

بررسی اثر رفتار دینامیکی بار قطار بر پاسخ پل‌های قوسی بتنی غیر مسلح در حوزه فرکانس

محمدصادق معرفت
استاد دانشکده مهندسی عمران
دانشگاه تهران
mmarefat@ut.ac.ir

مهدی یزدانی*
دانشجوی دکتری مهندسی سازه
دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تربیت مدرس
m.yazdani@ut.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱۱/۲۵

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱۰/۲۳

چکیده

امروزه در شبکه خطوط راه‌آهن کشور، تعداد قابل توجهی از پل‌های قوسی بنایی به‌چشم می‌خورد. این در حالی است که عمر بیشتر این پل‌ها متجاوز از هفتاد سال می‌باشد. طی سال‌های اخیر نه تنها تقاضای باربری این خطوط افزایش یافته، که استفاده از قطارهای تندرو در شبکه راه‌آهن کشور به مسئله‌ای مهم مبدل شده است. به دلیل پیچیدگی موجود در مدل‌سازی این دست از پل‌ها، انجام آزمایش‌های دینامیکی ضروری می‌نماید. آزمایش دینامیکی پل اکبرآباد، واقع در کیلومتر ۲۴ راه‌آهن تهران - قم، مشخصات مهمی چون فرکانس، شتاب و تغییر مکان قائم پل تحت تأثیر حرکت قطار با سرعت‌های مختلف را به‌نمایش می‌گذارد. با توجه به اهمیت مسئله، همچنین به‌دست آوردن مشخصات دینامیکی پل، به مدلی دقیق از پل تحت تأثیر نیروهای دینامیکی نیاز می‌باشد. به همین منظور، با توجه به اطلاعات به‌دست آمده، یک مدل اجزای محدود تهیه شده است. در این مدل، مشخصات هندسی پل مطابق نقشه مدل‌سازی شده و با توجه به رفتار دوبعدی سازه تحت تأثیر بارهای قائم، از تحلیل کرنش مسطح استفاده شده است. به‌منظور به‌هنگام کردن مدل نیز فرکانس طبیعی آن به‌عنوان معیار کالیبراسیون انتخاب شده است. پس از انجام کالیبراسیون، با در نظر گرفتن بار قطار به‌صورت هارمونیک، پاسخ پل در حوزه فرکانس تحت بار دینامیکی قطار مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج تحقیق نشان می‌دهند که پاسخ پل کاملاً به محدوده فرکانسی بار قطار وابسته است.

واژگان کلیدی: پل قوسی بتنی غیرمسلح، مدل اجزای محدود، آزمایش دینامیکی، بار دینامیکی قطار

۱. مقدمه

سازه‌ها تحت تأثیر بارهای قائم طراحی شده‌اند و رفتار آنها نشانگر عملکردی خوب تحت بارهای قائم است. البته رفتار

در شبکه راه‌آهن کشور تعداد قابل توجهی پل قوسی وجود دارد و عمر بیشتر آنها از هفتاد سال گذشته است. این

این سازه‌ها در برابر بارهای قائم دینامیکی، از جمله حرکت قطار، باید بیشتر مورد بررسی قرار گیرد. ارزیابی پل‌های قوسی تحت تأثیر بارهای قائم و افقی از جمله مطالعات مورد علاقه مهندسان و پژوهشگران است، اما رفتار پیچیده موجود در این سازه‌ها سبب شده است تا آزمایش‌های میدانی جزئی ناگزیر در فرایند بررسی و مطالعه رفتار این دست از سازه‌ها باشد. با استفاده از این آزمایش‌ها امکان مدل‌سازی عددی قابل اعتماد فراهم می‌شود. برای ارزیابی پل‌های قوسی روش‌های بسیاری وجود دارد که از جمله مهمترین و دقیق‌ترین آنها می‌توان به روش اجزای محدود اشاره کرد.

نخستین آنالیز پل‌های قوسی بنایی توسط تولر و ساوکو انجام شد [۱]. در ادامه، دیگر پژوهشگران مطالعاتی در این حوزه انجام دادند که در بیشتر آنها ارزیابی پل‌ها تحت تأثیر بارهای قائم بررسی می‌شد [۲-۴]. یزدانی و معرفت نیز در مورد ارزیابی لرزه‌ای پل‌های قوسی بتنی با استفاده از روش پوش‌آور مطالعاتی انجام داده و به این نتیجه رسیدند که عملکرد لرزه‌ای این پل‌ها مناسب است [۵-۶]. از دیگر پژوهشگران فعال در این حوزه هاتزیگریگو می‌باشد. این پژوهشگر یونانی پل آرتا^۱ را بررسی کرده است. وی رفتار پل را تحت تنش مسطح در نظر گرفته و آن را تحت بارهای استاتیکی و دینامیکی بررسی کرده و با فرض مصالح خطی و غیرخطی نتایج را با هم مقایسه نموده است. وی نخستین پژوهشگری است که پل‌های قوسی بنایی را تحلیل تاریخچه زمانی کرده است [۷]. در مورد ارزیابی رفتار پل‌های بنایی تحت تأثیر حرکت قطار مطالعات اندکی انجام شده است که از جمله مهمترین آنها تحقیقات یزدانی و معرفت می‌باشد [۸-۹]. در یک مطالعه میدانی نسبتاً مفصل، یک پل قوسی بتنی غیرمسلح در مسیر راه‌آهن تهران - قم تحت آزمایش بارگذاری دینامیکی قرار گرفته است. این پل از پنج دهانه شش متری تشکیل شده و بیش از هفتاد سال از عمر آن می‌گذرد [۹]. در شبکه راه‌آهن کشور بیش از ۳۰۰۰۰ هزار پل وجود دارد که بخش قابل

