

فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی چرخ‌دنده‌های سیاره‌ای ساده تک‌مرحله‌ای

فرهاد شیخ سامانی*
استادیار دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه شهید باهنر کرمان
farhad.samani@uk.ac.ir

علی شهابی
کارشناس ارشد مهندسی مکانیک
دانشگاه شهید باهنر کرمان
alishahabi87@gmail.com

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۱/۲۵

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۶/۲۸

چکیده

در این مقاله فرکانس‌های طبیعی و انواع مدهای ارتعاشی چرخ‌دنده‌های سیاره‌ای ساده تک‌مرحله‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. سیستم دینامیکی مجموعه چرخ‌دنده‌های سیاره‌ای به صورت مجموعه‌ای از جرم و فنر مدلسازی شده است. هر یک از اجزاء شامل چرخ‌دنده خورشیدی، حمل‌کننده سیاره‌ها، چرخ‌دنده رینگ و سیاره‌ها سه درجه آزادی دارند و به صورت اجسام صلب مدل شده‌اند. به منظور بررسی فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی، سیستم سیاره‌ای متقارن در نظر گرفته شده است. به نحوی که سیاره‌ها مشابه‌اند و موقعیت قرارگیری یکسانی از هم دارند. همچنین سختی یاتاقان‌ها، که به صورت فنرهای خطی شبیه‌سازی شده‌اند، در تمامی جهت‌ها یکسان فرض شده است. در این مقاله معادلات حرکت هر یک از اجزاء جداگانه به دست آمده‌اند و مدهای ارتعاشی به پنج نوع دورانی، انتقالی، سیاره‌ای، متمایز و غیر مقید دسته‌بندی شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای دورانی و انتقالی به ترتیب دارای گوناگونی یک و دو هستند. همچنین در سیستم سیاره‌ای ساده تک‌مرحله‌ای، مد سیاره‌ای زمانی ظاهر می‌شود که تعداد سیاره‌ها حداقل چهار عدد باشند.

واژگان کلیدی: فرکانس طبیعی، مد ارتعاشی، چرخ‌دنده سیاره‌ای

۱. مقدمه

خودروها، توربین‌های باد و سایر سیستم‌های انتقال قدرت دارند. در طراحی چرخ‌دنده‌های سیاره‌ای سختی بین چرخ‌دنده‌ها، سختی یاتاقان‌ها، جرم و ممان اینرسی اجزاء از جمله عوامل مهم به‌شمار می‌آیند. کهرمان (۱۹۹۴) معادلات حرکت چرخ‌دنده سیاره‌ای ماریچ را به دست آورد و فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی این سیستم را بررسی نمود [۱]. وی در همان سال روابطی برای تعیین

چرخ‌دنده سیاره‌ای ساده تک‌مرحله‌ای دارای یک چرخ‌دنده خورشیدی، یک بازو یا حمل‌کننده سیاره‌ها، یک چرخ‌دنده رینگ و چند (معمولاً سه) سیاره است. موارد استفاده از جعبه‌دنده‌های سیاره‌ای در حال افزایش است. به دلیل بازدهی نسبتاً بالا، کاهش سرعت‌های زیاد در حجم‌های محدود، انتقال قدرت بالا و حرکت‌های ترکیبی چندگانه، چرخ‌دنده‌های سیاره‌ای کاربردهای متعددی در فضاپیماها،

فرکانس‌های طبیعی چرخ‌دنده سیاره‌ای در حالت دورانی محض ارائه کرد و از جابه‌جایی‌های انتقالی اجزای سیستم صرف‌نظر نمود [۲]. لین و پارکر نیز فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی چرخ‌دنده سیاره‌ای را با داشتن سیاره‌هایی با موقعیت قرارگیری یکسان^۲ و غیریکسان بررسی کردند [۳-۴]. سان و هو علاوه بر در نظر گرفتن متغیربودن سختی بین چرخ‌دنده‌ها، به حل معادلات حاکم بر مدل دینامیک غیرخطی چرخ‌دنده سیاره‌ای با کمک روش هارمونیک بالانس^۳ پرداختند [۵]. وا و پارکر نیز مدهای ارتعاشی چرخ‌دنده سیاره‌ای در حالتی که چرخ‌دنده رینگ الاستیک و موقعیت قرارگیری سیاره‌ها نسبت به هم یکسان نباشند را بررسی کردند [۶]. آمبریشا و پارکر در سال ۲۰۰۷ م، مدل ارائه‌شده توسط کهرمان را نقض کردند [۷]. آنها اعتقاد داشتند که کهرمان به اشتباه تأثیر زوایای فشار را در معادلات حرکت نادیده گرفته است. گائو و پارکر مدل دوبعدی چرخ‌دنده سیاره‌ای موجود در توربین بادی را با در نظر گرفتن جدایی دندانه‌ها و لقی بین یاتاقان‌ها تحقیق و بررسی کردند [۸]. فرشیدیانفر و همکاران نیز ارتعاش در سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای را بررسی نمودند [۹]. تقفی و فرشیدیانفر رفتار آشوبناک در پاسخ دینامیکی سیستم چرخ‌دنده را کنترل و تعدیل نمودند [۱۰]. اریکسون و پارکر تأثیر گشتاور را بر فرکانس‌های طبیعی، مدهای ارتعاشی و دوران سیاره‌ها در چرخ‌دندظ سیاره‌ای بررسی کردند [۱۱].

پژوهش حاضر، با در نظر گرفتن یک سیستم خطی، به بررسی فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی سیستم سیاره‌ای ساده تک‌مرحله‌ای پرداخته است. پس از بررسی دقیق‌تر معادلات حرکت و ویژگی‌های مدهای ارتعاشی نسبت به مرجع [۳] که به‌ترتیب با استفاده از قانون دوم نیوتن و روش تحلیلی به‌دست آمده‌اند، اعتبارسنجی پژوهش پیش رو با مرجع ذکرشده به‌همراه نتایج عددی آورده شده‌اند. در پژوهش‌هایی که در زمینه مدهای ارتعاشی سیستم‌های تک‌مرحله‌ای صورت گرفته است، سه مد ارتعاشی دورانی، انتقالی و سیاره‌ای معرفی شده‌اند. در

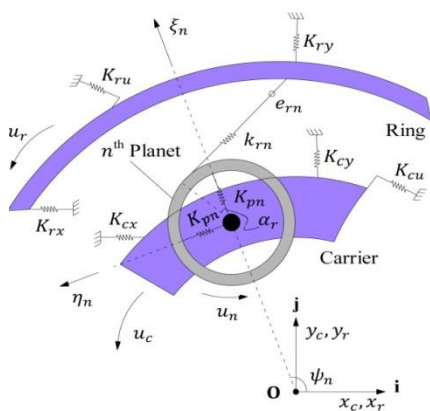
پژوهش حاضر علاوه بر بررسی دقیق‌تر سه مد ذکرشده، دو مد ارتعاشی دیگر در سیستم‌های سیاره‌ای تک‌مرحله‌ای نیز معرفی خواهد شد.

