکل اشتاد از برنامه‌نویسی با زبان متلب^{۲۲} استفاده گردید. جهت صحت‌سنجی کد نوشته شده، از ورودی‌های مرجع [۹]، [۳۵] و [۳۶] در دو حالت تیر یک سر گیردار و یک سر لولا استفاده شد که نتایج آن در جداول ۲ و ۳ آمده است. نتایج به دست آمده تطابق بسیار خوبی با مرجع مورد استناد دارد و به همین دلیل می‌توان از این روش

شرایط مرزی متفاوتی را می‌توان مطابق جدول ۱ در معادلات فوق اعمال نمود. با اعمال این شرایط در معادلات ارائه شده، فرکانس طبیعی و شکل مودها برای پره به دست می‌آید.

جدول ۱. شرایط مرزی

شرایط مرزی	V	M	Φ	Y
یک سر لولا	V	0	Φ	0
دو سر آزاد	0	0	Φ	Y
یک سر گیردار	V	M	0	0

به منظور بررسی ارتعاشات پره بالگرد ۴۰۵ در شرایط پیچیده استفاده کرد.

جدول ۲. مقایسه فرکانس های دقیق مرجع با روش محاسبه شده

برای تیر یک سر گیردار

سرعت دورانی	نتایج	ω_1	ω_2	ω_3
$\Omega=0$ (Rad/s)	مرجع [۹]	۳/۵۱۶	۲۲/۰۳۴۵	۶۱/۶۹۷۲
	مرجع [۳۵]	۳/۵۱۶	۲۲/۰۳۴۵	N/A
	روش حاضر	۳/۵۱۶۱	۲۲/۰۳۶۲	۶۱/۷۰۵۳
$\Omega=3$ (Rad/s)	مرجع [۹]	۴/۷۹۷۵	۲۶/۳۲۰۳	۶۲/۹۸۵
	مرجع [۳۵]	۴/۷۹۷۳	۲۶/۳۲۰۳	N/A
	روش حاضر	۴/۷۹۷۴	۲۶/۳۲۲۷	۶۲/۹۹۴۷
$\Omega=6$ (Rad/s)	مرجع [۹]	۷/۳۶۰۴	۲۹/۸۰۹۱	۶۶/۶۸۴
	مرجع [۳۵]	۷/۳۶۰۴	۲۹/۸۰۹۱	N/A
	روش حاضر	۷/۳۶۰۷	۲۹/۸۱۳۱	۶۶/۶۹۸۳

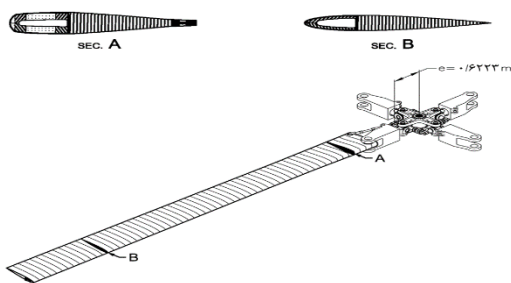
جدول ۳. مقایسه فرکانس های دقیق مرجع با روش محاسبه شده

برای تیر یک سر لولا

سرعت دورانی	نتایج	ω_1	ω_2	ω_3
$\Omega=0$ (Rad/s)	مرجع [۹]	۱۵/۴۱۸۲	۴۹/۹۶۴۹	۱۰۴/۲۴۸
	مرجع [۳۶]	۱۵/۴۱۸۲	۴۹/۹۶۴۹	۱۰۴/۲۴۷۷
	روش حاضر	۱۵/۴۱۹۲	۴۹/۹۷۰۷	۱۰۴/۲۶۵۴
$\Omega=2$ (Rad/s)	مرجع [۹]	۱۶/۲۲۶۱	۵۰/۶۷۶	۱۰۴/۹۶۳
	مرجع [۳۶]	۱۵/۷۹۳۳	۵۰/۴۷۷	۱۰۴/۸۰۹۹
	روش حاضر	۱۶/۲۲۷۳	۵۰/۶۸۲۵	۱۰۴/۹۵۴۸
$\Omega=4$ (Rad/s)	مرجع [۹]	۱۸/۴۳۱۳	۵۲/۷۴۶۳	۱۰۶/۹۷۱
	مرجع [۳۶]	۱۶/۸۶۱۲	۵۱/۹۷۷۸	۱۰۶/۴۷۶
	روش حاضر	۱۸/۴۳۳	۵۲/۷۵۴۶	۱۰۶/۹۹۳۵

