

کاهش ارتعاش چرخ‌دندهٔ مخروطی ساده به کمک اصلاح پروفیل دندان

حبیب‌اله مطهر
دانشجوی کارشناسی ارشد
دانشگاه شهید باهنر کرمان
habibollahmotahar@yahoo.com

فرهاد شیخ‌سامانی*
استادیار دانشکدهٔ فنی مهندسی
دانشگاه شهید باهنر کرمان
farhad.samani@uk.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱۱/۳۰

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱۱/۱۵

چکیده

خطای انتقال ایستایی یکی از مهمترین عوامل بروز ارتعاش و صدا در سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای است. کاهش میزان اختلاف ماکزیمم و مینیمم این پارامتر می‌تواند تأثیر زیادی در کاهش ارتعاش سیستم داشته باشد. چون چرخ‌دنده‌های مخروطی نیز از این قاعده مستثنا نیستند، لزوم بررسی و بهبود عملکرد این جزء مکانیکی بیش از پیش نمایان است. چرخ‌دندهٔ مخروطی دندان مستقیم را می‌توان با چند چرخ‌دندهٔ سادهٔ مجازی معادل نمود و تحلیل‌های دینامیکی را روی آن تقریب زد. در این مقاله، یک جفت چرخ‌دندهٔ مخروطی دندان مستقیم با سه جفت چرخ‌دندهٔ سادهٔ جایگزین مدل شده است. مدل‌های مورد بحث پس از طراحی هندسی تحلیل اجزای محدود شده‌اند. اصلاح بهینهٔ پروفیل دندان در سر و ریشه به کمک الگوریتم ژنتیک، که با تحلیل اجزای محدود کوپل شده است، مورد بررسی قرار گرفته است. به کمک روش اصلاح پروفیل دندان تغییرات دامنهٔ خطای انتقال ایستایی که منجر به بروز ارتعاش در سیستم می‌شود تا ۶۰ درصد کاهش یافته است. این امر کمک می‌کند دستیابی به چرخ‌دنده‌ای با سروصدای کمتر آسان شود.

واژگان کلیدی: چرخ‌دندهٔ مخروطی دندان مستقیم، تقریب تردگولد، خطا در انتقال، اصلاح پروفیل دندان

۱. مقدمه

اینولوت از پشت چرخ‌دنده به‌طور خطی به سمت میانهٔ آن کاهش می‌یابد. مانند سایر چرخ‌دنده‌ها وجود صدا و ارتعاش در حین کارکرد از جمله مواردی است که همواره توجه محققان و صنعتگران را به‌خود جلب کرده است. خطاهای

چرخ‌دنده‌های مخروطی ساده کاربردهای فراوانی در سیستم‌های انتقال قدرت دارند. به‌طور کلی وقتی به انتقال قدرت مابین دو محور متقاطع نیاز باشد از این نوع چرخ‌دنده استفاده می‌شود. از دیدگاه هندسی، ضخامت دندانه‌های

ممکن در حین ساخت و نصب، وجود تغییر شکل الاستیک در محورها، انعطاف‌پذیری یاتاقان‌ها و خطا در انتقال^۲ از جمله عوامل بروز ارتعاش و صدا در سیستم‌های انتقال قدرت هستند.