۲. مدل‌سازی سیستم چرخ‌دنده‌ای

در شکل ۱، مدل دوبعدی و مختصات مورد استفاده در چرخ‌دنده سیاره‌ای ساده تک‌مرحله‌ای نمایش داده شده است. چرخ‌دنده خورشیدی، حمل‌کننده سیاره‌ها، چرخ‌دنده رینگ و سیاره‌ها به‌صورت صلب فرض شده‌اند. آزادی عمل برای هر یک از اجزاء جداگانه در نظر گرفته شده است. لذا هر کدام از یاتاقان‌ها به‌طور مستقل سه درجه آزادی (دو درجه آزادی حرکت انتقالی و یک درجه آزادی حرکت دورانی) دارند و تمام مجموعه سیاره‌ای دارای $3(3+N)$ درجه آزادی خواهد بود که N تعداد کل سیاره‌ها را نشان می‌دهد. سختی انتقالی و دورانی یاتاقان‌ها به‌صورت فنرهای خطی در راستای انتقالی x و y و جهت محیطی u مدل شده‌اند. مختصات انتقالی چرخ‌دنده خورشیدی (s)، حمل‌کننده سیاره‌ها (c) و چرخ‌دنده رینگ (r) عبارت‌اند از x_i و y_i که $j = s, c, r$. مختصات انتقالی مرکز سیاره‌ها با مختصات شعاعی و مماسی ξ_j و η_j معرفی شده‌اند که m شماره سیاره m ام و از ۱ تا N متغیر است. مختصات دورانی اجزای سیستم به‌صورت $u_j = r_j \theta_j$ بیان می‌شوند که در آن $j = s, c, r, 1, \dots, N$ است. همچنین θ_j زاویه دوران هر جزء است و برای چرخ‌دنده خورشیدی، چرخ‌دنده رینگ و سیاره‌ها، شعاع مبنای این چرخ‌دنده‌هاست. r برای حمل‌کننده سیاره‌ها، شعاع دایره‌ای در نظر گرفته می‌شود که از مرکز سیاره‌ها عبور می‌کند. در شکل ۱، ψ_n موقعیت قرارگیری سیاره m ام را نشان می‌دهد که مقادیرش به چرخش بردار یکه i بستگی دارد، به‌طوری‌که ψ_1 برابر با صفر است.

در این مقاله از میرایی یاتاقان‌ها صرف‌نظر شده است. همچنین به‌منظور بررسی فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی، دینامیک خطی سیستم در نظر گرفته شده است. بنابراین از عوامل غیرخطی‌کننده دینامیک سیستم سیاره‌ای

سختی بین چرخ‌دنده رینگ و سیاره n ام به ترتیب با α_r ، e_m و k_m نشان داده شده‌اند. با توجه به تغییر تعداد دندانه‌ها به هنگام تماس چرخ‌دنده رینگ و سیاره n ام، k_m وابسته به زمان است، اما میزان متوسط k_m برای تعیین فرکانس‌های طبیعی در نظر گرفته شده است [۳، ۷]. همچنین k_x و k_y سختی‌های انتقالی یاتاقان رینگ در جهت‌های انتقالی x و y هستند. سختی‌های انتقالی یاتاقان سیاره n ام در جهت‌های ξ و η با k_{pn} نمایش داده شده‌اند.



شکل ۲. مدل دینامیکی بین چرخ‌دنده رینگ و سیاره n ام

m_n نشان داده شده‌اند و T_r گشتاور اعمالی به چرخ‌دنده رینگ را نشان می‌دهد. معادلات حرکت بدون میرا برای حمل‌کننده سیاره‌ها، چرخ‌دنده خورشیدی و سیاره n ام نیز به طور مشابه به دست می‌آیند.

حمل‌کننده سیاره‌ها:

$$m_c \ddot{x}_c + \sum_{n=1}^N K_{pn} [\delta_{nr} \cos \psi_n - \delta_{nt} \sin \psi_n] + K_{cx} x_c = 0 \quad (4)$$

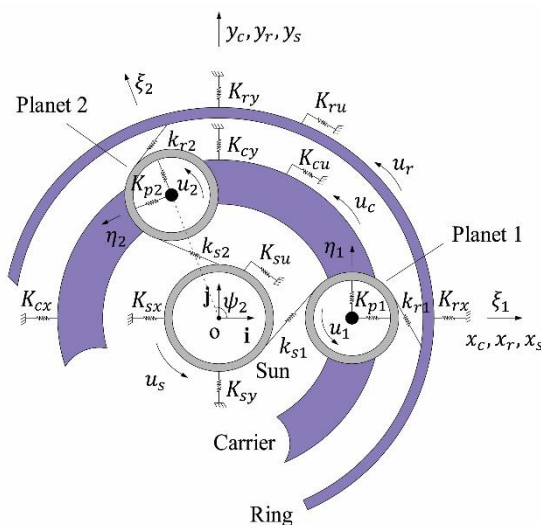
$$m_c \ddot{y}_c + \sum_{n=1}^N K_{pn} [\delta_{nr} \sin \psi_n + \delta_{nt} \cos \psi_n] + K_{cy} y_c = 0 \quad (5)$$

$$\frac{I_c}{r_c^2} \ddot{u}_c + \sum_{n=1}^N K_{pn} \delta_{nt} + K_{cu} u_c = \frac{T_c}{r_c} \quad (6)$$

چرخ‌دنده خورشیدی:

$$m_s \ddot{x}_s - \sum_{n=1}^N [k_{sn} \delta_{rn} \sin \psi_{rn}] + K_{sx} x_s = 0 \quad (7)$$

ساده‌تک‌مرحله‌ای مانند لقی بین یاتاقان‌ها صرف‌نظر می‌شود. همچنین سرعت دوران حمل‌کننده سیاره‌ها کوچک فرض شده است که به نادیده گرفتن آثار ژيروسکوپ منجر می‌شود [۳]. به منظور رسیدن به معادلات حرکت چرخ‌دنده رینگ، در شکل ۲ مدل دینامیکی بین چرخ‌دنده رینگ و سیاره n ام را که توسط فنر خطی مدل شده است، نمایش می‌دهد. در این شکل، فنر مدل شده در راستای خط عمل قرار می‌گیرد و زاویه فشار، خطای انتقال استاتیک^۴ و



شکل ۱. مدل دوبعدی چرخ‌دنده سیاره‌ای ساده تک‌مرحله‌ای و مختصات استفاده‌شده در سیستم

معادلات حرکت چرخ‌دنده رینگ بدون در نظر گرفتن میرایی در جهت‌های x و y و به شکل روابط ۱ تا ۳ خواهند بود.