با توجه به اطمینان از صحت و دقت کد نوشته شده مدل پره روتور اصلی بالگرد را که از جنس مواد مرکب است به ۱۲۰ بخش در طول پره تقسیم کرده و با توجه به اعمال شرایط مرزی به صورت لولا در محل اتصال به هاب، می بایست مقادیر

جرم به واحد طول پره (m) و توزیع سفتی آن را (EI) به دست آورد. در شکل ۷ نیز پره کامپوزیتی المان بندی در جهت شعاع بالگرد ۴۰۵ نشان داده شده است.



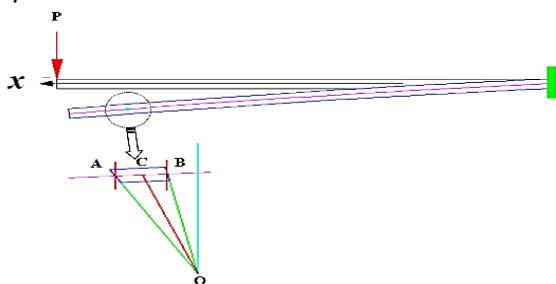
شکل ۷. پره کامپوزیتی المان بندی در جهت شعاع بالگرد

۵-۲. توزیع جرم و سفتی خمشی

برای به دست آوردن سفتی های خمشی تحت بارهای آزمون خمشی از روابط مقاومت مصالح در مورد تیرهای منشوری استفاده می شود. رابطه میان شعاع انحنای سطح خنثی (ρ) و ممان خمشی در شکل ۸ را می توان به صورت زیر نوشت و با استفاده از رابطه مذکور می توان EI را به دست آورد. با توجه به اینکه مقادیر E در مواد کامپوزیتی پره در ناحیه الاستیک ثابت است، تغییرات EI فقط مربوط به تغییرات I در طول پره است.

$$M = P \times x \quad (35)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (36)$$



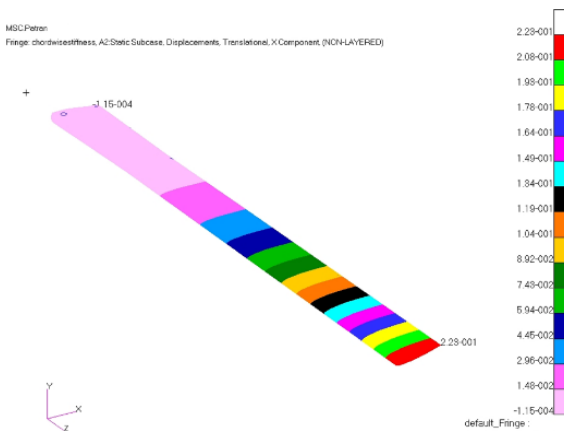
شکل ۸. چرخش المان تیر

فرض می شود که سطح مقطع A به اندازه θ_A و سطح مقطع B به اندازه θ_B نسبت به خط عمود بر افق چرخش کرده باشد و المان انتخاب شده به اندازه کافی کوچک باشد در این صورت $\rho_A = \rho_B \approx \rho$ و زاویه رأس مثلث OAB برابر

با توجه به المان‌های پره (شکل ۸) می‌توان نوشت:

$$EI_i(x) = \frac{P \times (x_{\text{tip}} - x_i) \times (x_i - x_{i-1})}{2 \times \tan\left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2}\right)} \quad (39)$$

با توجه به معادله ۳۹ یک بار آزمون ۲۵ پوندی در دو حالت خارج از صفحه و داخل صفحه در پره در نظر گرفته و خیز پره در این دو حالت به دست آورده می‌شود که در شکل ۹ و ۱۰ مشاهده می‌شود.