توجهی از آنها قوسی بنایی هستند. در این مقاله سعی شده است با استفاده از نتایج این آزمایش میدانی، ابتدا یک مدل اجزای محدود مناسب تحت اثر بارگذاری دینامیکی معرفی شود. سپس با استفاده از مدل نهایی به‌هنگام‌شده از آزمایش، رفتار پل تحت بار دینامیکی قطار در فرکانس‌های مختلف مورد ارزیابی قرار گیرد.

۲. مشخصات پل مورد آزمایش

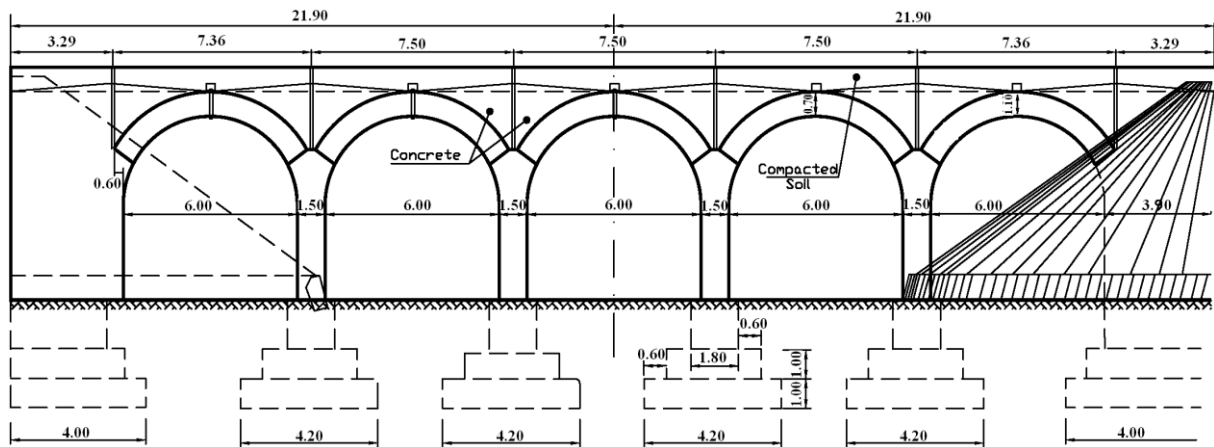
پل مورد بررسی در کیلومتر ۲۴ راه‌آهن قدیم تهران - قم قرار دارد و دارای پنج دهانه شش متری است. سازه پل از نوع قوسی بتنی غیرمسلح است و بیش از ۷۰ سال از ساخت آن می‌گذرد. در این پل ترک‌های اولیه‌ای به‌ضخامت ۱ الی ۳ سانتی‌متر در کلید هر دو قوس به‌صورت عمیق مشاهده شده است که پهنای آنها از سطح به عمق کاهش یافته و در نیمه بالایی ضخامت قوس بسته به‌نظر می‌رسند. مشخصات هندسی اجزای پل در شکل و جدول ۱ نمایش داده شده است. مشخصات مکانیکی مصالح با استفاده از آزمایش کرگیری به‌دست آمده و در جدول ۲ ذکر شده است [۹].

۳. مدل‌سازی عددی

رفتار واقعی سازه به شرایط گیرداری تکیه‌گاه‌ها، خواص واقعی مصالح، تغییر خواص در مقاطع گوناگون، اثر تغییر درجه حرارت، اثر خستگی، اندازه و موقعیت ترک‌ها و جز این‌ها بستگی دارد. همچنین لازم است رفتار مصالح پُرکننده و اندرکنش خاک و پی مد نظر قرار گیرد. در عمل، اعمال تمامی این ویژگی‌ها به‌صورت دقیق ممکن نیست. از این‌رو تنها برخی از این عوامل به‌صورت غیرمستقیم و با انجام کالیبراسیون وارد مدل می‌شوند. در تحقیقات انجام‌شده در این زمینه در مآخذ [۲-۷] به بررسی رفتار پل‌های قوسی بنایی و نحوه مدل‌سازی آنها پرداخته شده است. در این مقاله، اجزای گوناگون سازه، شامل قوس‌ها، پایه‌ها، دیوارهای جانبی و خاک مطابق با وضعیت موجود

مسطح در نظر گرفته می‌شود. در این مدل از المان‌های چهار^۲ و هشت‌گره‌ای^۳ در انسیس^۴ استفاده شده است.