$$m_r \ddot{x}_r - \sum_{n=1}^N [k_m \delta_m \sin \psi_m] + K_{rx} x_r = 0 \quad (1)$$

$$m_r \ddot{y}_r + \sum_{n=1}^N [k_{rn} \delta_{rn} \cos \psi_{rn}] + K_{ry} y_r = 0 \quad (2)$$

$$\frac{I_r}{r_r^2} \ddot{u}_r + \sum_{n=1}^N [k_{rn} \delta_{rn}] + K_{ru} u_r = \frac{T_r}{r_r} \quad (3)$$

در روابط ۱ تا ۳، $\psi_m = \psi_n + \alpha_r$ و K_m سختی دورانی چرخ‌دنده رینگ را نشان می‌دهد. ممان اینرسی و جرم چرخ‌دنده رینگ و سیاره n ام به ترتیب با I_n ، m_r ، I_r و

به در نظر گرفتن مقداری متوسط برای سختی بین چرخ‌دنده رینگ و سیاره m (یا k_{rm}) و به‌طور مشابه برای سختی بین چرخ‌دنده خورشیدی و سیاره n (یا k_{sn})، ماتریس سختی بین چرخ‌دنده‌ها (K_m) نیز دارای عناصری با مقدارهای متوسط می‌باشد [۳] و وابسته به عبارت غیرخطی‌کننده زمان نمی‌باشد. چرخ‌دنده‌های سیاره‌ای معمولاً توسط دو مدل دورانی یا دورانی - انتقالی شبیه‌سازی می‌شوند. در مدل‌های دورانی، از درجه آزادی اجزای سیستم‌ها در راستاهای انتقالی صرف‌نظر می‌شود. در مدل‌های دورانی - انتقالی، درجه آزادی تمام اجزای سیستم‌ها در راستاهای دورانی و انتقالی لحاظ می‌گردد.

۳. فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی

به‌منظور بررسی فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی سیستم سیاره‌ای، فرضیات زیر در نظر گرفته شده‌اند:

۱. تمامی سیاره‌ها مشابه‌اند و موقعیت قرارگیری یکسانی نسبت به هم دارند.
۲. سختی یاتاقان‌ها در جهت‌های انتقالی x ، y و جهت محیطی u یکسان لحاظ شده شده است.
۳. سختی به‌وجود آمده ناشی از تغییر تعداد دندانه‌ها در حین تماس چرخ‌دنده‌های رینگ و خورشیدی با سیاره m ، برای چرخ‌دنده‌های رینگ و خورشیدی یکسان در نظر گرفته شده است.

فرض‌های فوق سبب تقارن سیستم ساده تک‌مرحله‌ای می‌شوند، لذا سیستم به N قسمت مساوی با زاویه هر قسمت $\psi = 2\pi/N$ تقسیم می‌شود. به‌منظور بررسی ارتعاش آزاد سیستم سیاره‌ای مورد بحث، ترم‌های $T(t)$ و $F(t)$ از معادله ۱۷ حذف می‌شوند. بنابراین با توجه به فرضیات ذکرشده، رابطه ۱۷ و مسئله مقدار ویژه آن به‌ترتیب به‌صورت زیر خواهند بود:

$$M\ddot{q} + (K_b + K_m)q = 0 \quad (18)$$

$$[-\omega_i^2 M + (K_b + K_m)]\varphi_i = 0 \quad (19)$$

$$m_n \ddot{y}_n + \sum_{m=1}^N [k_{mn} \delta_{mn} \cos \psi_{mn}] + K_{ny} y_n = 0 \quad (8)$$

$$\frac{I_s}{r_s^2} \ddot{u}_s + \sum_{n=1}^N [k_{sn} \delta_{sn}] + K_{su} u_s = \frac{T_s}{r_s} \quad (9)$$

سیاره m :

$$m_n \ddot{\xi}_n - k_{rn} \delta_{rn} \sin \alpha_r + k_{rn} \delta_{rn} \sin \alpha_r - K_{rn} \delta_{nr} = 0 \quad (10)$$

$$m_n \ddot{\eta}_n - k_{rn} \delta_{rn} \cos \alpha_r - k_{rn} \delta_{rn} \cos \alpha_r - K_{rn} \delta_{nr} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{I_n}{r_n^2} \ddot{u}_n + k_{rn} \delta_{rn} - k_{rn} \delta_{rn} = 0 \quad (12)$$

در روابط قبل، $\psi_{sn} = \psi_n - \alpha_s$ و زاویه فشار بین چرخ‌دنده خورشیدی و سیاره m است. m_c ، I_c ، m_r ، I_r به‌ترتیب ممان اینرسی و جرم حمل‌کننده سیاره‌ها و چرخ‌دنده خورشیدی را نشان می‌دهند. δ_{sn} و δ_{rn} تغییر طول فنر در مدل دینامیکی چرخ‌دنده‌های رینگ و خورشیدی با سیاره m هستند (روابط ۱۳ و ۱۴). همچنین تغییر طول فنر تکیه‌گاهی در محل بین حمل‌کننده سیاره‌ها و سیاره m در راستاهای شعاعی و مماسی نیز به‌ترتیب در روابط ۱۵ و ۱۶ آورده شده است.

$$\delta_{rn} = \cos \psi_{rn} y_r - \sin \psi_{rn} x_r + \sin \alpha_r \xi_n \quad (13)$$

$$-\cos \alpha_r \eta_n + u_r - u_n + \epsilon_{rn} \quad (14)$$

$$\delta_{sn} = \cos \psi_{sn} y_s - \sin \psi_{sn} x_s - \sin \alpha_s \xi_n$$

$$-\cos \alpha_s \eta_n + u_s + u_n + \epsilon_{sn}$$

$$\delta_{nr} = \sin \psi_n y_c + \cos \psi_n x_c - \xi_n \quad (15)$$

$$\delta_{nt} = \cos \psi_n y_c - \sin \psi_n x_c - \eta_n + u_c \quad (16)$$

فرم ماتریسی ۱۷ معادله حرکت چرخ‌دنده سیاره‌ای با N سیاره را نمایش می‌دهد.

$$M\ddot{q}(t) + [K_m(t) + K_b]q(t) = T(t) + F(t) \quad (17)$$

در رابطه ۱۷، M ، $q(t)$ و K_m و K_b به‌ترتیب بیانگر ماتریس قطری اینرسی، بردار مختصات عمومی، ماتریس متقارن سختی بین چرخ‌دنده‌ها و ماتریس قطری سختی یاتاقان‌ها هستند. ماتریس‌های ذکرشده در پیوست آورده شده‌اند و بردار مختصات عمومی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$q = \{x_c, y_c, u_c, x_r, y_r, u_r, x_s, y_s, u_s, \xi_1, \eta_1, u_1, \dots, \xi_N, \eta_N, u_N\}$$