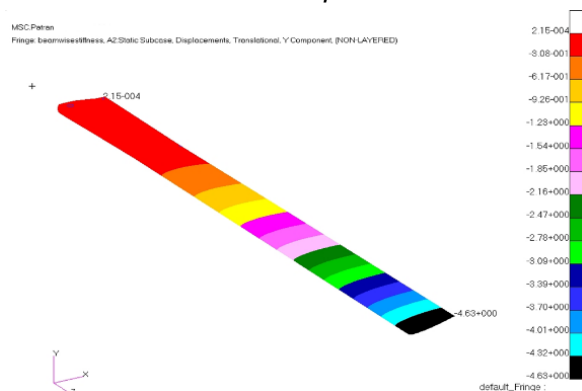
شکل ۱۰. خیز داخل صفحه پره تحت بار آزمون ۲۵ پوندی

است. اگر نیمساز و ارتفاع قاعده مثلث OAB رسم شود، در مثلث قائم‌الزاویه OCB می‌توان نوشت:

$$\tan\left(\frac{\theta_A - \theta_B}{2}\right) = \frac{BC}{OC} \quad OC \approx \rho \quad (37)$$

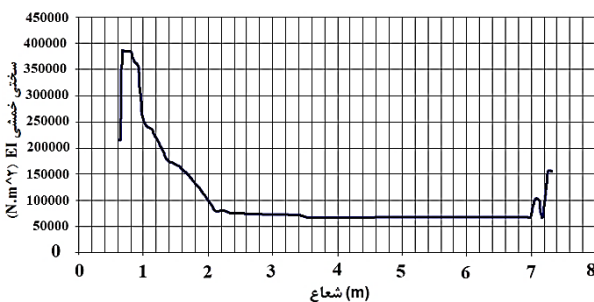
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \Rightarrow EI = \frac{M \times (x_A - x_B)}{2 \times \tan\left(\frac{\theta_A - \theta_B}{2}\right)} \quad (38)$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\theta_A - \theta_B}{2}\right) = \frac{(x_A - x_B)}{2\rho}$$



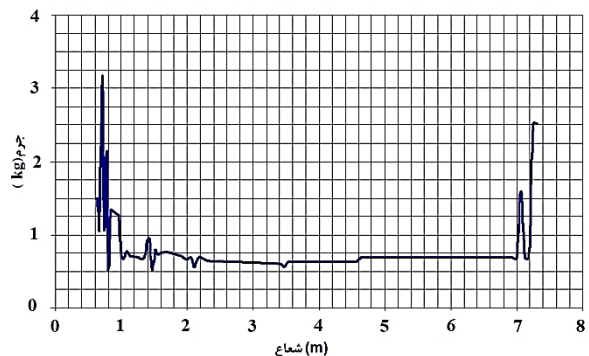
شکل ۹. خیز خارج از صفحه پره تحت بار آزمون ۲۵ پوندی

خمشی صفحه‌ای پره‌های کامپوزیتی آورده شده است.

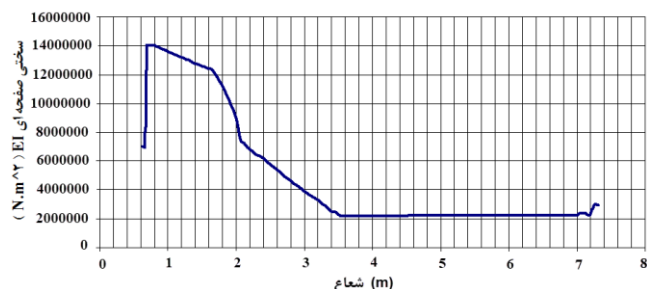


شکل ۱۲. توزیع سفتی خارج صفحه پره در جهت شعاع روتور بالگرد ۴۰۵

در شکل ۱۱-۱۳، توزیع جرم پره روتور اصلی بالگرد و همچنین توزیع سفتی خمشی خارج از صفحه و توزیع سفتی



شکل ۱۱. توزیع جرم پره در جهت شعاع روتور بالگرد ۴۰۵



شکل ۱۳. نمودار توزیع سفتی داخل صفحه پره در جهت شعاع روتور بالگرد ۴۰۵

مشاهده می‌شود که فرکانس طبیعی با افزایش دور موتور، افزایش می‌یابد که مقادیر فرکانس طبیعی در داخل صفحه بسیار بزرگ‌تر از خارج از صفحه است که علت آن سفتی زیاد پره در راستای داخل صفحه همراه با افزایش سرعت دور روتور است.