پل با رعایت جزئیات مدل‌سازی شده است. با توجه به رفتار عمدتاً دوبعدی این پل‌ها [۵-۷]، تحلیل از نوع کرنش



شکل ۱. مقطع طولی پل کیلومتر ۲۴

جدول ۱. مشخصات هندسی پل

پل	تعداد دهانه	طول دهانه (متر)	شکل قوس	ضخامت کلید (متر)	ضخامت پاتاق (متر)	عرض قوس (متر)	ارتفاع پل (متر)	ضخامت دیوار جانبی (متر)
کیلومتر ۲۴	۵	۶	نیم‌دایره	۰/۷	۱/۱	۳/۹	۸	۱

جدول ۲. مشخصات بتن از آزمایش کرگیری

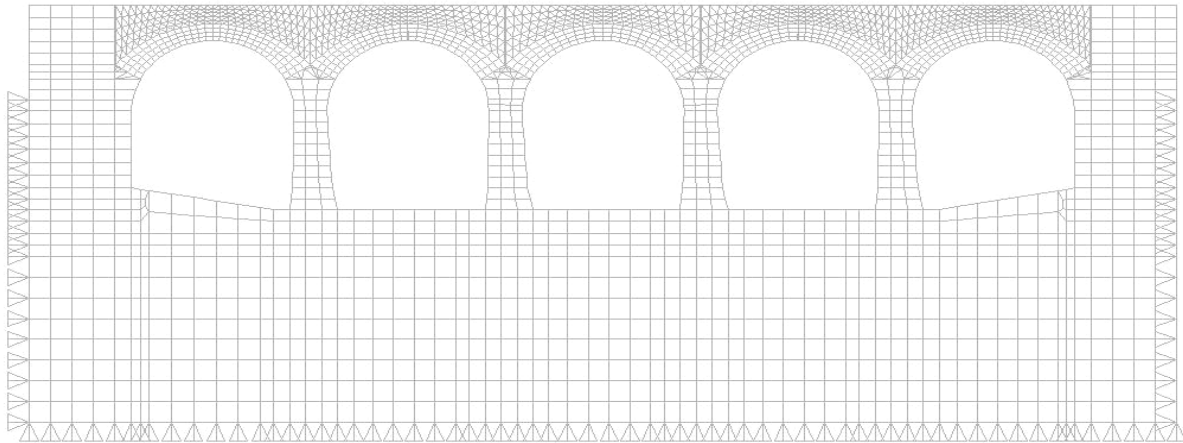
عنوان	مقاومت فشاری بتن (مگاپاسکال)	مدول الاستیسیته (گیگاپاسکال)	وزن مخصوص (کیلوگرم بر متر مکعب)
بتن پرکننده	۷/۶	۱۰/۹	۲۲۱۷
قوس	۳۹/۴	۲۴/۹	۲۲۹۰
پایه	۳۱/۹	۳۶/۵	۲۲۵۰

گرفته شده است. در شکل ۳ نیز نحوه مدل‌سازی ترک‌ها نیز نمایش داده شده است. در آزمایش دینامیکی، دیزل شش محوره ۱۲۰ تنی با سرعت‌های ۱۰، ۲۰، ۴۰، ۵۰، ۶۰ و ۸۰ کیلومتر بر ساعت از روی پل عبور کرده و

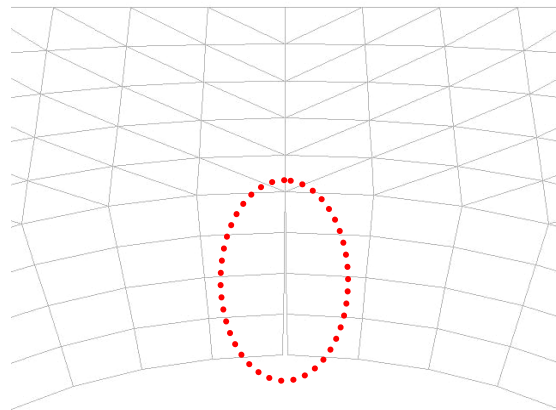
در شکل ۲ مدل اجزای محدود به همراه شرایط مرزی پل نمایش داده شده است. در این مدل خاک تا عمق ده متری و پل مطابق با نقشه مدل‌سازی شده است. همچنین ترک‌های اولیه و درز اجرایی به صورت فضای خالی در نظر

جابه‌جایی کلید قوس دهانه میانی تحت تأثیر حرکت قطار ثبت شده است [۹]. جهت تحلیل دینامیکی، دیزل به‌عنوان نیروی متحرک تلقی شده و از اثر اینرسی جرم دیزل به‌علت وزن زیاد پل صرف‌نظر شده است. بنابراین شش

محور دیزل به‌صورت نیروی متمرکز با فاصله مشخص و با سرعت ذکر شده در آزمایش؛ یعنی ۸۰ کیلومتر بر ساعت در گام‌های زمانی ۰/۱ ثانیه از روی پل عبور داده شد و در مجموع در ۲۵ گام بارگذاری تحلیل دینامیکی انجام شد.