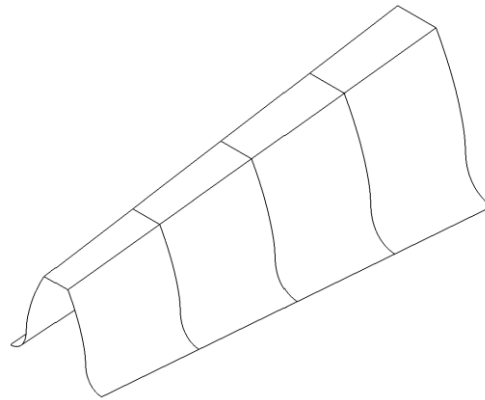
خطای انتقال در واقع اختلاف دوران زاویه‌ای پینیون و چرخ‌دنده است [۱]. چون ماده به‌کار رفته در ساخت دندانها نمی‌تواند صلب باشد، تغییر شکل دندانها بر اثر اختلافات مختلف اجتناب‌ناپذیر است. با جابه‌جایی الاستیک، اینولوت دندانها تا حدودی دچار تغییر می‌شود و سبب فروروی سر دندانها در ریشه جفت خود می‌گردد. اصلاح پروفیل دندانها^۳ به‌عنوان یک شیوه مهم در کاهش تحریک‌های درگیری دندانها و بهبود رفتار دینامیکی سیستم چرخ‌دنده‌ای می‌تواند استفاده شود [۲]. لین و همکاران (۱۹۹۴ م) در پژوهشی به بررسی تأثیر نیروهای دینامیکی وارد بر چرخ‌دنده ساده پرداخته و با اصلاح پروفیل دندانها به‌صورت خطی و سهموی توانستند میزان تغییرات خطا در انتقال را در نمونه مورد بررسی کاهش دهند [۳]. تانسن و همکاران (۱۹۷۴) با انجام آزمایشات تجربی به بررسی تأثیر اصلاح سر دندانها بر بهبود عملکرد چرخ‌دندها پرداخته‌اند [۴]. بنوری و همکاران (۲۰۰۸ م) با کمک الگوریتم ژنتیک سعی بر به‌دست آوردن روشی کلی برای اصلاح پروفیل دندانها کردند و در نتیجه مقادیر بهینه‌ای برای اصلاح سر و ریشه دندانها ارائه نموده‌اند [۵]. فاجیونی و همکاران (۲۰۱۱ م) روش بهینه‌سازی جامعی از طریق کاهش ارتعاشات چرخ‌دنده به‌کمک اصلاح پروفیل دندانها روی چرخ‌دنده ساده ارائه کردند [۶]. تأثیر تغییر الاستیک شفت بر تغییرات خطای انتقال ایستایی در چرخ‌دنده‌های مخروطی دندانها مستقیم موضوعی است که سنتوکو و همکارش (۲۰۰۴ م) به آن پرداخته‌اند و نتایج حاصل را با حالت بدون در نظر گرفتن این تأثیر مقایسه نموده‌اند [۷]. الخولی و همکاران (۱۹۹۸ م) نیز به‌کمک تقریب تردگولد و با کمک نتایج تحلیلی به بررسی تغییر نیروها و تنش‌ها در عرض دندانها چرخ‌دنده مخروطی ساده پرداخته و نتایج خود

را با اندازه‌گیری‌های تجربی مقایسه نموده‌اند [۸]. بهرامی و همکاران (۲۰۱۳ م) با تقسیم دندانها چرخ‌دنده مخروطی ساده به چندین چرخ‌دنده ساده به بررسی تنش‌های هرترز در عرض دندانها پرداخته و نتایج خود را با نتایج نرم‌افزار المان محدود مقایسه کرده‌اند [۹]. در این مقاله با کمک تقریب تردگولد عرض دندانها چرخ‌دنده مخروطی ساده به چندین چرخ‌دنده ساده معادل تقسیم می‌شود. این روش در پژوهش‌های زیادی [۸-۹] مورد ارزیابی قرار گرفته است. به‌کمک نرم‌افزار اجزای محدود مارک^۴، میزان جابه‌جایی معادل بر اثر اعمال گشتاور بر پینیون به‌دست می‌آید. با کمک الگوریتم ژنتیک و تحلیل اجزای محدود مقادیر بهینه‌ای برای اصلاح پروفیل اینولوت دندانها شامل مقادیر دامنه برداشت سر و ریشه و قطر شروع برداشت سر و ریشه ارائه می‌شود. در این حالت کمترین مقدار تفاضل ماکزیمم و مینیمم خطای انتقال ایستایی به‌دست می‌آید که منجر به کاهش دامنه خطای انتقال ایستایی و در نهایت کاهش ارتعاش در چرخ‌دنده مخروطی مورد نظر می‌شود.