جدول ۵. فرکانس طبیعی پره بالگرد در داخل صفحه

RPM	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	ω_4 (Hz)
۰	۱۵۵/۴	۵۶۳/۷	۱۲۰۱	۱۹۹۸/۵
۵۰	۱۵۵/۹	۵۶۴/۱	۱۲۰۱/۴	۱۹۹۸/۸
۱۰۰	۱۵۷/۳	۵۶۵/۲	۱۲۰۲/۵	۱۹۹۹/۸
۱۵۰	۱۵۹/۶	۵۶۷/۱	۱۲۰۴/۴	۲۰۰۱/۴
۲۰۰	۱۶۲/۹	۵۶۹/۶	۱۲۰۷	۲۰۰۳/۷
۲۵۰	۱۶۶/۹	۵۷۳	۱۲۱۰/۴	۲۰۰۶/۶
۳۰۰	۱۷۱/۸	۵۷۷	۱۲۱۴/۶	۲۰۱۰/۳
۳۵۰	۱۷۷/۳	۵۸۱/۷	۱۲۱۹/۴	۲۰۱۴/۵
۴۰۰	۱۸۳/۵	۵۸۷/۱	۱۲۲۵	۲۰۱۹/۴

با توجه به دیاگرام تشدید مشاهده می‌شود که در مدهای اول و دوم خارج از صفحه در هیچ نقطه‌ای بین این خطوط و منحنی‌های مربوط به فرکانس‌های طبیعی برخورد وجود ندارد و در نتیجه، پدیده تشدید در مورد پره بالگرد طراحی شده در مود اول و دوم خارج از صفحه رخ نخواهد داد. علت تغییرات اندک فرکانس طبیعی در مود اول داخل صفحه، سفتی زیاد پره در این راستا است، اما در مدهای خارج از صفحه شاهد افزایش فرکانس به واسطه افزایش سرعت دوران هستیم.

۳-۵. فرکانس‌های طبیعی داخل و خارج از صفحه

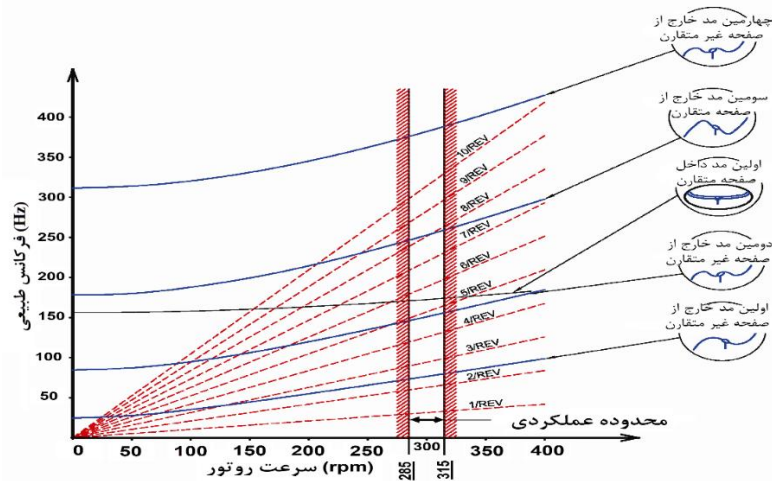
با توجه به بررسی هندسه، توزیع جرم و توزیع سفتی در طول پره، نتایج فرکانس طبیعی در مود خارج از صفحه پره بالگرد در جدول ۴ و نتایج محاسبه فرکانس طبیعی در مود داخل صفحه پره بالگرد در جدول ۵ آمده است.