شکل ۲. مدل اجزای محدود و شرایط مرزی پل کیلومتر ۲۴



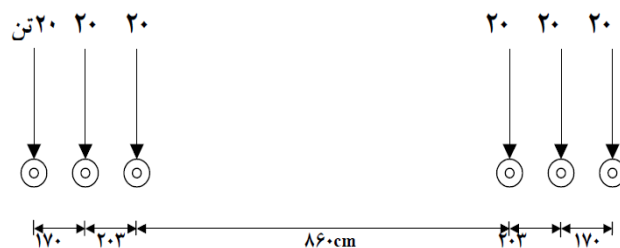
شکل ۳. مدل‌سازی ترک‌های اولیه موجود در کلید قوس پل کیلومتر ۲۴

در شکل ۴ شبیه‌سازی بارگذاری دیزل به‌صورت نیروی متحرک نمایش داده شده است. مشخصات مکانیکی سازه مطابق با آزمایش مربوط به مصالح به مدل داده شده و در ادامه با استفاده از تحلیل مودال فرکانس طبیعی سازه، مطابق جدول ۳، محاسبه شده است. در آزمایش فرکانس طبیعی پل با استفاده از تحلیل تابع چگالی متقاطع به‌دست آمده از آزمایش دینامیکی (عبور دیزل) و از پردازش سیگنال‌های دینامیکی به‌دست آمده است که در مرجع [۹]

به‌صورت کامل ارائه شده است. لازم به‌ذکر است که در این مرحله پارامترهای نامعین همچون شرایط مرزی مدل، نوع و اندازه المان و مشخصات مکانیکی خاک زیر پل به‌عنوان پارامترهای متغیر برای کالیبراسیون انتخاب و آن‌چنان تغییر داده شده‌اند که فرکانس‌های پنج مود اول مدل و آزمایش یکسان گردد. با انجام این کار رفتار مدل عددی مطابق با پل واقعی می‌گردد. با انجام این کار رفتار مدل عددی مطابق با پل واقعی می‌گردد و پارامترهای مجهول پل نیز به‌دست می‌آیند.

سازه را دارد. از این رو در گام دوم واگن ۱۲۰ تنی به صورت بار متحرک به سازه اعمال شد و همان طور که در شکل ۶ مشاهده می شود، نمودار تغییر مکان مدل و آزمایش کاملاً مشابه اند.

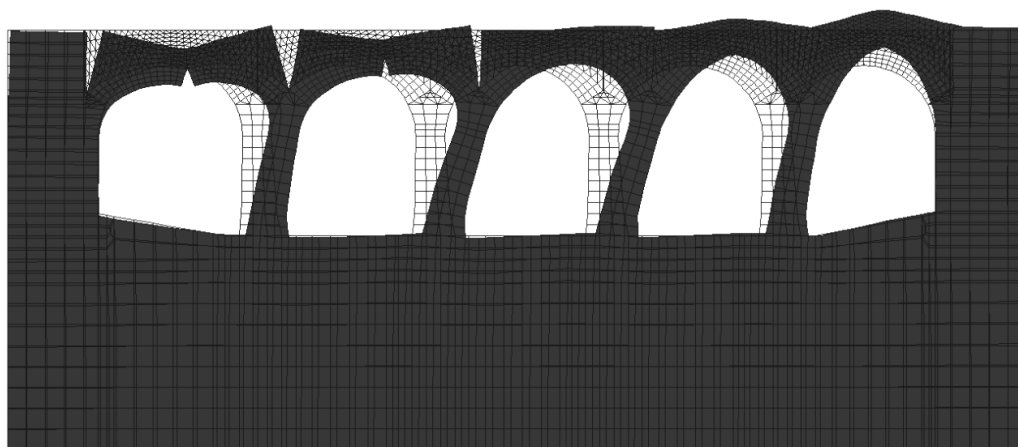
در شکل ۵ تغییر شکل مدل سازه نمایش داده شده است. حال با توجه به اینکه فرکانس های طبیعی مدل اجزای محدود با آزمایش تقریباً یکسان است، می توان نتیجه گرفت که مدل قابلیت نمایش مشخصات دینامیکی



شکل ۴. مدل سازی قطار به صورت شش بار متحرک

جدول ۳. فرکانس پنج مد اول سازه

مد اول	مد دوم	مد سوم	مد چهارم	مد پنجم
۱۴/۶	۲۱/۵	۲۶/۴	۳۱/۳	۳۵/۲
۱۴/۸۴	۲۰/۶۴	۲۲/۱۵	۲۷/۲	۲۸/۳۲



شکل ۵. تغییر شکل مدل اول پل در تحلیل مودال

شده است. در این جدول مشخصات پل از آزمایش به دست آمده بود، این در حالی است که مشخصات خاک زیر آن از عملیات کالیبراسیون به دست آمده است. چون فرکانس مدل مورد نظر در پنج مد اول، همچنین پاسخ تغییر مکان پل

لازم به ذکر است که برای تحلیل دینامیکی از تحلیل تاریخچه زمانی در ۵۰ گام زمانی استفاده و از میرایی رایلی برای منظور کردن درصد میرایی استفاده شده است [۱۰]. در جدول ۴ مشخصات نهایی مدل پس از کالیبراسیون ذکر

تحت تأثیر بار قطار با آزمایش مطابقت خوبی دارد، می‌توان استنباط کرد این پل می‌تواند نماینگر واقعی مشخصه‌های دینامیکی دیگر از جمله رفتار در مقابل حرکت قطار، انفجار، زلزله و دیگر بارهای دینامیکی متداول بر سازه باشد. بنابراین با توجه به مشخصات مدل، نتایج ارزیابی رفتار پل مورد بررسی می‌تواند قابل اطمینان باشد.