$T(t)$ و $F(t)$ بردار گشتاور و بردار نیروی خارجی

اعمال شده به سیستم سیاره‌ای هستند. در این مقاله با توجه

در معادله ۱۹، ω_i بیانگر فرکانس‌های طبیعی سیستم سیاره‌ای است، به نحوی که $i = 1, \dots, 3(N+3)$ است. همچنین $\Phi_i = [P_c, P_r, P_s, P_1, \dots, P_N]^T$ بردار مد ارتعاشی متناظر با هر فرکانس طبیعی ω_i را نشان می‌دهد به طوری که:

$$P_j = [x_j, y_j, u_j]^T, j = c, r, s$$

$$P_n = [\xi_n, \eta_n, u_n]^T, n = 1, \dots, N$$

با بسط رابطه ۱۹ به $N+3$ رابطه مربوط اجزای سیستم سیاره‌ای حاصل می‌شود:

$$\left(K_{c3} + \sum_{n=1}^N K_{c2n} - \omega_i^2 M_c \right) P_c + \sum_{n=1}^N K_{c2n} P_n = 0 \quad (20)$$

$$\left(K_{r3} + \sum_{n=1}^N K_{r2n} - \omega_i^2 M_r \right) P_r + \sum_{n=1}^N K_{r2n} P_n = 0 \quad (21)$$

$$\left(K_{s3} + \sum_{n=1}^N K_{s2n} - \omega_i^2 M_s \right) P_s + \sum_{n=1}^N K_{s2n} P_n = 0 \quad (22)$$

$$\left(K_{c22}^n \right)^T P_c - \left(K_{r22}^n \right)^T P_r + \left(K_{s22}^n \right)^T P_s + \left(K_{pp} - \omega_i^2 M_p \right) P_n = 0 \quad (23)$$

به طوری که $K_{pp} = K_{pp}^n$ و $n = 1, 2, \dots, N$ است. ماتریس‌های 3×3 موجود در روابط ۲۰ تا ۲۳ در پیوست معرفی شده‌اند. در سیستم‌های سیاره‌ای سه مد ارتعاشی دورانی، انتقالی و سیاره‌ای ظاهر می‌شوند که در بخش‌های آتی ویژگی‌های این مدها برای سیستم ساده تک‌مرحله‌ای بررسی شده‌اند.

۳-۱. مد دورانی

مد دورانی دارای ویژگی‌های زیر است:

۱. اگر M گوناگونی^۵ فرکانس‌های طبیعی سیستم سیاره‌ای را نشان دهد، فرکانس‌های طبیعی متناظر با این مد فقط یک بار ظاهر می‌شوند ($M=1$). به عبارت دیگر این فرکانس‌ها متمایزند^۶ و دارای تکرار نمی‌باشند.

۲. در این مد جابه‌جایی حمل‌کننده سیاره‌ها، چرخ‌دنده رینگ و خورشیدی در جهت‌های انتقالی x و y به سمت صفر میل می‌کند. به عبارت دیگر حمل‌کننده سیاره‌ها، چرخ‌دنده رینگ و چرخ‌دنده خورشیدی فقط در راستای محیطی u دارای حرکت می‌باشند.

$$P_j = [0, 0, u_j]^T, j = c, r, s$$

۳. در این مد تمامی سیاره‌ها به یک شکل حرکت می‌کنند؛ بنابراین $P_1 = P_2 \dots = P_N = [\xi_1, \eta_1, u_1]^T$ دورانی مطابق زیر خواهد بود:

$$\Phi_i = [P_c, P_r, P_s, P_1, \dots, P_1]^T, P_n = P_1 \quad (24)$$

با جایگذاری بردار مد دورانی فوق در رابطه ۲۰ فقط یک معادله از رابطه ۲۰ باقی خواهد ماند [۳].

$$\left(K_{cu} + NK_p - \frac{\omega_i^2 I_c}{r_c^2} \right) u_c - NK_p \eta_1 = 0 \quad (25)$$

به طور مشابه به ترتیب برای معادلات ۲۱ و ۲۲ می‌توان نوشت:

$$\left(K_{ru} + Nk_{rp} - \frac{\omega_i^2 I_r}{r_r^2} \right) u_r - Nk_{rp} \times (u_1 - \xi_1 \sin \alpha_r + \eta_1 \cos \alpha_r) = 0 \quad (26)$$

$$\left(K_{su} + Nk_{sp} - \frac{\omega_i^2 I_s}{r_s^2} \right) u_s + Nk_{sp} \times (u_1 - \xi_1 \sin \alpha_s - \eta_1 \cos \alpha_s) = 0 \quad (27)$$

با جایگذاری ویژگی‌های ۱ و ۲ مد دورانی در رابطه ۲۳ و بسط این رابطه برای یک سیاره دلخواه (مثلاً سیاره اول) رابطه ۲۳ به شکل ۲۸ تبدیل خواهد شد [۳].

$$\begin{aligned} & \left(K_{c22}^n \right)^T P_c - \left(K_{r22}^n \right)^T P_r + \left(K_{s22}^n \right)^T P_s \\ & + \left(K_{pp} - \omega_i^2 M_p \right) P_n = 0 \\ & \xrightarrow{n=1} \left(K_{c22}^1 \right)^T P_c - \left(K_{r22}^1 \right)^T P_r + \left(K_{s22}^1 \right)^T P_s + \\ & \left(K_{pp} - \omega_i^2 M_p \right) P_1 = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

روابط ۲۸ بیان می‌کنند که تمام روابط موجود در معادله ۲۳ با هر سیاره دلخواه، یک بردار مد دورانی مشابه می‌باشند. بنابراین روابط ۲۰ تا ۲۳ به شش مسئله مقدار ویژه، که شامل روابط ۲۵ تا ۲۸ نیز می‌باشند، کاهش پیدا می‌کنند. حل این شش مسئله مقدار ویژه، شش جواب ویژه $[u_c, u_r, u_s, \xi_1, \eta_1, u_1]^T$ را به وجود می‌آورند. این شش جواب ویژه، شش بردار مد دورانی Φ_i را براساس رابطه ۲۴ نتیجه می‌دهند [۳]. بنابراین شش فرکانس طبیعی متمایز (با گوناگونی یک ($M=1$)) در سیستم سیاره‌ای ساده تک‌مرحله‌ای برای تعداد سیاره‌های متفاوت ($N \geq 3$) وجود دارد که مد ارتعاشی متناظر با هر یک از این شش فرکانس از نوع دورانی می‌باشند.