جدول ۴. فرکانس طبیعی پره بالگرد ۴۰۵ در خارج صفحه

RPM	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	ω_4 (Hz)
۰	۲۴/۷	۸۴/۵	۱۷۸/۲	۳۱۱/۷
۵۰	۲۷/۷	۸۷/۲	۱۸۰/۰	۳۱۳/۹
۱۰۰	۳۵/۱	۹۴/۸	۱۸۷/۹	۳۲۰/۵
۱۵۰	۴۴/۶	۱۰۶/۱	۱۹۹/۴	۳۳۱/۱
۲۰۰	۵۴/۹	۱۱۹/۷	۲۱۴/۵	۳۴۵/۲
۲۵۰	۶۵/۶	۱۳۴/۹	۲۳۲/۵	۳۶۲/۴
۳۰۰	۷۶/۵	۱۵۰/۹	۲۵۲/۸	۳۸۲/۱
۳۵۰	۸۷/۶	۱۶۷/۶	۲۷۴/۷	۴۰۳/۹
۴۰۰	۹۸/۷	۱۸۴/۶	۲۹۷/۸	۴۲۷/۴

۴-۵. نمودار تشدید

به‌منظور بررسی احتمال پدیده رزونانس در پره، از نمودار تشدید استفاده می‌شود. برای روتورهای دو پره، مدهای کلکتیو به‌وسیله بارهای آیرودینامیکی پربودیک زوج و مدهای سایکلکلیک به‌وسیله بارهای آیرودینامیکی پربودیک فرد تحریک می‌شوند. در شکل ۱۴ نمودار تشدید روتور بالگرد به روش مایکل اشتاد^{۳۳} آمده است.



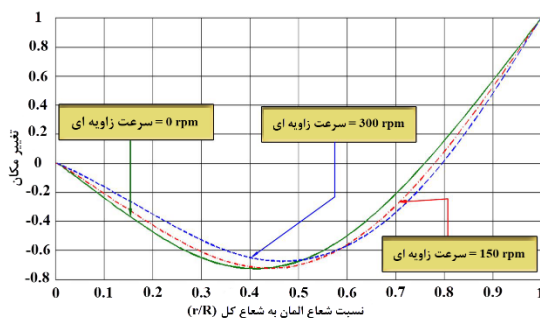
شکل ۱۴. نمودار تشدید روتور بالگرد ۴۰۵ به روش مایکل اشتاد

۵-۵. شکل مودهای پره

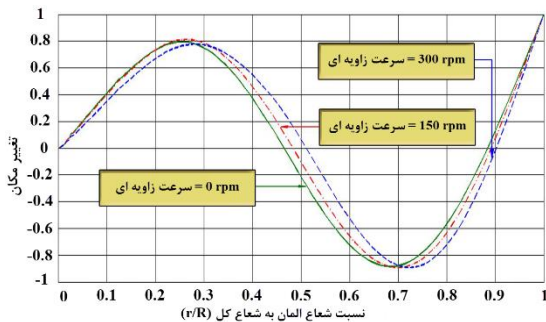
در شکل‌های ۱۵ تا ۱۸ مودهای اول تا چهارم پره‌های بالگرد با شرایط تکیه‌گاهی لولا در سرعت زاویه‌ای‌های ۰ (صفر)، ۱۵۰، ۳۰۰ دور بر دقیقه آورده شده است.

با توجه به وجود لولا در ریشه پره، مشاهده می‌شود که افزایش rpm باعث افزایش نیروی گریز از مرکز پره شده و باعث بیشتر شدن نیرویی که در جهت اثرات مثبت توزیع سفتی طول پره است، می‌گردد.

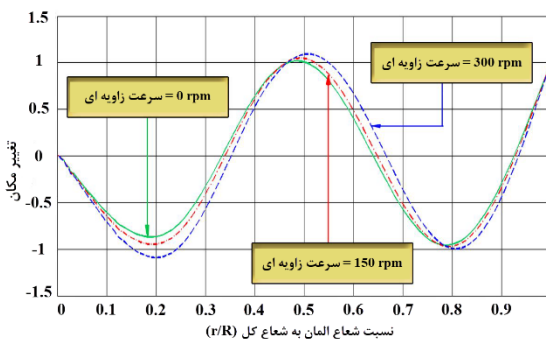
بنابراین موقعیت حداکثر تغییر مکان‌ها به سمت نوک پره حرکت نموده و افزایش توزیع سفتی در پره را تأیید می‌کند.