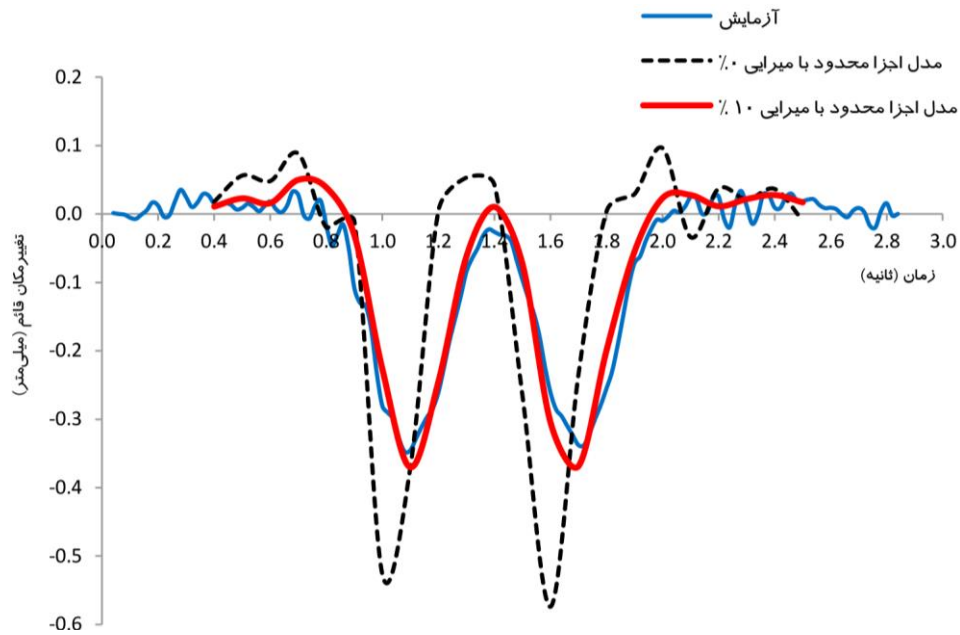
۴. ارزیابی پل تحت تأثیر رفتار دینامیکی ناشی از قطار

با توجه به ماهیت دینامیکی نیروهای ناشی از قطار، در بررسی و مطالعه دینامیک حاکم بر حرکت قطار سه نوع مدل دینامیکی جهت بیان بار ناشی از قطار از جمله: طولی (نیروی طولی و نیروی اعمالی در لحظه شروع حرکت)، جانبی (نیروهای گریز از مرکز و ضربه‌های جانبی) و عمودی (ناشی از وزن قطار) و یا ترکیبی از آنها امکان‌پذیر است که هر کدام پیچیدگی‌های خاص خود را دارند [۱۱]. با توجه به آثار موضعی مدل طولی و جانبی، همچنین وزن زیاد پل‌های قوسی بنایی، به‌طور کلی مدل عمودی رفتار دینامیکی قطار در پاسخ پل‌های قوسی بنایی حاکم است. بازه فرکانسی مربوط به بار قطار محدود است و بیشترین انرژی مربوط به بار قطار در محدوده فرکانس‌های نزدیک صفر است، اما به‌طور کلی فرکانس لرزش‌های ناشی از حرکت قطار در محدوده ۲ تا ۲۰۰ هرتز قابل تغییر است

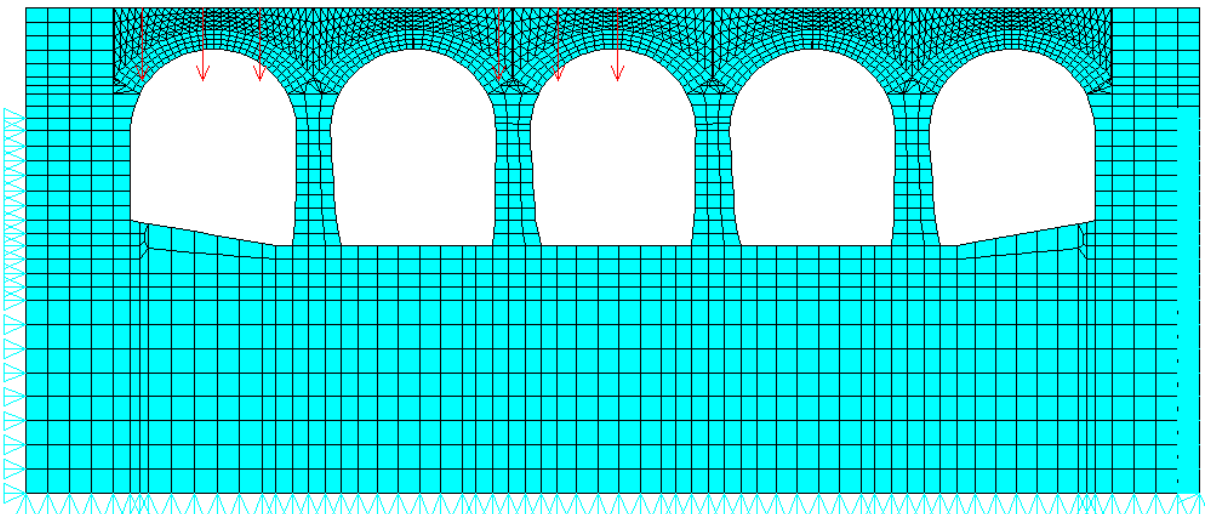
[۱۱]. مطالعات دیگر نشان می‌دهد که دامنه فرکانس‌های بیشتر از ۳۵ هرتز به شدت کاهش می‌یابد [۱۲]. پاسخ سازه در برابر حرکت قطار به فاصله محور چرخ‌ها، وزن قطار و سرعت قطار وابسته است. براساس مطالعات انجام‌شده مشخص شده است که وزن قطار روی بزرگی نیروی قطار، سرعت حرکت قطار روی فرکانس نیروی قطار و فاصله محور چرخ‌ها روی بزرگی و فرکانس بار قطار اثر می‌گذارد. همچنین افزایش سرعت قطار سبب افزایش شتاب می‌شود و این امر به افزایش فرکانس بار دینامیکی قطار می‌انجامد [۱۲]. در این مقاله برای در نظر گرفتن رفتار دینامیکی قطار به‌صورت بار هارمونیک با اختلاف فاز صفر، پاسخ پل در حوزه فرکانس مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به ماهیت بارهای قطار و مطالعات انجام‌شده بار دینامیکی قطار در محدوده ۰/۱ تا ۵۰ هرتز در نظر گرفته شده است و پاسخ جابه‌جایی حداکثر (محلی از قرارگیری قطار روی پل که موجب جابه‌جایی حداکثر شده) پل مورد نظر در کلید قوس میانی (شکل ۶) محاسبه شده است که در شکل‌های ۷ و ۸ نمایش داده شده است. همان‌طور که در شکل ۸ مشخص است، در نقاطی که فرکانس بار با فرکانس پل یکسان است، پدیده تشدید رخ می‌دهد. با مقایسه مقادیر جابه‌جایی حداکثر در فرکانس‌های تشدید مشاهده می‌شود که فرکانس مود ششم بسیار بحرانی‌تر از فرکانس مودهای دیگر است و علت آن می‌تواند به شکل مود پل در این