۳-۲. مد انتقالی

مد انتقالی دارای ویژگی‌ها زیر است:

- فرکانس‌ها طبیعی متناظر با این مد، غیر مقید^۷ هستند. به عبارت دیگر این فرکانس‌های طبیعی دو بار تکرار می‌شوند ($M = 2$). بنابراین دو بردار مد ارتعاشی متناظر با هر فرکانس طبیعی ω_i وجود دارد:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= [P_c, P_r, P_s, P_1, \dots, P_N]^T \\ \bar{\Phi}_i &= [\bar{P}_c, \bar{P}_r, \bar{P}_s, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_N]^T \end{aligned}$$

- حمل‌کننده سیاره‌ها، چرخ‌دنده رینگ و چرخ‌دنده خورشیدی در این مد بدون دوران هستند و فقط در راستاهای انتقالی x و y جابه‌جا می‌شوند؛ یعنی:

$$\begin{aligned} P_j &= [x_j, y_j, 0]^T \\ \bar{P}_j &= [-y_j, x_j, 0]^T \end{aligned}$$

$$j = c, r, s$$

- در این مد، جابه‌جایی سیاره‌ها در سیستم‌های سیاره‌ای متقارن به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} P_n \\ \bar{P}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_n \mathbf{I} & \sin \psi_n \mathbf{I} \\ -\sin \psi_n \mathbf{I} & \cos \psi_n \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \bar{P}_1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} P_n &= [\xi_n, \eta_n, u_n]^T \\ \bar{P}_n &= [\bar{\xi}_n, \bar{\eta}_n, \bar{u}_n]^T \end{aligned}$$

- P_n و \bar{P}_n بردار جابه‌جایی سیاره n م را در دو بردار مد Φ_i و $\bar{\Phi}_i$ نشان می‌دهند، به طوری که $\psi_n = (n-1)\psi$ و \mathbf{I} ماتریس واحد 3×3 است. بنابراین دو بردار مد انتقالی مطابق زیر وجود خواهند داشت:

$$(30)$$

$$(31)$$

- با جایگذاری روابط ۳۰ و ۳۱ در معادله ۲۰، تنها دو رابطه زیر از معادله ۲۰ باقی می‌ماند [۳].

$$\begin{aligned} (K_{xx} + NK_\sigma - \omega_i^2 m_c) x_c - \frac{N}{2} K_\tau \times (\xi_1 - \bar{\eta}_1) &= 0 \\ (K_{yy} + NK_\sigma - \omega_i^2 m_c) y_c - \frac{N}{2} K_\tau \times (\bar{\xi}_1 + \eta_1) &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

- به طور مشابه به ترتیب برای روابط ۲۱ و ۲۲ می‌توان نوشت:

$$(33)$$

$$(34)$$

- با جایگذاری روابط ۳۰ و ۳۱ در معادله ۲۳ دو رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} L_n &= (K_{xx}^c)^T P_c - (K_{yy}^c)^T P_r + (K_{zz}^c)^T P_s \\ &+ (K_{xx}^c - \omega_i^2 m_c) P_n = 0 \\ \bar{L}_n &= (K_{xx}^c)^T \bar{P}_c - (K_{yy}^c)^T \bar{P}_r + (K_{zz}^c)^T \bar{P}_s \\ &+ (K_{xx}^c - \omega_i^2 m_c) \bar{P}_n = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

L_n و \bar{L}_n برای سهولت در نمادگذاری اندیسی معرفی شده‌اند. با استفاده از ویژگی‌های ۲ و ۳ مد انتقالی، روابط ۳۵ به شکل زیر تبدیل خواهند شد [۳]:

$$\begin{aligned} L_n &= (\cos \psi_n L_1 + \sin \psi_n \bar{L}_1) \\ \bar{L}_n &= (-\sin \psi_n L_1 + \cos \psi_n \bar{L}_1) \end{aligned} \quad (36)$$

روابط ۳۶ بیان می‌کنند که معادله ۲۳ برای $n \neq 1$ می‌تواند به صورت یک ترکیب خطی از روابط ۳۵ با $n = 1$ ظاهر شود. وقتی Φ_i و $\bar{\Phi}_i$ در روابط ۲۰ تا ۲۳ جایگذاری می‌شوند، دوازده معادله مستقل به وجود می‌آوردند: شش معادله از روابط ۳۲ تا ۳۴ و شش معادله از روابط ۳۵ با $n = 1$. این دوازده معادله، مسئله مقدار ویژه با بردار ویژه برای $[x_c, y_c, x_r, y_r, x_s, y_s, \xi_1, \eta_1, u_1, \bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{u}_1]^T$ را برای فرکانس طبیعی ω_i به وجود می‌آوردند. بنابراین شش جفت (دوازده عدد) مد انتقالی با استفاده از روابط ۳۰ و ۳۱ به وجود می‌آیند [۳]. لذا شش فرکانس طبیعی غیر مقید (با گوناگونی دو) در سیستم سیاره‌ای ساده تک‌مرحله‌ای برای تعداد سیاره‌های متفاوت ($N \geq 3$) وجود دارند که مدهای ارتعاشی متناظر با این دوازده فرکانس از نوع انتقالی می‌باشند.

۳-۳. مد سیاره‌ای

مد سیاره‌ای دارای ویژگی‌های زیر است:

- وقتی ظاهر می‌شود که تعداد کل سیاره‌ها بیشتر از سه عدد باشند.
- سه فرکانس طبیعی متناظر با این مد، $N - 3$ بار تکرار می‌شوند. به عنوان نمونه اگر تعداد کل سیاره‌ها چهار و پنج عدد باشند، به ترتیب سه فرکانس طبیعی متمایز و سه فرکانس طبیعی غیرمقید ظاهر می‌شوند که مد متناظر با آنها سیاره‌ای هستند.
- در این مد به جز سیاره‌ها سایر اجزای سیستم هیچ حرکتی ندارند، یعنی:

می‌آیند. پس می‌توان گفت که φ_i در رابطه ۳۷ بیانگر بردار مد سیاره‌ای می‌باشد [۳] و در حالت کلی می‌توان گفت که در چرخ‌دنده سیاره‌ای ساده تک‌مرحله‌ای با تعداد سیاره‌های متفاوت ($N \geq 3$) شش فرکانس طبیعی متمایز، شش فرکانس طبیعی غیرمقید و سه فرکانس طبیعی با گوناگونی $M = N - 3$ وجود دارند که به ترتیب مدهای ارتعاشی متناظر با این فرکانس‌ها از نوع دورانی، انتقالی و سیاره‌ای هستند.

۳-۴. مد متمایز و مد غیر مقید

در مدل‌های دورانی سیستم‌های تک‌مرحله‌ای علاوه بر سه مد ذکر شده، مدهای ارتعاشی متناظر با فرکانس‌های متمایز و غیرمقید می‌توانند مد متمایز و مد غیرمقید نیز باشند. در مد متمایز تمام اجزای سیستم دارای دوران هستند. بنابراین بردار مد ارتعاشی متمایز مطابق می‌باشد:

$$\mathbf{P}_j = [0, 0, u_j]^T, \quad j = c, r, s, 1, \dots, N \quad (43)$$

در مد غیرمقید فقط سیاره‌های سیستم هستند که دوران می‌کنند و سایر اجزای سیستم هیچ حرکتی ندارند. بردار مد ارتعاشی غیر مقید نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{P}_j = [0, 0, u_j]^T, \quad j = 1, \dots, N \quad (44)$$

۴. اعتبارسنجی

نتایج اعتبارسنجی فرکانس‌های طبیعی با مرجع [۳] در جدول ۱ ذکر شده‌اند. به منظور اعتبارسنجی سیستم با مدل دورانی و دارای سه سیاره با موقعیت قرارگیری یکسان نسبت به هم انتخاب شده است. پارامترهای هندسی سیستم دورانی ذکر شده در جدول ۱، در مرجع [۳] آورده شده‌اند و مطابق جدول ۲ هستند.