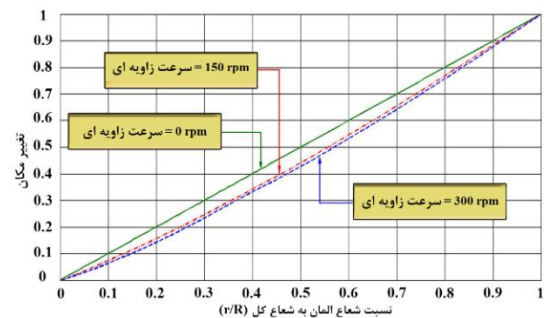
شکل ۱۶. مود دوم پره‌های بالگرد ۴۰۵ با شرایط تکیه‌گاهی لولا



شکل ۱۷. مود سوم پره‌های بالگرد ۴۰۵ با شرایط تکیه‌گاهی لولا



شکل ۱۸. مود چهارم پره‌های بالگرد ۴۰۵ با شرایط تکیه‌گاهی لولا



شکل ۱۵. مود اول پره‌های بالگرد ۴۰۵ با شرایط تکیه‌گاهی لولا

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا از روش پارامتر متمرکز استفاده شده و معادلات دیفرانسیل حرکت پره روتور با روش پارامترهای متمرکز در حالت ارتعاش آزاد پره و تحت میدان نیروی گریز از مرکز استخراج شده و با نوشتن یک کد برنامه‌نویسی در متلب، به محاسبه فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها و ترسیم دیاگرام تشدید پره بالگرد ۴۰۵ پرداخته شد. این روش علاوه بر اینکه شرط مرزی اتصال پره با لولا به هاب را با دقت خوب ارضا می‌کند، محاسبه تغییرات فرکانس‌های غیرهمگیر را برحسب دور بر دقیقه نیز ممکن می‌سازد. کد نوشته شده همچنین امکان بررسی دقیق پره را بدون نیاز به مدل‌سازی‌های پیچیده فراهم ساخت و بدین ترتیب استفاده از روش مذکور که منجر به تولید یک کد برنامه‌نویسی شده است، کمک شایانی به صنایع می‌کند تا صرفه‌جویی زیادی در زمان‌بندی طراحی سازه‌های پره داشته باشند. با توجه به تطابق خوب نتایج حاصل از کد نویسی براساس روش مایکل اشتاد، تحلیل ارتعاشی پره‌های روتور بالگرد ۴۰۵، شکل مودها و نمودار تشدید صورت پذیرفت. نتایج نشان داد همه فرکانس‌های طبیعی با افزایش دور روتور افزایش می‌یابند اما

فرکانس‌های در جهت خارج از صفحه سریع‌تر از فرکانس‌های داخل صفحه افزایش می‌یابد چون که سفتی گریز از مرکز، بالاترین درصد سفتی، به سفتی کل در جهت خارج از صفحه دارد.

در ادامه منحنی تغییرات فرکانس طبیعی برای مودهای مختلف برحسب تغییرات سرعت دورانی روتور به دست آمد. شرط آنکه حالت تشدید به وجود نیاید این است که در بازه سرعت‌های دورانی ۲۸۵ rpm و ۳۱۵ rpm، خطوط $n\Omega$ با منحنی‌های فوق تقاطعی نداشته باشند. بنابراین در دو مود اول خارج از صفحه برخوردی بین این خطوط و منحنی‌های مربوط به فرکانس‌های طبیعی وجود ندارد و در نتیجه پدیده تشدید در مورد پره کامپوزیتی بالگرد طراحی شده رخ نخواهد داد. با توجه به اینکه در ریشه پره، لولا وجود دارد از روی شکل مودها در ابتدای منحنی‌ها نیز می‌توان به صحت (شیب غیر صفر) این مطلب در منحنی‌ها پی برد. از طرفی افزایش سرعت دورانی روتور باعث افزایش نیروی گریز از مرکز پره شده و در نتیجه باعث بیشتر شدن نیرویی که در جهت اثرات مثبت توزیع سفتی طول پره است، می‌گردد و موقعیت حداکثر تغییر مکان‌ها به سمت نوک پره حرکت می‌کند.