جدول ۴. مشخصات نهایی اعضای پل پس از کالیبراسیون در تحلیل مودال

عنوان	مدول الاستیسیته (گیگاپاسکال)	ضریب پواسون	وزن مخصوص (کیلوگرم بر متر مکعب)	ضریب چسبندگی (کیلوپاسکال)	زاویه اصطکاک (درجه)
قوس	۲۴/۹	۰/۱۶۷۶	۲۲۹۰	۶۵۹۱	۵۳
پایه	۳۶/۵	۰/۱۸۰۸	۲۲۵۰	۵۶۱۷	۵۱/۲
پرکننده	۱۰/۹	۰/۲۸۸۳	۲۲۱۷	۱۹۱۵	۳۶/۵
خاک	۵	۰/۳۳	۲۰۰۰	۱۰۰۰	۳۰



شکل ۶. نمودار تغییر مکان بر حسب زمان در کلید قوس میانی پل در هنگام حرکت قطار با سرعت ۸۰ کیلومتر بر ساعت



شکل ۷. محل قرار گرفتن قطار در لحظه جابه‌جایی حداکثر در کلید قوس دهانه میانی

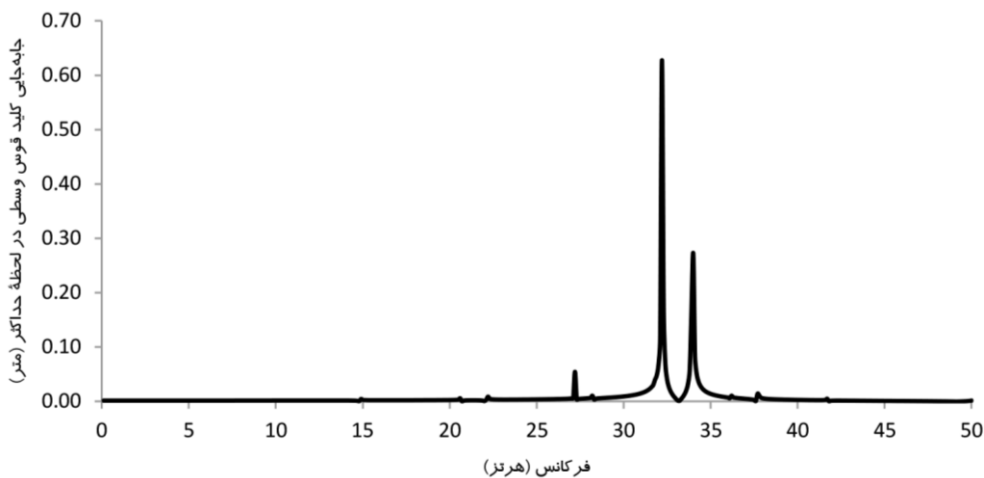
ساعت در شکل ۹ نمایش داده شده است. همان‌طور که مشخص است در سرعت ۸۰ کیلومتر بر ساعت با افزایش فرکانس قطار پاسخ پل نیز افزایش یافته است. بنابراین برای ارزیابی پاسخ اینگونه پل‌ها فرکانس قطارهای عبوری بسیار حائز اهمیت است. چون سرعت حرکت قطار روی فرکانس بار اثر بسیاری دارد، در یک مطالعه دیگر بار قطار