۲. مدل هندسی

هندسه چرخ‌دنده مخروطی ساده متشکل از چند مخروط است که به‌نوعی در پشت یکدیگر واقع شده‌اند. با حرکت از انتهای ضخیم دندانها؛ یعنی جایی که بیشترین مدول برای آن مقطع متصور می‌شود، به سمت مرکز می‌توان این‌گونه فرض کرد که تعداد بیشماری دندانها با مدول‌های متفاوت به‌طور پیوسته کنار هم قرار گرفته‌اند. در واقع می‌توان عرض دندانها چرخ‌دنده مخروطی ساده را به چند دندانها ساده با مدول‌های متفاوت تقسیم کرد (شکل ۱) که به آنها چرخ‌دنده ساده مجازی گفته می‌شود [۸، ۱۰]. شکل ۲ چگونگی انطباق چرخ‌دنده ساده بر چرخ‌دنده مخروطی را نمایش می‌دهد. مدول هر یک از چرخ‌دنده‌های مجازی برابر مدول همان مقطع خواهد بود، اما تعداد دندانها و قطر چرخ‌دنده ساده مجازی با استفاده از روابط ۱ تا ۳ به‌دست می‌آید [۸]:

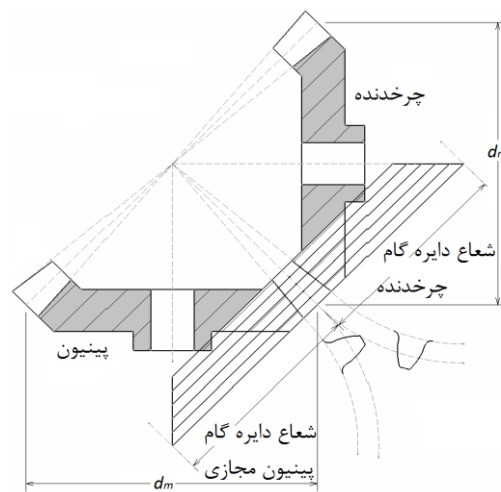
هر یک از چرخ‌دنده‌های مخروطی درگیر، b_n فاصله مقطع برش از مدول بزرگ، m_o مدول بزرگ چرخ‌دنده مخروطی، m_n مدول در مقطع مورد نظر، R_e طول مخروط گام و نهایتاً N تعداد مقاطع است. در جدول ۱ مشخصات هندسی مربوط به چرخ‌دنده مخروطی ساده مورد بررسی ذکر شده است [۸].



شکل ۱. تقسیم عرض دندانه به چرخ‌دنده‌های معادل

جدول ۱. مشخصات هندسی چرخ‌دنده مخروطی ساده

چرخ‌دنده	پینیون	مشخصه
۳۲	۳۲	تعداد دندانه
۶	۶	مدول (میلی‌متر)
۲۰	۲۰	زاویه فشار (درجه)
۳۰	۳۰	عرض دندانه (میلی‌متر)
۲۰۶۰۰۰	۲۰۶۰۰۰	مدول یانگ (مگاپاسکال)
۰/۳	۰/۳	ضریب پواسون
۳۱۷۰۰۰		گشتاور (نیوتن میلی‌متر)



شکل ۲. انطباق چرخ‌دنده ساده مجازی

بر چرخ‌دنده مخروطی دندانه مستقیم

در این مدل عرض دندانه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. به منظور افزایش میزان دقت مدول انتخاب شده برای هر قسمت مدول میانی هر مقطع است. از این رو مدول‌های مورد نظر در فاصله‌های ۱۵ و ۲۵ میلی‌متری از مدول بزرگ به دست می‌آیند. بنابراین سه جفت چرخ‌دنده ساده با تعداد دندانه‌های برابر و مدول‌های متفاوت به دست می‌آید. در جدول ۲ مقادیر هندسی به دست آمده برای هر سه چرخ‌دنده ساده مجازی ذکر شده است. گشتاور کل وارد بر پینیون‌ها به نحوی توزیع می‌گردد که جابه‌جایی زاویه‌ای تمام مقاطع یکسان باشند. مقادیر مربوط به گشتاور به صورت نسبتاً خطی از مدول بیشتر به مدول کمتر کاهش می‌یابد [۸].