۷. مأخذ

- [1] Houbolt, J. C., and G. W. Brooks, "Differential equations of motion for combined flapwise bending, chordwise bending, and torsion of twisted nonuniform rotating blades", NASA TR 1364, 1958.
- [2] Murthy, V. R., "Dynamic characteristics of rotor blades", *Journal of sound and vibration*, 1976, Vol.49, no.4, pp.483-500.
- [3] Murthy, V. R., "Dynamic characteristics of rotor blades-Integrating matrix method", *AIAA journal*, 197, Vol.15, no.4, pp.595-597.
- [4] Dos Santos, Fábio Luis M., Bart Peeters, Herman Van Der Auweraer, L. C. S. Góes, and Wim Desmet, "Vibration-based damage detection for a composite helicopter main rotor blade", *Case Studies in Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, Vol.3, pp.22-27.
- [5] Lyu, Wei-Liang, "Method for eliminating aerodynamic lift vibration of rigid rotor helicopters based on the novel sine-trim model", *Aerospace Science and Technology*, 2020, Vol.98, p.105655.
- [6] Lee, Ye-Lin, Do-Hyung Kim, Jae-Sang Park, and Sung-Boo Hong, "Vibration reduction simulations of a lift-offset compound helicopter using two active control techniques", *Aerospace Science and Technology*, 2020, Vol.106, pp.106181.
- [7] Newman, Simon, "Foundations of helicopter flight", Elsevier, 1994.
- [8] Headquarters, U.S. Army Materiel Command, "Engineering design handbook for helicopter engineering", (AMCP 706-201) Part I, Preliminary Design, 1974.

- [9] Wright, A. D., C. E. Smith, R. W. Thresher, and J. L. C. Wang, "Vibration modes of centrifugally stiffened beams", 1982, pp.197-202.
- [10] Bielawa, Richard L., "Rotary wing structural dynamics and aeroelasticity", American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.
- [11] Surace, G., V. Anghel, and C. Mares, "Coupled bending–bending–torsion vibration analysis of rotating pretwisted blades: an integral formulation and numerical examples", *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol.206, no.4, pp.473-486.
- [12] Francis S. Tse, Ivane, Morse, Rolland T. Hinkle, "Mechanical Vibrations Theory and Applications", Chapter 5 & 9, 1978.
- [13] Lin, S. M., "The instability and vibration of rotating beams with arbitrary pretwist and an elastically restrained root", *J. Appl. Mech.*, 2001, Vol.68, no.6, pp.844-853.
- [14] Lin, Shueei-Muh, Sen-Yung Lee, and Wen-Rong Wang, "Dynamic analysis of rotating damped beams with an elastically restrained root," *International Journal of Mechanical Sciences*, 2004, Vol.46, no.5, pp.673-693.
- [15] Lee, Sen Yung, Shueei Muh Lin, and Ching Tien Wu., "Free vibration of a rotating non-uniform beam with arbitrary pretwist, an elastically restrained root and a tip mass", *Journal of Sound and Vibration*, 2004, Vol.273, no.3, pp.477-492.
- [16] Sayed, M., and M. Kamel, "Stability study and control of helicopter blade flapping vibrations", *Applied Mathematical Modelling*, 2011, Vol.35, no.6, pp.2820-2837.
- [17] Jazi, A. Jafarzadeh, B. Shahriari, and K. Torabi, "Exact closed form solution for the analysis of the transverse vibration mode of a nano-Timoshenko beam with multiple concentrated masses", *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, Vol.131, pp.728-743.
- [18] Ghadiri, Majid, Ali Rajabpour, and Amir Akbarshahi, "Non-linear forced vibration analysis of nanobeams subjected to moving concentrated load resting on a viscoelastic foundation considering thermal and surface effects", *Applied Mathematical Modelling*, 2017, Vol.50, pp.676-694.
- [19] Shannon, J.F. and Forshaw, J.R., "Propeller Blade vibration: Nature and severity of vibration at edgewise resonance as influenced by coupling effects due to blade twist ministry of supply", 1970.
- [20] Yoo, H. H., and S. H. Shin, "Vibration analysis of rotating cantilever beams", *Journal of Sound and vibration*, 1998, Vol.212, no.5, pp.807-828.
- [21] S. Rao, "Mechanical vibrations", Fifth edition, Singapore: Pearson education, Inc. 2010.
- [22] Hollmann M., "Rotor Blade Resonance", 2007.
- [23] Mirzaei, M. M. H., A. Loghman, and M. Arefi, "Effect of Temperature Dependency on Thermoelastic Behavior of Rotating Variable Thickness FGM Cantilever Beam", *Journal of Solid Mechanics*, 2019, Vol.11, no.3, pp.657-669.
- [24] Mirzaei, Manouchehr Mohammad Hosseini, Mohammad Arefi, and Abbas Loghman, "Creep analysis of a rotating functionally graded simple blade: steady state analysis", *Steel and Composite Structures*, 2019, Vol.33, no.3, pp.463-472.
- [25] Mirzaei, Manouchehr Mohammad Hosseini, Mohammad Arefi, and Abbas Loghman, "Time-dependent creep analysis of a functionally graded simple blade using first-order shear deformation theory", *Australian Journal of Mechanical Engineering*, 2019, pp.1-13.
- [26] Mohammad Hosseini Mirzaei, Manouchehr, Mohammad Arefi, and Abbas Loghman, "Thermoelastic analysis of a functionally graded simple blade using first-order shear deformation theory", *Mechanics of Advanced Composite Structures*, 2020, Vol.7, no.1, pp.147-155.
- [۲۷] س.ع. موسوی، م. الهامی، " بررسی روش های عددی در تحلیل ارتعاشات تیرهای دورانی"، *صوت و ارتعاش*، ۱۳۹۴، شماره ۷، دوره ۴، صفحه ۴۷-۵۷.
- [۲۸] الهامی، م. ر. و نجفی، م. ر.، " تحلیل ارتعاشی و بررسی تغییرات فشار بر روتور توربین با تاکید بر تعامل کوپل و بدون کوپل سازه و سیال"، *صوت و ارتعاش*، ۱۳۹۹، شماره ۱۸، دوره ۹.
- [۲۹] س.ع. موسوی، م. الهامی، ح. طائب " چگونگی تست و آنالیز مودال پره های بالگرد"، *صوت و ارتعاش*، ۱۳۹۳، شماره ۶، دوره ۳، صفحه ۲۲-۳۲.