۵. نتایج عددی

به منظور بررسی گوناگونی فرکانس‌های طبیعی و مشخص شدن نوع مدهای ارتعاشی متناظر با هر فرکانس، سیستم سیاره‌ای ساده تک‌مرحله‌ای، دورانی و با سه، چهار و پنج

$$\mathbf{P}_j = [0, 0, 0]^T, j = c, r, s$$

لذا بردار مد سیاره‌ای به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\varphi_i = [0, 0, 0, \mathbf{P}_1, w_2 \mathbf{P}_1, \dots, w_N \mathbf{P}_1]^T, \quad \mathbf{P}_n = w_n \mathbf{P}_1 \quad (37)$$

با توجه به اسکالربودن w_n در رابطه ۳۷ (مثلاً $w_1 = 1$)، می‌توان گفت که در مد سیاره‌ای با وارد شدن یک ضریب اسکالر در شکل حرکت سیاره اول، به شکل حرکت سیاره n می‌رسیم. اگر رابطه ۳۷ بردار مد ارتعاشی باشد، می‌بایست روابط ۲۰ تا ۲۳ را برقرار کند. لذا با جایگذاری رابطه ۳۷ در معادلات ۲۰ تا ۲۳ داریم [۳]:

$$K_p \sum_{n=1}^N w_n \begin{bmatrix} \xi_1 \cos \psi_n - \eta_1 \sin \psi_n \\ \xi_1 \sin \psi_n + \eta_1 \cos \psi_n \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (38)$$

$$k_{rp} (\xi_1 \sin \alpha_r + \eta_1 \cos \alpha_r + u_1) \times \sum_{n=1}^N w_n \begin{bmatrix} \sin \psi_{rn} \\ -\cos \psi_{rn} \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (39)$$

$$k_{sp} (\xi_1 \sin \alpha_s + \eta_1 \cos \alpha_s + u_1) \times \sum_{n=1}^N w_n \begin{bmatrix} \sin \psi_{sn} \\ -\cos \psi_{sn} \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (40)$$

$$(\mathbf{K}_{pp} - \omega_i^2 \mathbf{M}_p) w_n \mathbf{P}_1 = \mathbf{0}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (41)$$

با اعمال عملیات‌های جبری بر روی معادلات ۳۸ تا ۴۱ سه محدودیت مستقل برای w_n تولید می‌شوند [۳]:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N w_n \sin \psi_n &= 0 \\ \sum_{n=1}^N w_n \cos \psi_n &= 0 \\ \sum_{n=1}^N w_n &= 0 \end{aligned} \quad (42)$$

معادلات ۴۱ و ۴۲ از هم مستقل‌اند، بنابراین برقراری روابط ۴۲ مستلزم برقراری روابط ۳۸ تا ۴۰ می‌باشند. به واسطه مستقل بودن رابطه ۴۱ از w_n ، ψ_n تنها از رابطه ۴۲ به دست می‌آید. چون جواب‌های ویژه رابطه ۴۱ برای هر تعداد سیاره یکسان هستند، \mathbf{P}_1 از رابطه ۴۱ به دست می‌آید. بنابراین $N - 3$ بردار مد ارتعاشی مستقل از هم برای هر سه جواب ویژه (ω_i, \mathbf{P}_1) در رابطه ۴۱ از رابطه ۳۷ به دست

سیاره در نظر گرفته شده است. با استفاده از پارامترهای هندسی مرجع [۳]، برای سیستم با مدل دورانی ذکرشده نتایج در جدول ۳ آورده شده‌اند. با توجه به نتایج جدول ۳ در سیستم سیاره‌ای ساده تک‌مرحله‌ای با تعداد سیاره‌های متفاوت ($N \geq 3$)، شش فرکانس طبیعی متمایز (با گوناگونی یک ($M = 1$)) وجود دارند که مد ارتعاشی متناظر با هر یک از این شش فرکانس طبیعی از نوع مد دورانی می‌باشد که در بخش الف از شکل ۳ مثالی از این مد آورده شده است. همچنین شش فرکانس طبیعی غیرمقیمد (با گوناگونی دو ($M = 2$)) وجود دارند که مد متناظر با هر یک از این دوازده فرکانس طبیعی، از نوع انتقالی است که در بخش ب از شکل ۳ نمونه‌ای از این مد

نمایش داده شده است. در نهایت، سه فرکانس طبیعی با گوناگونی $M = N - 3$ زمانی وجود دارند که تعداد سیاره های سیستم ساده تک‌مرحله‌ای از سه عدد بیشتر باشند و مد ارتعاشی متناظر با هر یک از این سه فرکانس، از نوع سیاره‌ای است که در بخش ج از شکل ۳ مثالی از این مد آورده شده است. به‌عنوان مثال همانند جدول ۳، برای سیستم با چهار و پنج سیاره به‌ترتیب سه فرکانس طبیعی متمایز و سه فرکانس طبیعی غیرمقیمد (شش فرکانس طبیعی) دارای مد سیاره‌ای خواهند شد. بنابراین زیاد شدن سیاره‌ها در سیستم ساده تک‌مرحله‌ای تعداد فرکانس‌هایی را زیاد می‌کند که مد متناظر با آنها مد سیاره‌ای است.

جدول ۱. فرکانس‌های طبیعی این پژوهش و مرجع [۳]

خطا (درصد)	فرکانس‌های طبیعی مرجع [۳] (هرتز)	فرکانس‌های طبیعی این پژوهش (هرتز)
0	$\omega_1 = 0$	$\omega_1 = 0$
0.04	$\omega_2 = 743.2$	$\omega_2 = 743.5$
0.05	$\omega_3 = 1102.4$	$\omega_3 = 1103$
0.05	$\omega_4 = 1475.7$	$\omega_4 = 1476.5$
0.05	$\omega_5 = 1896$	$\omega_5 = 1897$

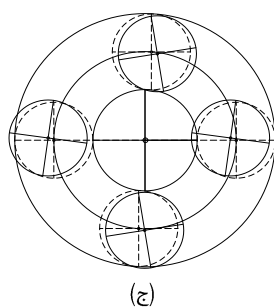
جدول ۲. پارامترهای هندسی سیستم ساده تک‌مرحله‌ای

سیاره	حمل‌کننده سیاره‌ها	چرخ‌دنده رینگ	چرخ‌دنده خورشیدی	
0.66	5.43	2.35	0.4	جرم (کیلوگرم)
0.61	6.29	3	0.39	I/r^2 (kg)
100.3	176.8	275	77.4	قطر پایه (میلی‌متر)