مقدار خطای انتقال ایستایی در امتداد خط عمل به کمک رابطه ۴ به دست می‌آید [۱۱]؛ به طوری که در این رابطه r_b معرف شعاع دایره مبنای چرخ‌دنده پینیون و δ متوسط

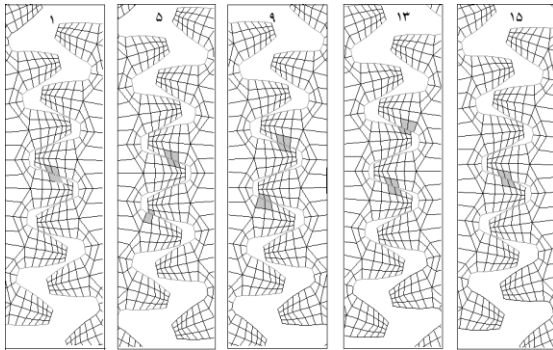
$$z_{vi} = \frac{z_{bi}}{\cos \delta_i}, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

$$d_{vi} = \frac{d_{mi}}{\cos \delta_i}, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

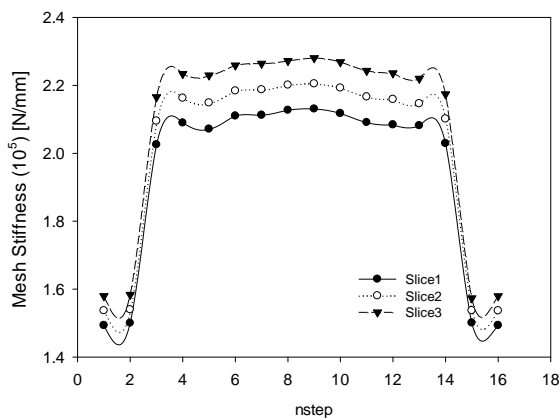
$$m_n = m_o \left(1 - \frac{b_n}{R_e}\right), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

به طوری که در این روابط d_{vi} و z_{vi} به ترتیب تعداد دندانه و قطر دایره گام برای هر یک از جفت چرخ‌دنده معادل‌اند. همچنین d_{mi} قطر دایره گام در مقطع چرخ‌دنده مخروطی، z_{bi} تعداد دندانه جفت چرخ‌دنده مخروطی مربوط به پینیون و چرخ‌دنده و δ_i زاویه مخروط گام برای

درگیری بیش از یک جفت دندان دور از انتظار نیست. با درگیر شدن دو جفت دندان سختی به شدت افزایش می‌یابد. با توجه به شکل ۳ و ۴ در گام ۱۵ ناگهان سختی دوباره به مقدار اولیه در گام ۱ باز می‌گردد. این بدان معناست که یک دوره از تماس دندانها طی شده است.



شکل ۳. نمایش تغییر تعداد تماس دندانها در یک دوره تماس



شکل ۴. تغییرات سختی سه مقطع بر حسب موقعیت زاویه‌ای جفت چرخ‌دنده در یک دوره کامل تماس

خطای انتقال ایستایی رفتاری کاملاً عکس نسبت به سختی سیستم دارد. در شکل ۵ مشاهده می‌شود که وقتی یک جفت دندان درگیر باشند (گام ۱ و ۱۵) بیشترین مقدار جابه‌جایی محیطی و وقتی دو جفت دندان درگیر باشند کمترین مقدار به دست می‌آید. شکل ۵ خطای انتقال ایستایی خطی را برای هر سه جفت معادل نشان می‌دهد. نکته قابل تأمل تفاوت مقادیر جابه‌جایی در گام‌های پیاپی است که ناشی از تفاوت شعاع دایره مبنای چرخ‌دنده‌هاست.