فرکانس بازگردد. چون فرکانس‌های قطار در نزدیکی صفر و با افزایش سرعت قطار فرکانس بار افزایش می‌یابد، معمولاً تا فرکانس‌های ۶ هرتز پاسخ سازه مورد بررسی قرار می‌گیرد. بنابراین با فرض اینکه فرکانس قطار در محدوده قبل از رسیدن به فرکانس‌های پدیده تشدید است، پاسخ حداکثر پل در کلید قوس میانی در سرعت ۸۰ کیلومتر بر

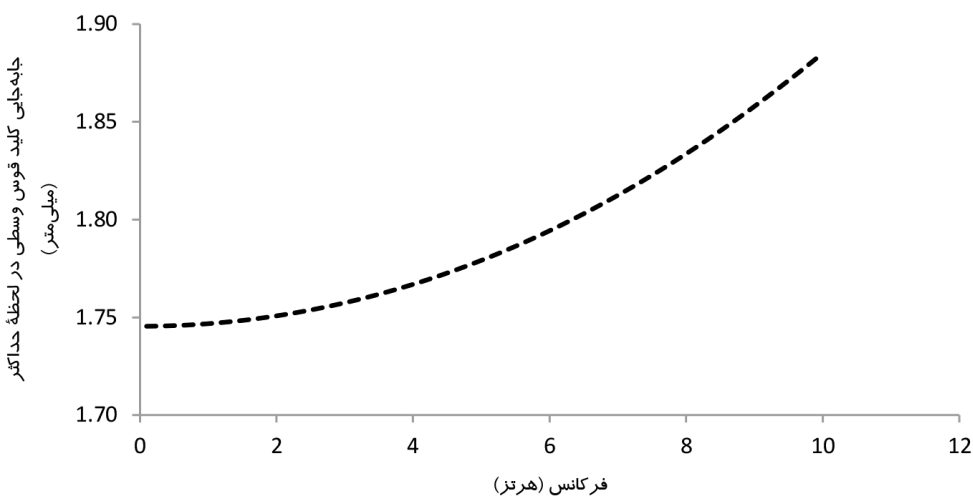
مطابق شکل ۴ به صورت متمرکز و با سرعت ۱۵۰ کیلومتر در ساعت از روی مدل عددی عبور داده شده است. در شکل ۱۰ پاسخ جابه‌جایی پل در کلید قوس میانی نمایش داده شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در نظر گرفتن افزایش سرعت قطار به این صورت سبب کاهش پاسخ پل شده است. بنابراین در نظر گرفتن محدوده فرکانسی برای این بارهای متمرکز بسیار حائز اهمیت است. علاوه بر فرکانس، در پل‌های قوسی بنایی چون ظرفیت جابه‌جایی محدودی دارند، کنترل جابه‌جایی نیز بسیار حائز اهمیت است. بنابر مطالعات انجام‌شده مشخص شده است که فرکانس مود

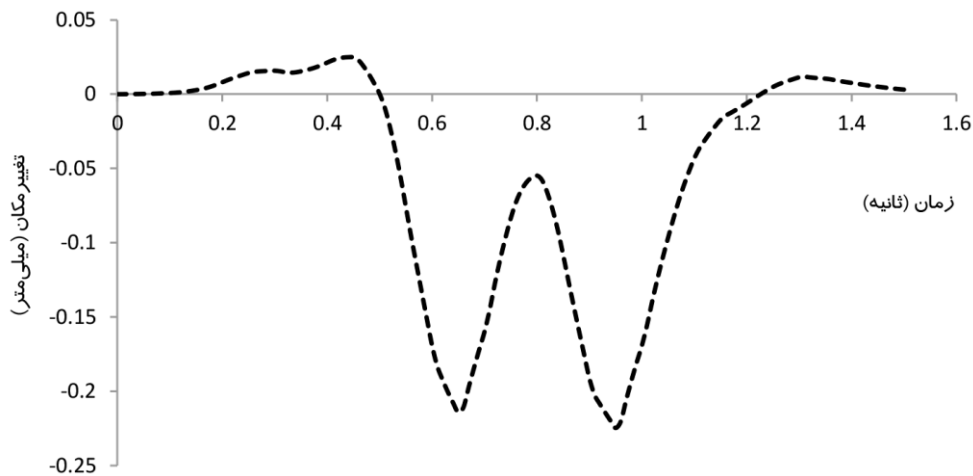
اول پل‌های قوسی بتنی غیرمسلح به تعداد دهانه و طول دهانه آنها بستگی داشته، در محدوده ۵ تا ۲۰ هرتز قرار دارد. هرچه طول دهانه بیشتر و تعداد دهانه‌ها کمتر باشد، فرکانس مود اول کاهش می‌یابد [۸-۱۰]. بنابراین نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که برای پل‌های قوسی با طول دهانه کم حرکت قطار با سرعت بالا به علت نزدیک شدن فرکانس قطار به فرکانس پل می‌تواند منجر به پدیده تشدید شود که به نوع خود می‌تواند بسیار خطرناک باشد. از طرفی، افزایش پاسخ جابه‌جایی در پل‌های دهانه کوچک به هنگام عبور قطار با سرعت بالا می‌تواند امنیت پل شدیداً را دچار مخاطره کند.