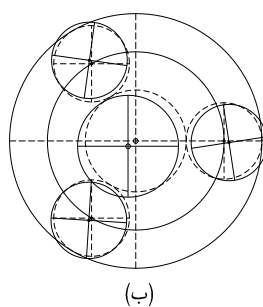
5×10^8 10^8 $K_{ru} = 10^8, K_{su} = K_{cu} = 0$ $\alpha_s = \alpha_r = 24.6$	سختی بین یاتاقان‌ها (نیوتن بر متر) سختی یاتاقان‌ها (نیوتن بر متر) سختی دورانی (نیوتن بر متر) زاویه فشار (درجه)
---	---

جدول ۳. گوناگونی فرکانس‌های طبیعی

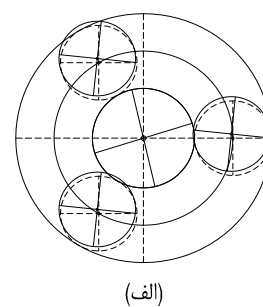
$N = 5$	$N = 4$	$N = 3$	
0	0	0	فرکانس‌های طبیعی متمایز (هرتز) با گوناگونی ۱
1568.1	1537.3	1476.5	
2007	1971.6	1931.3	
2616.1	2627	2659.7	
8069.4	7777.5	7446.6	
14260.3	13078	11781	
710.4	727.6	743.5	فرکانس‌های طبیعی غیرمقید (هرتز) با گوناگونی ۲
1072.5	1091.7	1103	
1889	1893.8	1897	
2426.5	2343.7	2277.5	
7386.1	7193.6	6989.8	
11177.9	10443	9652.8	
1809	1809.1		فرکانس‌های طبیعی (هرتز) با گوناگونی $M = N - 3$
5966.7	5966.8		
6985.2	6985.2		



(ج)



(ب)



(الف)

شکل ۳. مد ارتعاشی الف) دورانی متناظر با فرکانس ۲۶۵۹/۷ هرتز، ب) انتقالی متناظر با فرکانس ۷۴۳/۵ هرتز، ج) سیاره‌ای متناظر با فرکانس ۶۹۸۵/۲ هرتز خط‌چین‌ها وضعیت اولیه و خطوط توپر وضعیت نهایی را نشان می‌دهند

قفل‌شوندگی می‌شود. برای سیستم دورانی با پارامترهای موجود در جدول ۲ با افزایش سختی دورانی حمل‌کننده از صفر تا 10^9 نیوتن بر متر، پنج فرکانس طبیعی اول برای سه، چهار و پنج سیاره در جدول ۴ آورده شده‌اند. به‌عنوان نمونه مطابق جدول ۴، فرکانس طبیعی اول با ثابت‌شدن خروجی به مقدار ۷۴۳/۵ هرتز می‌رسد و مد متناظر با فرکانس طبیعی اول به مد غیرمقید تبدیل می‌شود که در بخش الف از شکل ۴ این مد آورده شده است. همچنین با افزایش صلبیت حمل‌کننده سیاره‌ها و تغییر رفتار آن از دوران آزاد به سمت ثابت‌شدن، فرکانس طبیعی سوم به

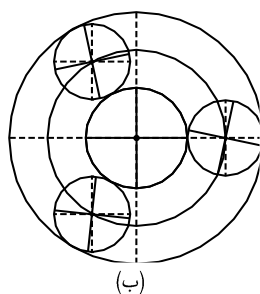
به‌منظور وضوح شکل‌های ۳ جابه‌جایی حمل‌کننده سیاره‌ها و چرخ‌دنده رینگ نمایش داده نشده‌اند. در مدل دورانی چرخ‌دنده سیاره‌ای تک‌مرحله‌ای علاوه بر سه مد دورانی، انتقالی و سیاره‌ای، دو مد متمایز و غیرمقید نیز می‌توانند وجود داشته باشند. مثلاً زمانی که خروجی سیستم (حمل‌کننده سیاره‌ها) به سمت ثابت‌شدن تغییر رفتار می‌دهد، مد متناظر با فرکانس‌های متمایز و غیرمقید می‌تواند مد متمایز و مد غیرمقید نیز باشد. با ثابت‌شدن خروجی سیستم (این امر با میل‌دادن سختی دورانی خروجی به سمت بینهایت انجام می‌شود)، سیستم دچار ارتعاش و

جابه‌جایی حمل‌کننده سیاره‌ها و چرخ‌دنده رینگ نمایش داده نشده‌اند. گفتنی است از منظر کاربردی سه فرکانس طبیعی اول نسبت به سایر فرکانس‌ها اهمیت بیشتری دارند.

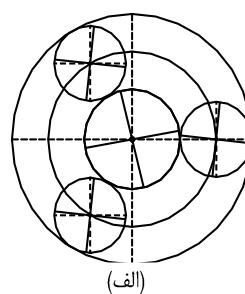
مقدار ۱۰۰۲ هرتز می‌رسد و مد متناظر با سومین فرکانس طبیعی به مد متمایز تبدیل می‌شود که در بخش ب از شکل ۴ نمایش داده شده است. برای وضوح شکل‌های ۴،

جدول ۴. پنج فرکانس طبیعی اول در حالت ثابت شدن خروجی سیستم

$N = 5$	$N = 4$	$N = 3$	فرکانس طبیعی (هرتز)
710.4	727.6	743.5	اول
710.4	727.6	743.5	دوم
968	988.2	1002	سوم
1072.5	1091.7	1102.9	چهارم
1072.5	1091.7	1102.9	پنجم



(ب)



(الف)

شکل ۴. مد ارتعاشی الف) غیرمقیمد متناظر با فرکانس ۷۴۳/۵ هرتز، ب) متمایز متناظر با فرکانس ۱۰۰۲ هرتز خط‌چین‌ها وضعیت اولیه و خطوط توپر وضعیت نهایی را نشان می‌دهند

۳. در مد انتقالی اجزای سیستم هیچ دورانی نداشته و فقط در راستاهای انتقالی دچار حرکت می‌شوند.
 ۴. مد سیاره‌ای زمانی به وجود می‌آید که تعداد سیاره‌ها حداقل چهار عدد باشند. در این مد به جز سیاره‌ها سایر اجزای سیستم هیچ حرکتی ندارند.
 برای مدل‌های دورانی سیستم‌های سیاره‌ای ساده تک‌مرحله‌ای، مدهای ارتعاشی متناظر با فرکانس‌های طبیعی متمایز و غیرمقیمد می‌توانند مد متمایز و مد غیرمقیمد نیز باشند. به طوری که در مد متمایز تمام اجزای سیستم و در مد غیرمقیمد فقط سیاره‌ها دارای حرکت دورانی می‌باشند.