جابه‌جایی زاویه‌ای نقاط مربوط به شعاع داخلی پینیون بر حسب رادیان است.

$$STE = r_b \delta \quad (4)$$

نسبت STE/r_b برای همه مقاطع مقدار ثابتی است. در این حالت می‌توان اطمینان داشت که هر سه مقطع در هر گام جابه‌جایی یکسانی دارند و لذا تماس یکنواخت به خوبی رعایت می‌شود. یک پرپود کامل از درگیری دندان به ۱۵ موقعیت زاویه‌ای مساوی تقسیم شده و در هر موقعیت زاویه‌ای میزان خطا در انتقال تعیین شده است، به طوری که هر گام چرخ‌دنده‌ها به اندازه 0.0093 رادیان نسبت به حالت قبل خود چرخانده شده است. در هر گام میزان جابه‌جایی زاویه‌ای نقاط داخلی پینیون اندازه‌گیری شده است. شرایط مرزی مسئله به گونه‌ای است که به گره‌های داخلی محور پینیون نیروی ناشی از گشتاور مورد نظر اعمال می‌شود و گره‌های داخلی محور چرخ‌دنده در هر سه جهت کاملاً مسدود هستند.

جدول ۲. مشخصات هندسی پینیون‌های معادل

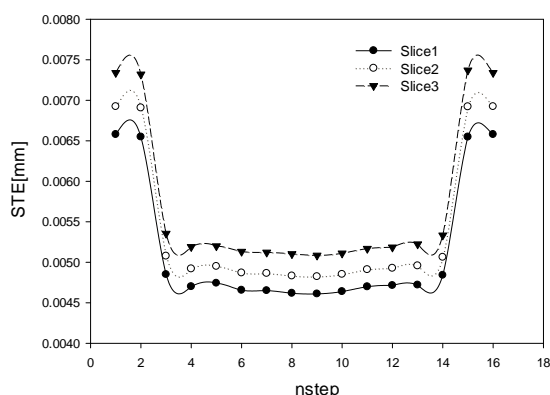
مقطع اول	مقطع دوم	مقطع سوم	
۴۵	۴۵	۴۵	تعداد دندان
۵/۷۷	۵/۳۳	۴/۸۹	مدول (میلی‌متر)
۱۲۰۰۰۰	۱۰۵۰۰۰	۹۱۹۰۰	گشتاور (نیوتن میلی‌متر)

بر مبنای همین جابه‌جایی سختی مجموعه چرخ‌دنده‌ها به کمک رابطه ۵ محاسبه شده است [۱۱]. در این رابطه T گشتاور وارده است که در تمامی گام‌ها ثابت است. در این رابطه r_b شعاع دایره مبنای پینیون و δ_j جابه‌جایی زاویه‌ای نقاط داخلی پینیون در هر گام می‌باشد. همچنین j شماره گام است.

$$K_j = \frac{T}{r_b^2 \delta_j}, j = 1, 2, \dots, 15 \quad (5)$$

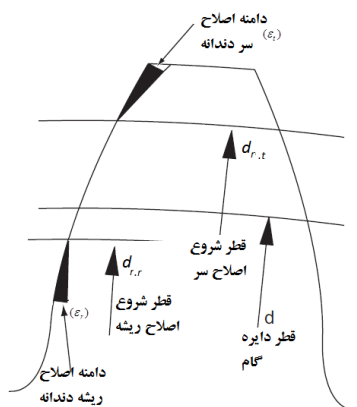
درگیری دندانها از نقطه درگیری روی دایره گام آغاز می‌شود (شکل ۳). چون نسبت تماس بزرگتر از یک است

ماکزیمم و مینیمم خطای انتقال ایستایی بوده است. برای مقطع ابتدایی، دامنه برداشت از مقطع میانی ضرب در یک ضریب افزایشده (نسبت مدول مقطع ۱ به مقطع میانی) شده است. مشابه همین عمل با ضرب یک ضریب کاهشده (نسبت مدول مقطع ۳ به مقطع میانی) در مقطع میانی، دامنه مورد نظر برای مقطع انتهایی نیز به دست آمده است. چون تمامی تغییرات در دندانۀ چرخ دندۀ مخروطی دندانۀ مستقیم از پشت تا نوک دندانۀ خطی است، دامنه برداشت از سر دندانۀ هم به صورت خطی تغییر خواهد نمود.