شکل ۸. نمودار تغییر مکان بر حسب فرکانس در کلید قوس دهانه میانی پل ۲۴ کیلومتر در لحظه جابه‌جایی حداکثر



شکل ۹. تغییر مکان کلید قوس دهانه میانی پل ۲۴ کیلومتر قبل از رسیدن به فرکانس تشدید



شکل ۱۰. نمودار تغییر مکان کلید قوس میانی پل کیلومتر ۲۴ بر حسب زمان در لحظه حرکت قطار با سرعت ۱۵۰ کیلومتر بر ساعت

۵. نتیجه گیری

و مشاهده شد که با افزایش فرکانس جابه‌جایی حداکثر پل افزایش می‌یابد. از طرفی، با افزایش طول دهانه پل‌ها نیز فرکانس آنها کاهش می‌یابد و این امر نشان می‌دهد که افزایش سرعت حرکت قطار روی پل‌های قوسی با طول دهانه کوچک، به دلیل پدیده تشدید می‌تواند خطرناک باشد. بنابراین پل‌های با دوره تناوبی بالا در برابر حرکت قطارهایی با سرعت بالا امنیت مناسبی خواهند داشت که این خود نویدبخش ورود قطارهای تندرو در شبکه راه‌آهن می‌باشد.

چون در شبکه راه‌آهن کشور بیش از ۳۰۰۰۰ هزار پل وجود دارد و قطارهای موجود نیز با سرعت‌های گوناگون در حال حرکت‌اند، در نظر گرفتن رفتار دینامیکی بار قطار بسیار مهم می‌باشد. در این مقاله با توجه به انجام آزمایش میدانی روی یک پل قوسی بتنی غیر مسلح، ابتدا مدل اجزای محدود، که براساس پاسخ دینامیکی کالیبره و به‌هنگام شده بود، تهیه گردید. با در نظر گرفتن بار قطار به‌صورت بارهای هارمونیک هم‌فاز، تحلیل پاسخ پل در حوزه فرکانس انجام

۶. مأخذ

- [1] Page, J., *Masonry Arch Bridge*, London: TRL State of the Art Review, 1993.
- [2] Sabia, Brencich, D., "Experimental identification of a multi-span masonry bridge the Tanaro bridge." *Journal of Construction and Materials* 22, 2008, pp. 2087-2099.
- [3] Fanning, P.J., T.E. Boothby. "Three-Dimensional Modeling and Full-Scale Testing of Stone arch Bridges." *Computers and Structures*, 79, 2001, pp. 2645-2662.
- [4] Bayraktar, A., C. Althnisik, F. Birinci, B. Sevim, T. Turker. "Finite-Element analysis and vibration testing of a two-span masonry arch bridge ", *Journal of performance of constructed facilities* 24, 2010, pp. 46-52.
- [5] Yazdani, M. M. S. Marefat. "Seismic assessment of six-meter spans plain concrete arch bridge.", *Journal of Seismology and Earthquake Engineering* 1, 2013, pp. 83-93.
- [6] Yazdani, M. M. Jafari, M. S. Marefat. "Seismic assessment of twenty-meter spans plain concrete arch bridge." *4th International Conference on Seismic Retrofitting*, Tabriz, Iran, 2-4 May, 2012.

- [7] Hatzigeorgiou, G. D., D. E. Beskos, D. D. Teodorakopoulos, M. Sfakianakis. "Static and dynamic analysis of the Arta bridge by finite element", *Journal of Facta University, Architecture and Civil engineering* 2, 1999, pp. 41-51.
- [8] Yazdani, M., M. Jafari, M. S. Marefat. "ynamic load testing and FE model updating based on frequency response of a plain concrete arch bridge." *9th International Congress on Civil Engineering, Isfahan*, 8-10 May, 2012.
- [۹] معرفت، محمدصادق و همکاران. "آزمایش استاتیک و دینامیک پل قوسی بتنی اکبرآباد." *نشریه دانشکده فنی* ۱، ۱۳۸۲، ص. ۱۳-۲۵.
- [۱۰] یزدانی، مهدی، محمد صادق معرفت. "تخمین میزان میرایی پل‌های قوسی بتنی غیرمسلح با استفاده از تحلیل دینامیکی"، *دومین کنفرانس بین‌المللی اکوستیک و ارتعاشات*، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ۶ و ۷ دی ۱۳۹۱.
- [11] Sheng, X., C. Jones, J. D. Thomson. "Prediction of ground vibration from trains using the wave number finite and boundary element methods." *Journal of sound and vibration* 293, 2006, pp. 575-586.
- [۱۲] نجاتی، حمیدرضا، حمید هاشم‌الحسینی، مرتضی احمدی، "شبیه‌سازی بار دینامیک قطار و بررسی تأثیر آن بر میزان ارزش سطح زمین"، *مجله مهندسی حمل‌ونقل*، س. ۲، ش. ۱، ۱۳۸۹، ص. ۲۶-۳۷.

پی‌نوشت

۱. آرتا (Bridge of Arta) پلی سنگی است که روی رودخانه آراخوس، واقع در غرب شهر آرتا، در کشور یونان، قرار دارد. این پل طی قرن‌ها چند بار بازسازی شده است [ویراستار].

2. Plane42
3. Plane82
4. Ansys