- [۳۰] س.ع. موسوی، م. الهامی، س. محجوب مقدس، "آنالیز مودال پره بالگرد به روش المان محدود و تست تجربی"، مهندسی شناورهای تندرو، ۱۳۹۴، شماره ۴۶، دوره ۱۴، صفحه ۴۱-۵۲.
- [۳۱] س.ع. موسوی، م. الهامی، س. محجوب مقدس، "آنالیز مودال پره بالگرد با روش‌های جرم‌های متمرکز و تست تجربی"، مکانیک هوافضا، ۱۳۹۵، شماره ۱، دوره ۱۲، صفحه ۵۵-۶۶.
- [32] Mirzaei, Manouchehr Mohammad Hosseini, Abbas Loghman, and Mohammad Arefi, "Time-dependent creep analysis of a functionally graded beam with trapezoidal cross section using first-order shear deformation theory", *Steel and Composite Structures*, 2019, Vol.30, no.6, pp.567-576.
- [۳۳] م. میرزایی، عارفی، محمد، لقمان، عباس، "تحلیل تیر تابعی هدفمند با ضخامت متغیر تحت بارهای مکانیکی و حرارتی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول"، مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، ۱۳۹۹، شماره ۱۰، صفحه ۶۵-۷۶.
- [34] Bramwell, Anthony Robert Southey, David Balmford, and George Done, "Bramwell's helicopter dynamics", Elsevier, 2001.
- [35] Chung, J., and Hong Hee Yoo, "Dynamic analysis of a rotating cantilever beam by using the finite element method", *Journal of Sound and vibration*, 2002, Vol.249, no.1, pp.147-164.
- [36] Naguleswaran, S., "Lateral vibration of a centrifugally tensioned uniform Euler-Bernoulli beam", *Journal of sound and vibration*, 1994, Vol.176, no.5, pp.613-624.

پی‌نوشت:

1. Rotor
2. Myklestad method
3. Houbolt & Brooks
4. Murthy
5. COMAC (Coordinate Modal Assurance Criterion)
6. Sine-trim
7. Simon Newman
8. Wright & et al
9. Frobenius series
10. Bielawa
11. Surace & et al
12. Francis & Ivane
13. Lin & et al
14. Jafarzadeh Jazi
15. Shannon and Forshaw
16. Yoo & Shin
17. Rao
18. Hollmann
19. Flapwise
20. Torsional
21. Hingeless Blade
22. MATLAB