شکل ۵. تغییرات خطای انتقال ایستایی خطی سه مقطع

برحسب موقعیت زاویه‌ای جفت چرخ دندۀ در یک دورۀ کامل



شکل ۶. نمایش چگونگی برداشت از سر و ریشه [۵]

۳. تأثیر اصلاح پروفیل دندانۀ بر خطای انتقال

ایستایی

اصلاح دندانۀ به صورت خطی تأثیر محسوسی در جابه‌جایی زاویه‌ای الاستیک دندانۀ‌های چرخ دندۀ‌های معادل نداشته،

کاهش تفاضل مقدار ماکزیمم و مینیمم اهمیت زیادی دارد [۵]. هرچه این تفاضل کمتر باشد، عملکرد ارتعاشی سیستم بهتر خواهد بود. روش‌های منوعی در جهت کاهش مقدار تفاضل توسط پژوهشگران ارائه شده است که تغییر پروفیل دندانۀ از جمله مهم‌ترین آنهاست [۲]. در این روش، سر یا ریشه و یا هر دو قسمت دستخوش تغییر می‌شوند. این امر سبب کاهش اختلاف ماکزیمم و مینیمم خطای انتقال ایستایی و در نهایت کاهش دامنه ارتعاش سیستم می‌شود. برداشت از سر دندانۀ با دو پارامتر مهم معرفی می‌شود. یکی دامنه برداشت شامل برداشت از سر (ϵ_r) و برداشت از ریشه (ϵ_t) و دیگری قطر شروع برداشت شامل برداشت از سر ($d_{r,t}$) و قطر شروع برداشت از ریشه ($d_{r,r}$) است که در شکل ۶ نمایش داده شده است. مقدار مناسب این دو پارامتر برای جفت چرخ دندۀ درگیر میانی محاسبه شده است. جدول ۳ مقادیر به دست آمده برای برداشت از سر و ریشه و همچنین قطرهای شروع برداشت برای مقطع میانی و سایر مقاطع را شامل می‌شود.

جدول ۳. نتایج عددی بهینه برای دامنه و قطر برداشت سر و ریشه

چرخ	مقطع اول		مقطع دوم		مقطع سوم	
	۲	۱	۲	۱	۲	۱
دامنه برداشت سر دندانه (میکرومتر)						
ϵ_t	۹/۶	۳۹/۱	۸/۸	۳۶/۱	۳۳/۱	۸/۱
دامنه برداشت ریشه دندانه (میکرومتر)						
ϵ_r	۱۶/۴	۱/۸	۱۵/۱	۱/۷	۱/۵	۱۳/۹
قطر شروع برداشت سر دندانه (میلی‌متر)						
$d_{r,t}$	۲۶۷/۱	۲۷۰/۱	۲۴۶/۷	۲۴۹/۳	۲۲۶/۳	۲۲۸/۷
قطر شروع برداشت ریشه دندانه (میلی‌متر)						
$d_{r,r}$	۲۵۷/۰	۲۵۲/۱	۲۳۷/۴	۲۳۲/۸	۲۱۷/۷	۲۱۳/۶

این مقادیر از نتایج تحلیل‌های زیادی که توسط الگوریتم ژنتیک صورت گرفته به دست آمده است. در بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک تابع هدف دستیابی به کمینه تفاضل