۷. پیوست

ماتریس‌های موجود در معادلات ۱۷، ۲۰ تا ۲۳ عبارت‌اند از:

$$\mathbf{M} = \text{diag} (\mathbf{M}_C, \mathbf{M}_P, \mathbf{M}_S, \mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_N),$$

۶. نتیجه‌گیری

برای سیستم سیاره‌ای ساده تک‌مرحله‌ای با سیاره‌های مشابه و موقعیت قرارگیری یکسان سیاره‌ها نسبت به هم، نتایج زیر برای فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی متناظر با هر فرکانس به دست آمده‌اند:

۱. مدهای ارتعاشی به شش مد دورانی با فرکانس‌های طبیعی متمایز (گوناگونی یک)، شش جفت مد انتقالی با فرکانس‌های طبیعی غیرمقیمد (گوناگونی دو) و سه مد سیاره‌ای با گوناگونی فرکانس‌های طبیعی $N - 3$ دسته بندی شدند.

۲. در مد دورانی تمام اجزای سیستم تنها حرکت دورانی دارند و هیچ حرکت انتقالی ندارند. همچنین در این مد تمامی سیاره‌ها نیز به یک شکل حرکت می‌کنند.

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{r2}^n &= k_{rn} \begin{bmatrix} -\sin \psi_{rn} \sin \alpha_r & \sin \psi_{rn} \cos \alpha_r & \sin \psi_{rn} \\ \cos \psi_{rn} \sin \alpha_r & -\cos \psi_{rn} \cos \alpha_r & -\cos \psi_{rn} \\ \sin \alpha_r & -\cos \alpha_r & -1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{r3}^n &= k_{rn} \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha_r & -\cos \alpha_r \sin \alpha_r & -\sin \alpha_r \\ \cos^2 \alpha_r & \cos \alpha_r & \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{s1}^n &= k_{sn} \begin{bmatrix} \sin^2 \psi_{sn} & -\cos \psi_{sn} \sin \psi_{sn} & -\sin \psi_{sn} \\ \cos^2 \psi_{sn} & \cos \psi_{sn} & \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{s2}^n &= k_{sn} \begin{bmatrix} \sin \psi_{sn} \sin \alpha_s & \sin \psi_{sn} \cos \alpha_s & -\sin \psi_{sn} \\ -\cos \psi_{sn} \sin \alpha_s & -\cos \psi_{sn} \cos \alpha_s & \cos \psi_{sn} \\ -\sin \alpha_s & -\cos \alpha_s & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{s3}^n &= k_{sn} \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha_s & \cos \alpha_s \sin \alpha_s & \sin \alpha_s \\ \cos^2 \alpha_s & -\cos \alpha_s & \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{pp}^n &= \mathbf{K}_{c3}^n + \mathbf{K}_{r3}^n + \mathbf{K}_{s3}^n \\
\mathbf{K}_b &= \text{diag} (\mathbf{K}_{cb}, \mathbf{K}_{rb}, \mathbf{K}_{sb}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}), \\
\mathbf{K}_b &= \text{diag} (\mathbf{K}_{cb}, \mathbf{K}_{rb}, \mathbf{K}_{sb}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}),
\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_j = \text{diag} \left(m_j, m_j, \frac{I_j}{r_j^2} \right), j = c, r, s, 1, \dots, N$$

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N \mathbf{K}_{c1}^n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{c2}^1 & \mathbf{K}_{c2}^2 & \dots & \mathbf{K}_{c2}^N \\ \mathbf{0} & \sum_{n=1}^N \mathbf{K}_{r1}^n & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{r2}^1 & \mathbf{K}_{r2}^2 & \dots & \mathbf{K}_{r2}^N \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \sum_{n=1}^N \mathbf{K}_{s1}^n & \mathbf{K}_{s2}^1 & \mathbf{K}_{s2}^2 & \dots & \mathbf{K}_{s2}^N \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pp}^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{K}_{pp}^N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{c1}^n = K_{pn} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \psi_n \\ \text{symmetric} & 1 & \cos \psi_n \\ \text{symmetric} & \text{symmetric} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{c2}^n = K_{pn} \begin{bmatrix} -\cos \psi_n & \sin \psi_n & 0 \\ -\sin \psi_n & -\cos \psi_n & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{c3}^n = \text{diag} (K_{pn}, K_{pn}, 0)$$

$$\mathbf{K}_{r1}^n = k_{rn} \begin{bmatrix} \sin^2 \psi_{rn} & -\cos \psi_{rn} \sin \psi_{rn} & -\sin \psi_{rn} \\ \cos^2 \psi_{rn} & \cos \psi_{rn} & \end{bmatrix}$$

۸. مأخذ

[1] Kahraman, A. "Planetary gear train dynamics." *Journal of Mechanical Design* 116, No. 3, 1994, pp. 713-720.

[2] Kahraman, A. "Natural modes of planetary gear trains." *Journal of Sound and Vibration* 173, No. 1, 1994, pp. 125-130.

[3] Lin, J., R. G. Parker. "Analytical characterization of the unique properties of planetary gear free vibration." *Journal of Vibration and Acoustics* 121, No. 3, 1999, pp. 316-321.

[4] Lin, J., R. G. Parker. "Structured vibration characteristics of planetary gears with unequally spaced planets." *Journal of Sound and Vibration* 233, No. 5, 2000, pp. 921-928.

[5] Sun, T., H. Hu. "Nonlinear dynamics of a planetary gear system with multiple clearances." *Mechanism and Machines Theory* 38, 2003, pp. 1371-1390.

[6] Wu, X., R. G. Parker. "Vibration of rings on a general elastic foundation." *Journal of Sound and Vibration* 295, 2006, pp. 194-213.

[7] Ambarisha, V. K., R. G. Parker. "Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models." *Journal of Sound and Vibration* 302, 2007, pp. 577-595.

[8] Guo, Y., R. G. Parker. "Dynamic modeling and analysis of a spur planetary gear involving tooth wedging and bearing clearance nonlinearity." *European Journal of Mechanics A/Solids* 29, 2010, pp. 1022-1033.

[۹] فرشیدیانفر، ا.، ا. ثقفی. "ارتعاشات در سیستم‌های چرخ‌دنده‌های صوت و ارتعاش، ش. ۱، تابستان و پاییز ۱۳۹۱، ص. ۱۵-۲۶.

[۱۰] ثقفی، ا. ا. فرشیدیانفر. "کنترل دو شاخه شدگی و آشوب در سیستم انتقال چرخ‌دنده." *مهندسی مکانیک مدرس*، ش. ۱۴، اسفند ۱۳۹۳، ص. ۶۱-۶۸.

[11] Ericson, T. M., R. G. Parker. "Experimental measurement of the effects of torque on the dynamic behavior and system parameters of planetary gears." *Mechanism and Machine Theory* 74, 2014, pp. 370-389.

پی‌نوشت

-
1. mesh stiffnesses
 2. equally spaced planets
 3. harmonic balance method
 4. static transmission error
 5. multiplicity
 6. distinct
 7. degenerate