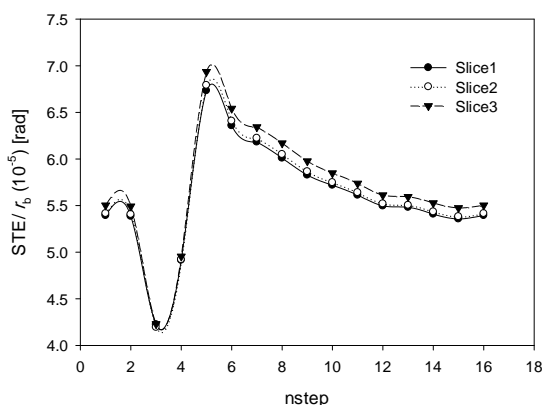
چرخ‌دنده‌هاست. بنابراین با داشتن چرخ‌دندهٔ مخروطی با مشخصات ذکر شده می‌توان اطمینان داشت که با اعمال اصلاح پروفیل دندانهٔ بهینه در سر و ریشه آن می‌توان تا حد قابل قبولی میزان نوسانات ناشی از تغییرات خطای انتقال ایستایی را کاهش داد.

جدول ۴. مقادیر تفاضل ماکزیمم و مینیمم خطای انتقال ایستایی

مدل	بدون اصلاح پروفیل	با اصلاح پروفیل
میکرومتر	۱۹/۸۵	۷/۹۲

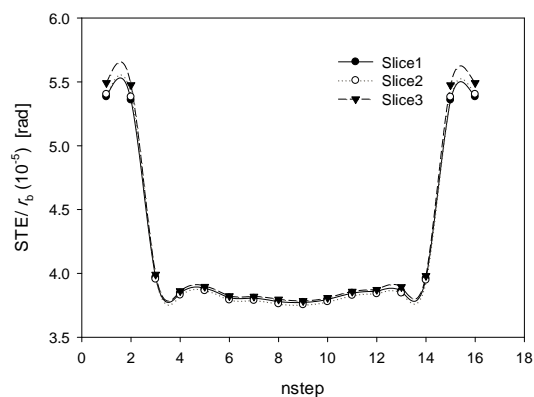
۴. نتیجه‌گیری

به کمک روش اصلاح پروفیل دندانه و تقریب تردگولد می‌توان چرخ‌دندهٔ مخروطی دندانه مستقیم را با چند مقطع از چرخ‌دندهٔ ساده جایگزین کرد و اصلاح پروفیل دندانه را بر آنها اعمال نمود. در این مقاله چرخ‌دندهٔ مخروطی دندانه مستقیم به سه مقطع تقسیم شد و سه جفت چرخ‌دندهٔ ساده به دست آمد. اصلاح پروفیل دندانه بر جفت چرخ‌دندهٔ میانی اعمال شد و مقادیر مناسب برای تغییر پروفیل به دست آمد. با تعمیم این مقادیر بر سایر جفت چرخ‌دنده‌های ساده می‌توان اطمینان داشت که چرخ‌دندهٔ مخروطی حاصل دارای ویژگی مطلوب؛ یعنی کوچک بودن فاصلهٔ ماکزیمم و مینیمم خطای انتقال ایستایی است. اعمال اصلاح پروفیل دندانه منجر به کاهش تفاضل ماکزیمم و مینیمم خطای انتقال ایستایی به میزان ۶۰ درصد شد.



شکل ۸. جابه‌جایی الاستیک برای حالت با اصلاح پروفیل دندانه

لذا اصل ثابت ماندن تماس در سرتاسر عرض دندانه حفظ شده است. شکل ۷ مربوط به حالت بدون اصلاح پروفیل دندانه است. در این نمودار نسبت خطا در انتقال ایستایی به شعاع دایره مبنا نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که گشتاور وارده بر چرخ‌دنده‌های مجازی جایگزین، مقادیر صحیحی داشته؛ زیرا میزان جابه‌جایی محیطی برای هر سه چرخ‌دنده مجازی یکسان است. این موضوع شرط ثابت ماندن تماس در عرض دندانه را ارضا می‌نماید. رفتاری مشابه آنچه در حالت بدون اصلاح بیان شد برای حالت با اصلاح پروفیل دندانه نیز اتفاق می‌افتد. مقادیر جابه‌جایی محیطی نزدیکی خوبی با یکدیگر بعد از اعمال اصلاح پروفیل دندانه دارند (شکل ۸). اما آنچه در میان دو نمودار بارز است تفاوت رفتار جابه‌جایی محیطی است. برخلاف شکل ۷، که از گام سوم مقادیر تقریباً یکسانی از جابه‌جایی به دست می‌آید، در شکل ۸؛ یعنی بعد از اصلاح پروفیل دندانه، این رفتار کاملاً متفاوت است. این رفتار ناشی از تغییراتی است که در پروفیل دندانه اعمال شده است. تفاضل ماکزیمم و مینیمم مقادیر حاصل برای خطا در انتقال در دو حالت بدون اصلاح پروفیل دندانه و با اصلاح پروفیل دندانه پارامتر مهمی در کاهش ارتعاش جفت چرخ‌دنده درگیر است [۶]. جدول ۴ مقادیر حاصل برای این مورد را نمایش می‌دهد. دامنهٔ جابه‌جایی دندانه‌ها برای هر سه مقطع به میزان ۶۰ درصد کم شده است که این امر نشانهٔ خوبی از تأثیر اصلاح پروفیل دندانه بر ارتعاش



شکل ۷. جابه‌جایی الاستیک برای حالت بدون اصلاح پروفیل دندانه

- [1] Smith, J. Derek, *Gear noise and vibration*. CRC Press, 2003.
- [۲] فرشیدیان فر، انوشیروان، امین ثقفی. "ارتعاشات در سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای"، *صوت و ارتعاش*، ش. ۱، تابستان و پاییز ۱۳۹۱، ص. ۱۵-۲۶.
- [3] Lin, Hsiang Hsi, Fred B. Oswald, Dennis P. Townsend. "Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications." *Mechanism and Machine Theory* 29.8 (1994): 1115-1129.
- [4] Townsend, Dennis P., V. Zaretsky Erwin. "Effect of tip relief on endurance characteristics of super nitralloy and AISI M-50 spur gears." *NasaTechnical Note*, 1974.
- [5] Bonori, Giorgio, Marco Barbieri, Francesco Pellicano. "Optimum profile modifications of spur gears by means of genetic algorithms." *Journal of sound and vibration* 313, no. 3 (2008): 603-616.
- [6] Faggioni, Marcello, Farhad S. Samani, Gabriele Bertacchi, Francesco Pellicano. "Dynamic optimization of spur gears." *Mechanism and machine theory* 46, No. 4 (2011): 544-557.
- [7] Sentoku, Hirofumi, Itou, Tomonobu. "Study on transmission error of Straight Bevel Gears." *JSME International Journal series C*, Vol. 47, No. 1, (2004): 391-397.
- [8] Elkholy, A. H., A. A. Elsharkawy, A. S. Yigit. "Effect of Meshing Tooth Stiffness and Manufacturing Error on the Analysis of Straight Bevel Gears." *Journal of Structural Mechanics* 26.1 (1998): 41-61.
- [9] Bahramighahnavieh, Aref, Peiman Mosaddegh, Saleh Akbarzadeh. "Investigation of the Hertzian stress distribution on the surface of the straight bevel gear." *Applied Mechanics and Materials* 307 (2013): 304-307.
- [10] Decker, Karl-Heinz. *Decker Maschinenelemente: Funktion, Gestaltung und Berechnung*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG, 2014.
- [11] Bonori, Giorgio. "Static and dynamic modeling of gear transmission error". Ph.D. dissetation, University of Modena and Reggio Emilia, 2006.

پی‌نوشت

-
1. Tredgold Approximation
 2. Transmission Error
 3. Profile Modification
 4. MSC Marc2012